Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris

15 novembre 2005

Réduction des endomorphismes

1 Sous-espaces et endomorphismes cycliques

Exercice. [Sous-espaces cycliques]

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, u un endomorphisme de E et $x \in E \smallsetminus \{0\}$. On appelle sous-espace u-cyclique engendré par x le sous espace

$$\langle x \rangle_u = \mathbb{K}[u](x) = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \mathrm{vect}(u^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que $\langle x \rangle_u$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u contenant x et que $e_x = \{u^i(x) \mid i \in \{0, \dots, m_x\}\}$ est une base de $\langle x \rangle_u$ (où $m_x = \max\{j \in \mathbb{N} \mid (u^i(x))_{i \in \{0,\dots,j\}}$ est libre$\}$).

On note $u_{\langle x \rangle_u}$ la restriction de u à $\langle x \rangle_u$, $\pi_{u,x} = \pi_{u_{\langle x \rangle_u}}$ son polynôme minimal et $\chi_{u,x} = \chi_{u_{\langle x \rangle_u}}$ son polynôme caractéristique.

2. Montrer que

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\} = \pi_{u,x}\mathbb{K}[X].$$

Montrer que si on note $\pi_{u,x}(X) = X^d + \sum_{i=1}^d a_i X^{d-i}$, la matrice de $u_{\langle x \rangle_u}$ dans la base e_x est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_d \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix},$$

et en déduire que $\pi_{u,x} = \chi_{u,x}$.

3. En déduire que $\pi_u | \chi_u$ (théorème de Cayley-Hamilton).

Exercice. [Existence d'un sous-espace cyclique de dimension $d^\circ \pi_u$]

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\pi_u = P^\alpha$ (où $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible et $\alpha \geq 1$), alors il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
2. Montrer que si $x, y \in E$ vérifient $\pi_{u,x} \wedge \pi_{u,y} = 1$, alors $\pi_{u,x+y} = \pi_{u,x}\pi_{u,y}$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Exercice. [Endomorphismes cycliques]

1. On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique si il existe $x \in E$ tel que $E = \langle x \rangle_u$. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\pi_u = \chi_u$.
2. On appelle commutant d'un endomorphisme u l'ensemble $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid vu = uv\}$. Quel est le commutant d'un endomorphisme cyclique ?

2 Réduction et commutation

Exercice. [Polynôme caracéristique d'un produit]

1. Soient $\mathbb{K}$ un corps infini et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. A-t-on $\pi_{AB} = \pi_{BA}$?

2. Que se passe-t-il si les matrices ne sont plus carrées ?

Exercice. [Commutant d'un endomorphisme]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit le commutant de u par $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid vu = uv\}$.

1. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé, et on note $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)^{\mu_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\mu_i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Montrer que $\dim(C(u)) \leq \sum_{i=1}^{d} \mu_i^2$. Peut-il y avoir égalité ?

2. Déterminer $C(u)$ dans le cas où u a n valeurs propres distinctes.

Exercice. [Crochet de Lie et cotrigonalisabilité]

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On définit le crochet de Lie de u et v par $[u, v] = uv - vu$.

1. On suppose dans un premier temps que $[u, v] = 0$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

2. On suppose ensuite que $[u, v] \in \mathrm{vect}(u)$. Calculer $[u^p, v]$ pour $p \in \mathbb{N}$ et en déduire que u est nilpotente. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

3. Montrer que si $[u, v] \in \mathrm{vect}(u, v)$ alors u et v sont cotrigonalisables.

Exercice. [Crochet de Lie et diagonalisabilité]

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application linéaire

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & [u, v] = uv - vu \end{array}$$

1. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que Ψ est diagonalisable.

2. On suppose que u admet un vecteur propre et que Ψ est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

3. On suppose que u est nilpotent. Montrer que Ψ est nilpotent.

Exercice. [Crochet de Lie scalaire]

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $[u, v] = \alpha Id_E$.

1. Montrer que si E est de dimension finie, alors $\alpha = 0$.

2. Montrer que si E est normé et si u et v sont continus, alors $\alpha = 0$.

3. Montrer que si v admet un polynôme annulateur, alors $\alpha = 0$.

4. Exhiber deux endomorphismes u et v tels que $[u, v] = Id_E$.

Exercice. [Crochet de Lie nilpotent]

1. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la trace de u^p est nulle. Montrer que u est nilpotent.

2. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[[u, v], v] = 0$. Montrer que $[u, v]$ est nilpotent.

Exercice. [Lemme de Shur]

1. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $Q \subset \mathcal{L}(E)$ une partie irréductible (ie. telle que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E). Montrer que le commutant $C(Q) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \forall u \in Q,\ uv = vu\}$ de Q est l'ensemble des homothéties.

2. Le résultat reste-t-il vrai lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$? Peut-on ajouter une hypothèse pour le conserver ?

3 Réduction de Jordan d'un endomorphisme

Exercice. [Indice d'un endomorphisme]

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique $i_u \in \mathbb{N}$, appelé indice de u, tel que

$$\{0\} = \ker(u^0) \subsetneq \ker(u^1) \subsetneq \ldots \subsetneq \ker(u^i) = \ker(u^{i+1}) = \ker(u^{i+2}) = \ldots = \ker(u^q) = \ldots$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer que son polynôme minimal s'écrit alors $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{n_i}$ où n_i est l'indice de l'endomorphisme $u - \lambda_i Id_E$.

Exercice. [Décomposition de Dunford]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

(i) d est diagonalisable,

(ii) n est nilpotente,

(iii) $dn = nd$,

(iv) $u = d + n$.

Exercice. [Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice r. On pose $F_i = \ker(u^i)$. Montrer que

(i) $\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_{r-1} \subsetneq F_r = E$ et que $u(F_i) \subset F_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

(ii) il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \ldots, G_r$ et $H_1, \ldots, H_{r-1}$ tels que $F_i = G_i \oplus F_{i-1}$ (pour $1 \leq i \leq r$), u est injectif sur G_i (pour $1 \leq i \leq r$) et $G_i = u(G_{i+1}) \oplus H_i$ (pour $1 \leq i \leq r - 1$).

(iii) Montrer que dans une base adaptée à ces G_i, la matrice de u est de la forme

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad M_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice. [Réduction de Jordan]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} M_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{\lambda_k} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad M_{\lambda_j} = \begin{bmatrix} N_{\lambda_j}^{n_{j,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{\lambda_j}^{n_{j,l_j}} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad N_\lambda^p = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Exercice. [Endomorphismes nilpotents et algèbre de Hall]

Soient p un nombre premier et $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments. On considère l'ensemble $\mathbb{X}$ des classes de similitude d'endomorphismes nilpotents d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que $\mathbb{X}$ est indéxé par les partitions des entiers.

On note N_λ la classe indéxée par la partition λ. Étant donné un endomorphisme nilpotent u et un sous-espace vectoriel F stable par u, on note u_F la restriction de u à F et $u_{E/F}$ l'endomorphisme passé au quotient par u. Ces deux endomorphismes sont encore des endomorphismes nilpotents, donc il existe λ et μ deux partitions telles que $u_F \in N_\lambda$ et $u_{E/F} \in N_\mu$, et on dit que le sous-espace F est un sous-espace stable par u de type λ et de cotype μ. Étant donné trois partitions λ, μ, ν, on pose

$$m^\lambda_{\mu,\nu} = \#\{F \text{ sous espace stable par } N_\lambda \text{ de type } \mu \text{ et de cotype } \nu\}.$$

On définit une algèbre $\mathbb{H}_p$, appelée algèbre de Hall, sur l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- on se donne l'ensemble $\{N_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ pour base du $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{H}_p$,
- on définit le produit de deux éléments de cette base par

$$N_\mu N_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} n^\lambda_{\mu,\nu} N_\lambda.$$

2. Montrer que cette algèbre est bien définie et qu'elle est commutative et associative (on montrera que l'application de dualité transforme un sous-espace vectoriel stable par N_λ de type μ et de cotype ν en un sous-espace vectoriel stable par N_λ de type ν et de cotype μ).

3. Montrer que $N_{(1^1)}N_{(1^1)} = N_{(2^1)} + (p+1)N_{(1^2)}$.

4 Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice. [Matrices diagonalisables]

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que son intérieur est l'ensemble des matrices avec n valeurs propres distinctes. Que peut-on dire lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$?

Exercice. [$\chi_A = \pi_A$]

Montrer que l'ensemble des matrices dont le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est il dense ? connexe ?

Exercice. [$\mathrm{rg}(A) \leq p$]

1. Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(A) \leq p\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(A) = p\}$.

Exercice. [$A^p = I_n$]

Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*,\ A^p = I_n\}$.