

# Un problème de coloriage

Vincent Pilaud

2006

## 1 Introduction

On considère un ensemble  $S$  de  $n$  points du plan euclidien. On appelle  $k$ -coloriage sans conflit de  $S$  toute application de  $S$  dans  $\{1, \dots, k\}$  telle que pour tout disque  $D$  du plan qui rencontre  $S$ , il existe une couleur  $c \in \{1, \dots, k\}$  telle que  $D$  contienne un unique point de couleur  $c$ . On appelle *nombre critique* de  $S$  le nombre minimal  $\gamma(S)$  de couleurs nécessaires pour effectuer un coloriage sans conflit de  $S$ . La figure 1 présente l'exemple d'une configuration de points qui admet un 3-coloriage sans conflit et dont le nombre critique est 3.

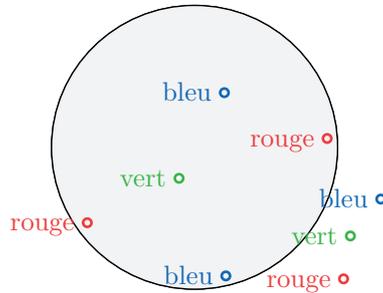


FIG. 1 – 3-coloriage sans conflit d'une configuration de points du plan

Ce problème permet de modéliser la situation d'un réseau de téléphonie mobile. L'ensemble de points  $S$  représentent les relais fixes du réseau et le coloriage correspond à une allocation de fréquences sur ces relais. Un client reçoit les signaux de tous les relais situés dans un disque  $D$  centré en sa position et de rayon variable (dépendant par exemple du niveau de sa batterie ou de la qualité de son téléphone). Si ce client est suffisamment proche des relais du réseau (ie. si le disque  $D$  rencontre  $S$ ), il doit choisir un relai dont la fréquence n'est pas en conflit avec d'autres relais.

Le résultat principal de ce texte est le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Tout ensemble  $S$  de  $n$  points du plan admet un coloriage sans conflit utilisant  $O(\ln n)$  couleurs. Cette borne est optimale.*

Les outils essentiels de la preuve sont présentés dans ce texte : il s'agit des théorèmes de coloration des graphes planaires - on montre ici (§ 2) que tout graphe planaire est 5-coloriable - et de la notion de graphe de Delaunay (§ 3). Après avoir prouvé le théorème principal (§ 4), on donne une forme duale du problème pour laquelle on obtient une borne par des méthodes similaires (§ 5).

## 2 Combinatoire des graphes planaires

### 2.1 Planarité des graphes

On appelle *graphe* la donnée d'une paire  $G = (S, A)$  où  $S$  est l'ensemble des *sommets* de  $G$  et  $A \subset S^2$  l'ensemble de ses *arêtes*. On dit qu'un graphe est

- *fini* lorsque  $S$  est fini,
- *simple* lorsque  $(x, y) \in A \implies (y, x) \notin A$ ,
- *sans boucle* lorsque  $A \cap \{(x, x) \mid x \in S\} = \emptyset$ ,
- *connexe* lorsque pour tous sommets  $s_1$  et  $s_2$ , il existe un chemin d'arêtes qui relie  $s_1$  et  $s_2$ .

On dit qu'un graphe  $G = (S, A)$  se plonge dans un espace topologique  $E$  s'il existe une application  $\phi : S \rightarrow E$  injective et une famille d'applications continues  $(\psi_a : [0, 1] \rightarrow E)_{a \in A}$  telles que

- pour toute arête  $a = (s_1, s_2)$ ,  $\phi(s_1) = \psi_a(0)$  et  $\phi(s_2) = \psi_a(1)$ ,
- pour toute arête  $a$ ,  $\psi_a(]0, 1[) \cap \phi(S) = \emptyset$ ,
- pour toutes arêtes  $a_1$  et  $a_2$ ,  $\psi_{a_1}(]0, 1[) \cap \psi_{a_2}(]0, 1[) = \emptyset$ .

On peut noter à titre d'exemple que tout graphe fini (et même dénombrable) se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous allons voir que la situation est plus compliquée en dimension 2.

On dit qu'un graphe  $G$  est *planaire* s'il se plonge dans le plan. Étant donné un plongement  $\phi, (\psi_a)_{a \in A}$ , on appelle *face* toute composante connexe du complémentaire de  $\phi(S) \cup \bigcup_{a \in A} \psi_a([0, 1])$  dans le plan. Dans toute la suite, on entend par graphe un graphe fini, simple, sans boucle et connexe. La propriété centrale des graphes planaires est fournie par la relation d'Euler :

**Proposition 1.** (Euler) Soit  $G$  un graphe planaire ayant  $s$  sommets,  $a$  arêtes et  $f$  faces. Alors  $s - a + f = 2$ .

Comme les relations d'incidence entre les arêtes et les faces donnent par ailleurs la relation

$$2a = \text{card}\{(a, f) \mid a \text{ incidente à } f\} = \sum_f \text{card}\{a \mid a \text{ incidente à } f\} \geq 3f,$$

on obtient une borne sur le nombre d'arêtes et de faces d'un graphe planaire :

**Proposition 2.** Le nombre d'arêtes (resp. de faces) d'un graphe planaire à  $s$  sommets est majoré par  $3s - 6$  (resp.  $2s - 4$ ).

On appelle *graphe complet* à  $p$  sommets le graphe  $K_p$  dont l'ensemble des sommets est  $\{s_1, \dots, s_p\}$  et l'ensemble des arêtes  $\{(s_i, s_j) \mid 1 \leq i < j \leq p\}$  (fig. 2). On appelle *graphe bipartite complet* à  $(p, q)$  sommets le graphe  $K_{p,q}$  dont l'ensemble des sommets est  $\{s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q\}$  et l'ensemble des arêtes  $\{(s_i, t_j) \mid 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q\}$  (fig. 2).

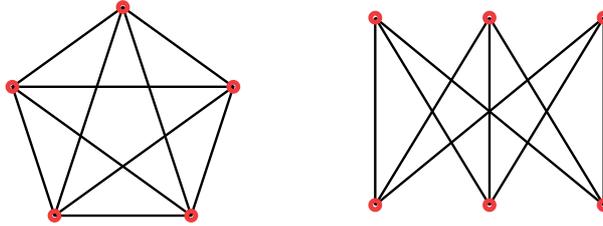


FIG. 2 -  $K_5$  et  $K_{3,3}$

La borne obtenue dans la proposition précédente permet d'affirmer que  $K_5$  n'est pas planaire. Des arguments similaires (prenant en compte le fait qu'un graphe bipartite ne contient pas de triangle) permettent de montrer que  $K_{3,3}$  n'est pas non plus planaire.

En fait, ces deux graphes sont essentiellement les seuls graphes non planaires. On appelle *subdivision d'une arête*  $(s_1, s_2)$  toute chaîne d'arêtes  $(s_1, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{p-1}, t_p), (t_p, s_2)$ . On dit qu'un graphe  $\tilde{G}$  est une *subdivision* d'un graphe  $G$  s'il se déduit de  $G$  en subdivisant des arêtes de  $G$  (fig. 3).

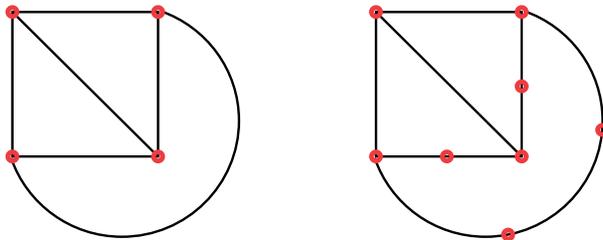


FIG. 3 - Un plongement de  $K_4$  et une subdivision

**Théorème 2.** (Kuratowski) Un graphe  $G$  est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de  $K_5$  et  $K_{3,3}$ .

## 2.2 Théorème de Jordan

Nous avons besoin dans la suite du théorème de Jordan :

**Théorème 3** (Jordan). *Si  $\gamma : [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$  est une courbe de classe  $C^1$  par morceaux, fermée (ie.  $\gamma(-\frac{\ell}{2}) = \gamma(\frac{\ell}{2})$ ) et simple (ie.  $\gamma(x) = \gamma(y) \Rightarrow x, y \in \{-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\}$ ), alors  $\mathbb{C} \setminus \gamma([-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}])$  a exactement deux composantes connexes.*

En fait, on aura essentiellement besoin du fait qu'une courbe  $C^1$  par morceaux fermée sépare au moins deux composantes connexes. Pour le démontrer, on peut commencer par supposer que  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma$  est dérivable en 0, de dérivée  $\gamma'(0) = 1$ , et pour tout point  $t \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$  en lequel  $\gamma$  est dérivable,  $|\gamma'(t)| = 1$  (fig. 4).

On rappelle que l'indice de la courbe  $\gamma$  est défini sur  $\mathbb{C} \setminus \gamma([-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}])$  par

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds,$$

et qu'il vérifie :

**Lemme 1.** *Pour toute courbe  $\gamma$ , de classe  $C^1$  par morceaux, l'indice  $\text{Ind}_\gamma$  est continu à valeur dans  $\mathbb{Z}$ .*

La continuité de l'indice vient de celle de l'intégrande et du fait que l'intégrale se fait sur un segment. Pour montrer que les valeurs de l'indice sont entières, on pose pour  $t \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$

$$F(t) = \frac{1}{\gamma(t) - z} \exp \left( \int_{-\frac{\ell}{2}}^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right),$$

et on a  $F'(t) = 0$ . On en déduit que  $F(-\frac{\ell}{2}) = F(\frac{\ell}{2})$  et, comme  $\gamma(-\frac{\ell}{2}) = \gamma(\frac{\ell}{2})$ , que  $\exp \left( \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right) = 1$ , donc que  $\text{Ind}_\gamma(z)$  est entier.

On a donc une application  $\text{Ind}_\gamma$  de  $\mathbb{C} \setminus \gamma([-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}])$  dans l'espace discret  $\mathbb{Z}$  qui est continue. On va montrer qu'elle n'est pas constante, ce qui montrera que  $\mathbb{C} \setminus \gamma([-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}])$  n'est pas connexe. Pour cela, on doit trouver deux points d'indices distincts, c'est-à-dire de part et d'autre de la courbe. On va montrer que pour  $\delta$  suffisamment petit, les deux points  $i\delta$  et  $-i\delta$  conviennent (fig. 4).

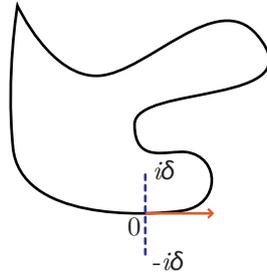


FIG. 4 – Courbe de Jordan

On définit la fonction  $a : [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$  par  $a(t) = \frac{\gamma(t)}{t}$  si  $t \neq 0$  et  $a(0) = 1$ . Les hypothèses sur  $\gamma$  assurent que  $a$  est continue. Soit  $\eta > 0$  tel que pour  $-\eta < t < \eta$ , on a  $|a(t)^2 - 1| < \frac{1}{2}$ .

La différence des deux indices de  $\gamma$  en  $i\delta$  et  $-i\delta$  donne

$$\text{Ind}_\gamma(i\delta) - \text{Ind}_\gamma(-i\delta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - i\delta} - \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) + i\delta} ds = \frac{\delta}{\pi} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2 + \delta^2} ds.$$

Or on a :

1. pour  $s \notin ]-\eta, \eta[$ ,

$$\left| \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2 + \delta^2} \right| \leq \left| \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2} \right| \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\delta}{\pi} \int_{s \notin ]-\eta, \eta[} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2 + \delta^2} ds \right| \leq \frac{\delta}{\pi} \int_{s \notin ]-\eta, \eta[} \left| \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2} \right| ds \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

2. pour  $s \in ]-\eta, \eta[$ , on a par changement de variable  $s = \delta u$  :

$$\frac{\delta}{\pi} \int_{s \in ]-\eta, \eta[} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2 + \delta^2} ds = \frac{\delta}{\pi} \int_{s \in ]-\frac{\eta}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}[} \frac{\gamma'(\delta u)}{\gamma(\delta u)^2 + \delta^2} \delta du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma'(\delta u)}{u^2 a(\delta u)^2 + 1} \chi_{]-\frac{\eta}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}[}(u) du,$$

mais on a

$$\frac{\gamma'(\delta u)}{u^2 a(\delta u)^2 + 1} \chi_{]-\frac{\eta}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}[}(u) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{u^2 + 1} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\gamma'(\delta u)}{u^2 a(\delta u)^2 + 1} \chi_{]-\frac{\eta}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}[}(u) \right| \leq \frac{1}{\frac{u^2}{2} + 1},$$

donc par le théorème de convergence dominée,

$$\frac{\delta}{\pi} \int_{s \in ]-\eta, \eta[} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)^2 + \delta^2} ds \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = 1$$

On obtient donc bien que

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \text{Ind}_\gamma(i\delta) - \text{Ind}_\gamma(-i\delta) = 1,$$

d'où le résultat.

### 2.3 Coloriabilité des graphes planaires

Soit  $G = (S, A)$  un graphe et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On appelle  $k$ -coloriage du graphe  $G$  tout coloriage des sommets  $S$  avec  $k$  couleurs qui ne laisse aucune arête de  $A$  monochrome, ie. toute partition de  $S$  en  $k$  parts  $S_1, S_2, \dots, S_k$  telle que pour toute arête  $a = (s_1, s_2) \in A$  et tout  $i \leq k$ ,  $s_1 \in S_i \Rightarrow s_2 \notin S_i$ .

On appelle *nombre chromatique* du graphe  $G$  le nombre minimal  $\chi(G)$  qui permet de colorier  $G$ .

Par exemple, le nombre chromatique du graphe complet  $K_p$  est  $p$ . En particulier, il existe des graphes dont le nombre chromatique est arbitrairement grand. Ce n'est cependant pas le cas des graphes planaires :

**Théorème 4.** *Tout graphe planaire est 6-coloriable.*

En effet, la borne donnée sur le nombre d'arêtes d'un graphe planaire (prop. 2) permet de montrer que tout graphe planaire admet un sommet de degré inférieur ou égal à 5 : dans le cas contraire, on aurait

$$6s - 12 = 2(3s - 6) \geq 2a = \text{card}\{(s, a) \mid s \in a\} \geq 6s,$$

ce qui est absurde. On en déduit alors le résultat par récurrence :

- un graphe ayant moins que 6 sommets est 6-coloriable, donc l'initialisation de la récurrence est triviale,
- étant donné un graphe planaire  $G$ , et étant donné un sommet  $s$  de  $G$  de degré inférieur ou égal à 5, on peut supposer connaître un 6-coloriage de  $G \setminus s$ . Autour de  $s$ , on a utilisé au plus 5 couleurs, ce qui permet de colorier  $s$  dans la couleur restante et d'obtenir un 6-coloriage du graphe  $G$ .

On peut améliorer ce résultat en utilisant le théorème de Jordan démontré dans la partie précédente :

**Théorème 5.** *Tout graphe planaire est 5-coloriable.*

Encore une fois, on montre ce résultat par récurrence :

- l'initialisation de la récurrence est triviale,
- soit  $G$  un graphe planaire et  $s$  un sommet de  $G$  de degré au plus 5. On note  $s_1, \dots, s_5$  les sommets adjacents à  $s$ , triés dans l'ordre trigonométrique autour de  $s$ . Soit  $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_5 = S \setminus \{s\}$  un 5-coloriage de  $G \setminus s$ . On peut supposer que toutes les couleurs sont utilisées autour de  $s$  (sinon, il suffit de colorer  $s$  avec une des couleurs restantes et on obtient un 5-coloriage de  $G$ ), et que  $s_i \in S_i$  pour tout  $1 \leq i \leq 5$ . On considère le sous-graphe  $\tilde{G}$  de  $G$  induit par  $S_1 \cup S_3$ , ie. le graphe dont l'ensemble des sommets est  $S_1 \cup S_3$  et l'ensemble des arêtes  $A \cap (S_1 \cup S_3)^2$ . On a alors deux situations possibles :

- (i) si  $s_1$  et  $s_3$  ne sont pas dans la même composante connexe dans  $\tilde{G}$ , on inverse les couleurs 1 et 3 dans la composante connexe de  $s_1$  dans  $\tilde{G}$ . On obtient alors un 5-coloriage de  $G \setminus s$  dans lequel la couleur 1 n'apparaît pas autour de  $s$ . On peut alors colorier  $s$  avec 1 pour obtenir un 5-coloriage de  $G$ .
- (ii) si  $s_1$  et  $s_3$  sont dans la même composante connexe dans  $\tilde{G}$ , on considère un chemin  $\gamma$  reliant  $s_1$  à  $s_3$ . En ajoutant à  $\gamma$  les arêtes reliant  $s$  à  $s_1$  et  $s_3$ , on obtient un chemin fermé simple. Par le théorème de Jordan, on sait qu'il sépare deux composantes connexes du plan. L'une de ces deux composantes contient le sommet  $s_2$  tandis que l'autre contient le sommet  $s_4$ . Il s'ensuit que les sommets  $s_2$  et  $s_4$  ne peuvent pas être dans la même composante connexe du sous-graphe de  $G$  induit par  $S_2 \cup S_4$ . On est ainsi ramené au cas précédent.

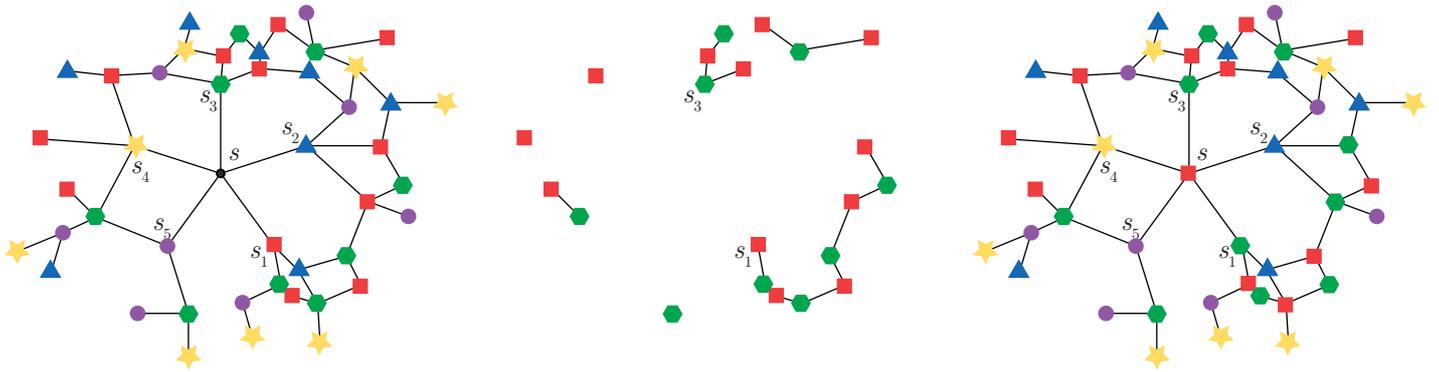


FIG. 5 – (a) 5-coloriage de  $G \setminus s$  — (b) sous-graphe  $\tilde{G}$  — (c) 5-coloriage de  $G$

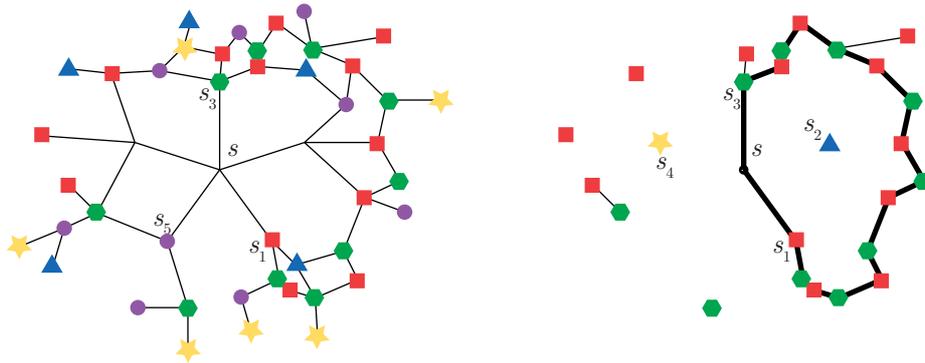


FIG. 6 – (a) 5-coloriage de  $G \setminus s$  — (b) sous-graphe  $\tilde{G}$  et courbe de Jordan séparant  $s_2$  et  $s_4$

### 3 Graphe de Delaunay

#### 3.1 Définition

On considère un ensemble de points du plan. On appelle *graphe de Delaunay* de  $S$  le graphe  $G_{\text{Del}}(S)$  dont l'ensemble des sommets est  $S$  et l'ensemble des arêtes est l'ensemble des paires  $\{p, q\}$  de points telles qu'il existe un disque circonscrit au segment  $[pq]$  dont l'intersection avec  $S$  est réduite à  $\{p, q\}$ .

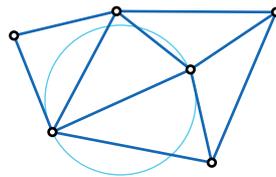


FIG. 7 – Un exemple de graphe de Delaunay

Dans la suite, on montre que le graphe de Delaunay d'un ensemble de points du plan est planaire. Pour cela, on montre d'abord que les problèmes concernant des disques dans le plan peuvent se voir comme des problèmes linéaires dans l'espace et en particulier que le graphe de Delaunay s'obtient par projection verticale du squelette d'un certain polytope de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.2 L'espace des cercles

Soient  $P \in \mathbb{R}^2$  et  $R \in \mathbb{R}^+$ . On appelle *puissance* du cercle de centre  $P$  et de rayon  $R$  l'application  $\Sigma_{P,R}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un point  $M$  associe  $\Sigma_{P,R}(M) = MP^2 - R^2$ . La puissance d'un cercle est clairement nulle sur ce cercle, positive à l'extérieur et négative à l'intérieur. Elle atteint son minimum au centre du cercle. Le centre et le rayon du cercle sont donc déterminés par la puissance du cercle. Dans la suite, on confond un cercle et sa puissance.

Au cercle  $\Sigma_{P,R}$  de centre  $P$  et de rayon  $R$ , on fait correspondre le point  $\Psi(\Sigma_{P,R}) = (P, OP^2 - R^2) \in \mathbb{R}^3$ . Le paraboloïde  $\mathbb{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z = x^2 + y^2$  représente les cercles de rayon nul. Tous les points de  $\mathbb{R}^3$  situés au-dessous

de  $\mathbb{P}$  correspondent aux cercles réels du plan tandis que les points de  $\mathbb{R}^3$  au-dessus de  $\mathbb{P}$  sont des cercles imaginaires.

Nous allons voir dans ce qui suit que les problèmes relatifs aux cercles du plan peuvent se voir comme des problèmes linéaires dans l'espace. On a ainsi linéarisé ces problèmes en augmentant la dimension de l'espace. Pour illustrer ceci, on commence par étudier les faisceaux de cercles du plan, puis on applique cette linéarisation au graphe de Delaunay d'un ensemble de points.

### 3.3 Faisceaux de cercles

Un *faisceau de cercles* est l'ensemble  $\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$  des cercles combinaisons linéaires affines de deux cercles donnés  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  :

$$\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2} = \{\lambda\Sigma_1 + (1 - \lambda)\Sigma_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

(où  $\lambda\Sigma_1 + (1 - \lambda)\Sigma_2$  désigne le cercle de puissance  $M \mapsto \lambda\Sigma_1(M) + (1 - \lambda)\Sigma_2(M)$ ).

On vérifie que le faisceau de cercles  $\mathcal{F}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$  est envoyé par  $\Psi$  sur une droite passant par les points de  $\Psi(\Sigma_1)$  et  $\Psi(\Sigma_2)$ . Les faisceaux de cercles peuvent donc se classer suivant le nombre d'intersections de leur image par  $\Psi$  avec le parabolôïde  $\mathbb{P}$ . On a ainsi les quatre situations suivantes (fig. 8) :

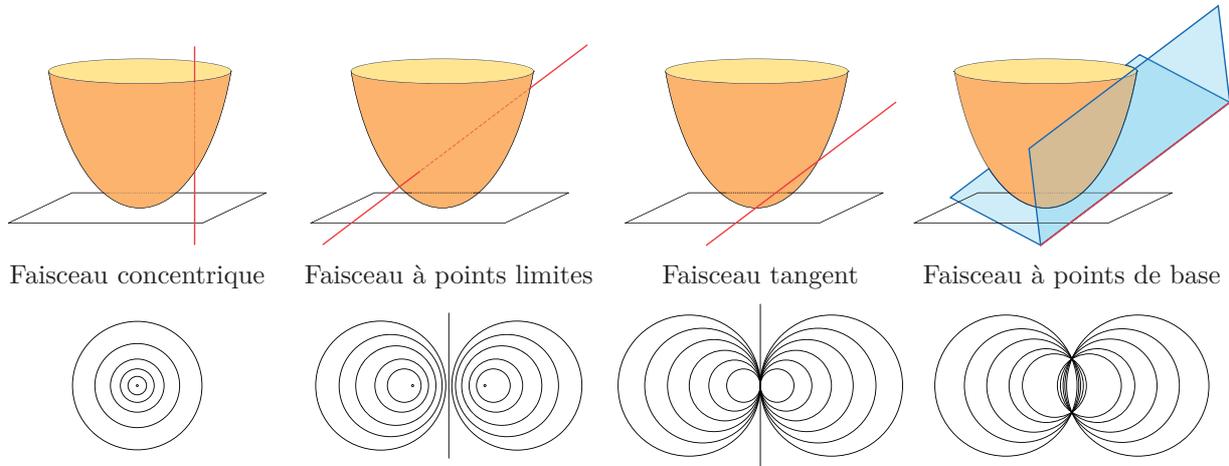


FIG. 8 – Les quatre types de faisceaux de cercles

1. Si la droite  $\Psi(\mathcal{F})$  rencontre  $\mathbb{P}$  en deux points,  $\mathcal{F}$  contient deux cercles de rayon nul que l'on appelle *points limites* du faisceau  $\mathcal{F}$ .
2. Si la droite  $\Psi(\mathcal{F})$  rencontre  $\mathbb{P}$  transversalement en un point, elle est nécessairement verticale (puisque le parabolôïde est dirigé par la verticale).  $\mathcal{F}$  est donc un faisceau de *cercles concentriques*.
3. Si la droite  $\Psi(\mathcal{F})$  ne rencontre pas  $\mathbb{P}$ , il existe deux plans tangents au parabolôïde  $\mathbb{P}$  qui contiennent  $\Psi(\mathcal{F})$ . Les points de contact de ces deux plan avec le parabolôïde  $\mathbb{P}$  sont les images par  $\Psi$  de deux points qui appartiennent à tous les cercles du faisceau et qui sont appelés *base* du faisceau. On parle de *faisceau à points de base*.
4. Si la droite  $\Psi(\mathcal{F})$  est tangente à  $\mathbb{P}$ , on se trouve dans la situation d'un faisceau à points limites dont les deux points limites sont confondus, ou dans celle d'un faisceau à points de base dont les points de base sont confondus. On parle de *faisceau tangent*.

### 3.4 Planarité du graphe de Delaunay

On plonge l'ensemble  $S$  dans le plan horizontal d'équation  $z = 0$  de  $\mathbb{R}^3$  et on note  $\tilde{S} = \{(P, OP^2) \mid P \in S\}$  l'ensemble des relevés des points de  $S$  sur  $\mathbb{P}$ .

Soit  $\{p, q\} \subset S$ . Supposons qu'il existe un plan  $H$  de  $\mathbb{R}^3$  qui contienne les relevés de  $p$  et  $q$  et tel que tous les points de  $\tilde{S}$  soient situés au-dessus de  $H$ , ou autrement dit tel que  $H$  soit un plan d'appui de l'enveloppe convexe inférieure de  $\tilde{S}$ , alors le disque obtenu par projection verticale de l'intersection de  $\mathbb{P}$  et du demi-espace inférieur délimité par  $H$  ne contient aucun point de  $S$  (exceptés  $p$  et  $q$ ). Réciproquement, si  $[pq]$  admet un disque circonscrit ne contenant aucun point de  $S$  (hormis  $p$  et  $q$ ), ce disque est la projection de l'intersection de  $\mathbb{P}$  par un demi-espace inférieur. Le plan délimitant ce demi-espace est alors un plan d'appui de l'enveloppe convexe inférieure de  $\tilde{S}$ . On en déduit le théorème suivant (fig. 9) :

**Théorème 6.** *Le graphe de Delaunay d'un ensemble  $S$  de points du plan est obtenu par projection verticale du squelette de l'enveloppe convexe inférieure des points de  $\hat{S}$ .*

*En particulier, le graphe de Delaunay d'un ensemble de points du plan est planaire.*

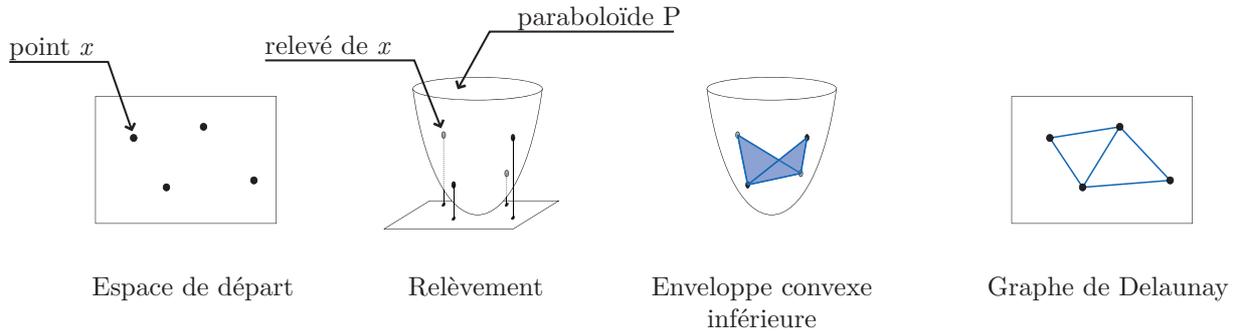


FIG. 9 – Graphe de delaunay par projection verticale

## 4 Solution du problème initial

Nous avons maintenant introduits tous les outils nécessaires pour prouver le théorème 1, que l'on rappelle ici :

**Théorème 1.** *Tout ensemble  $S$  de  $n$  points du plan admet un coloriage sans conflit utilisant  $O(\ln n)$  couleurs. Cette borne est optimale.*

Considérons un ensemble  $S$  de  $n$  points du plan et son graphe de Delaunay  $G_{\text{Del}}(S)$ . Ce graphe étant planaire, il est 5-coloriable, donc il existe une partition  $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_5$  qui sépare les extrémités de toutes les arêtes de  $G_{\text{Del}}(S)$ . L'une au moins des cinq parties  $S_1, \dots, S_5$  est de cardinal supérieur ou égal à  $\frac{n}{5}$  ; on la note  $I_1$  et on colorie ses points avec la couleur 1. On répète le procédé avec l'ensemble de points  $S \setminus I_1$ , et on obtient un ensemble  $I_2$  de points de couleur 2, etc.

À chaque étape, on supprime au moins un cinquième des points, ce qui garantit une terminaison en  $O(\ln n)$  étapes. On a ainsi colorié notre ensemble de points avec  $O(\ln n)$  couleurs.

Il reste à vérifier que ce coloriage est sans conflit. Soit  $D$  un disque quelconque du plan qui rencontre  $S$ . Soit  $P$  un point de  $S$  donc la couleur  $j$  est la plus grande des couleurs de  $D \cap S$ . On va montrer que la couleur  $j$  apparaît une seule fois dans  $D$ , et donc que le coloriage est bien sans conflit. Supposons que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que  $D$  contient au moins deux points de couleur  $j$  : en diminuant continuellement le rayon de  $D$ , on obtient un disque  $D'$  qui contient exactement 2 points coloriés avec  $j$ . Mais ce disque ne contient pas d'autre point de  $S \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{j-1})$  puisque  $j$  est la couleur la plus grande dans  $D$ , donc dans  $D'$ . Le disque  $D'$  est donc un disque de Delaunay pour les deux points de couleur  $j$  qu'il contient. Par conséquent, ces deux points sont reliés par une arête dans le graphe de Delaunay et ne peuvent pas être coloriés de la même couleur. On obtient une contradiction.

## 5 Problème dual

On considère maintenant un ensemble  $R$  de disques du plan. On appelle  $k$ -coloriage sans conflit de  $R$  toute application de  $R$  dans  $\{1, \dots, k\}$  telle que pour tout point  $P$  du plan qui est couvert par au moins un disque de  $R$ , il existe une couleur  $c \in \{1, \dots, k\}$  telle que  $P$  soit couvert par un unique disque de couleur  $c$ . On appelle *nombre critique* de  $R$  le nombre minimal  $\gamma(R)$  de couleurs nécessaires pour effectuer un coloriage sans conflit de  $R$ .

On a un théorème similaire au théorème 1 pour ce problème dual :

**Théorème 7.** *Tout ensemble  $R$  de  $n$  disques du plan admet un coloriage sans conflit utilisant  $O(\ln n)$  couleurs. Cette borne est optimale.*

Pour prouver ce résultat, on utilise les notions introduites dans les parties 2 et 3.

On commence par étudier un problème similaire pour les demi-espaces dans  $\mathbb{R}^3$  : on dit qu'un coloriage d'un ensemble  $T$  de points de  $\mathbb{R}^3$  est sans conflit relativement aux demi-espaces lorsque pour tout demi-espace  $E$  de  $\mathbb{R}^3$  qui contient au moins un point de  $T$  il existe une couleur présente dans  $E$  une et une seule fois. Ici encore, on a un théorème similaire au théorème 1 :

**Théorème 8.** *Tout ensemble  $T$  de  $n$  points de  $\mathbb{R}^3$  admet un coloriage sans conflit utilisant  $O(\ln n)$  couleurs.*

La preuve utilise essentiellement les mêmes idées que précédemment : soit  $T$  un ensemble de  $n$  points de  $\mathbb{R}^3$  et  $G$  le graphe dont les sommets sont les points de  $S$  et les arêtes sont les arêtes de l'enveloppe convexe de  $S$ . Ce graphe est planaire : c'est le squelette d'un polyèdre de  $\mathbb{R}^3$ , donc la projection stéréographique en fournit un plongement dans le plan. De même que dans la preuve du théorème 1, on colorie les points de  $S$  en retirant à chaque étape au moins un cinquième de ces points correspondant à une couleur dans un coloriage du squelette de l'enveloppe convexe des points qui restent. On utilisera bien encore une fois  $O(\ln n)$  couleurs. De plus, étant donné un demi-espace  $E$  rencontrant  $T$ , la couleur  $j$  maximale dans  $E$  n'apparaît qu'une seule fois dans  $E$ . En effet, dans le cas contraire, une translation de  $E$  permet de trouver un demi-espace contenant exactement deux points de couleur  $j$ . On obtient une arête de l'enveloppe convexe des points de la couleur supérieure ou égale à  $j$ , dont les deux sommets ne peuvent pas être de la même couleur. D'où une absurdité.

Grâce à ce résultat, on peut résoudre notre problème dual en augmentant la dimension de l'espace pour linéariser le problème de disques en un problème de demi-espaces. Plus précisément, on associe à chaque point  $(a, b)$  du plan le demi-espace  $\Phi(a, b)$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z \leq -2ax - 2by + a^2 + b^2$  et à chaque disque  $\Sigma_{(p,q),r}$  de centre  $(p, q)$  et de rayon  $r$  le point  $\Psi(\Sigma_{(p,q),r}) = (p, q, p^2 + q^2 - r^2)$ . Un point  $(a, b)$  appartient au disque  $\Sigma_{(p,q),r}$  si et seulement si le point  $\Psi(\Sigma_{(p,q),r})$  est situé dans le demi-espace  $\Phi(a, b)$ , ce qui permet de conclure.

## 6 Questions et remarques

### 6.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. sur la combinatoire des graphes :
  - (a) montrer la relation d'Euler.
  - (b) montrer qu'aucune face qu'un graphe bipartite planaire n'est un triangle. En déduire que  $K_{3,3}$  n'est pas planaire.
  - (c) montrer que tout graphe fini se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ .
  - (d) donner les détails de la proposition 2.
  - (e) écrire une procédure Maple calculant un 6-coloriage d'un graphe. On utilisera la matrice d'adjacence d'un graphe (ie. la matrice carrée de taille  $\text{card}(S)$  dont le coefficient  $(i, j)$  est un 1 si  $i$  et  $j$  sont adjacents, et un 0 sinon) pour coder les graphes.
  - (f) écrire une procédure Maple calculant la composante connexe d'un sommet dans un graphe.
  - (g) écrire une procédure Maple calculant un 5-coloriage d'un graphe. Dans la matrice d'adjacence, on remplacera les 1 dans la ligne  $i$  par la place des sommets adjacents à  $i$  triés dans l'ordre trigonométrique).
  - (h) quel est le nombre chromatique d'un cycle, d'une chaîne, d'un réseau carré/exagonal,...
2. sur l'espace des cercles :
  - (a) étant données deux cercles, déterminer l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à ces deux cercles. On pourra donner des exemples dans les cas où
    - i. les deux cercles s'intersectent,
    - ii. l'un des cercles englobe l'autre,
    - iii. les deux cercles sont séparés.
  - (b) utiliser l'espace des cercles pour montrer que l'union (ou l'intersection) de disques est la projection verticale de l'intersection du parabolôïde  $\mathbb{P}$  avec un certain polytope de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (c) en généralisant l'espace des cercles en dimension supérieure (ie. en définissant l'espace des sphères, le parabolôïde correspondant,...), étudier les faisceaux de sphères de  $\mathbb{R}^d$  et la linéarisation d'un graphe de Delaunay de  $\mathbb{R}^d$ .
3. sur le problème de coloriage :
  - (a) en considérant une configuration de  $n$  points alignés, montrer que la borne en  $O(\ln n)$  est optimale.
  - (b) donner une interprétation au problème dual pour les problèmes de téléphonie mobile.
  - (c) donner les détails de la preuve du théorème 5.

## 6.2 Remarques et références

Le problème central de ce texte et sa solution sont issus de l'article *Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks* de G. EVEN, Z. LOTKER, D. RON & S. SMORODINSKY paru dans SIAM J. Comput. 33 (p. 94-136) en 2003.

La partie 2 est présente dans toute référence de base de théorie des graphes, par exemple le livre *Introduction to graph theory* de D.B. WEST. La démonstration partielle du théorème de Jordan présentée en 2.2 est tirée du livre de *Calcul différentiel* de S. GONNORD & N. TOSEL (la démonstration y est bien sûr complète). Le livre *Géométrie algorithmique* de M. YVINEC & J.D. BOISSONNAT est une bonne référence pour la partie géométrique sur le graphe de Delaunay et les faisceaux de cercles.

Les objets et les méthodes utilisées dans ce texte en font un très bel exemple pour des leçons d'agrégation telles que :

– MÉTHODES COMBINATOIRES, PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

La théorie des graphes, en particulier de la planarité et de la colorabilité des graphes est un sujet combinatoire intarissable. Le livre de D.B. WEST fournit de nombreux sujets originaux et très accessibles.

– PROBLÈMES D'ANGLES ET DE DISTANCE EN DIMENSION 2 ET 3

Ce problème de cercles est un problèmes de distances en dimension 2. De plus, deux outils essentiels sont présentés ici : l'espace des cercles (et son application à la classification des faisceaux de cercles, par exemple) et le graphe de Delaunay d'un ensemble de points. On pourra par ailleurs consulter le livre de M. YVINEC & J.D. BOISSONNAT pour faire le lien entre graphe de Delaunay et diagramme de Voronoi d'un ensemble de points. Ces deux objets présentent de réelles spécificités en dimension 2 et 3 d'un point de vue algorithmique (on a vu un algorithme de balayage spécifique à la dimension 2), théorique (en dimension 2, on peut montrer que la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points est la triangulation qui optimise le grain et la finesse, propriétés sur les angles et les longueurs des arêtes de la triangulation), et pratique (de nombreuses applications des diagrammes de Voronoi concernent les dimensions 2 et 3 : on pense par exemple à la reconstruction de courbes et de surfaces à partir d'un échantillonnage,...).

– ÉTUDE DE COURBES

Le théorème des 5 couleurs me semble être une application originale du théorème de Jordan.