Combinatoire des polytopes
Examen du 21/02/2019

Les notes de cours, les TDs (et leurs corrections), et vos notes personnelles sont autorisées. Les appareils électroniques sont interdits (en particulier les téléphones portables). Il est demandé de répondre sur des feuilles simples.

Les 5 exercices de cet énoncé sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Attention à bien noter les numéros d'exercice et de questions devant vos réponses.

La précision des réponses, la qualité de la rédaction, et les efforts de présentation seront pris en compte dans la notation.

Exercice 1 (Triangles et sommets trivalents)**.**

(1) Montrer que pour tout polytope de dimension 3 avec v_3 sommets de degré 3 et f_3 facettes de degré 3 (*i.e.* triangles), on a l'inégalité $v_3 + f_3 \geq 8$.

(2) Donner des exemples de polytopes de dimension 3 avec $(v_3, f_3) = (8,0), (6,2), (4,4), (2,6)$ et $(0,8)$.

(3) Peut-on atteindre les autres couples (v_3, f_3) avec $v_3 + f_3 = 8$?

Exercice 2 (Formule de Gram pour les angles)**.** Soit P un polytope de dimension d, soit F une face de P, et soit B_F une boule suffisamment petite centrée sur un point de l'intérieur relatif de F. L'*angle solide* de P à F est la fraction α_F de B_F qui appartient à P. On note α_i la somme des angles solides de P à toutes ses faces de dimension i. Nous voulons démontrer l'analogue suivante de la formule d'Euler pour les angles solides :

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \alpha_i = 0.$$

(1) Montrer que cette formule est équivalente à

$$\sum_{i=0}^{d-2} (-1)^i \alpha_i = (-1)^d \big(f_{d-1}/2 - 1\big)$$

où f_{d-1} est le nombre de faces de P de dimension $d-1$.

(2) Montrer le résultat pour un polytope P de dimension 2.

(3) Considérons maintenant un polytope P de dimension 3. Soit $\overline{u}$ une direction aléatoire choisie dans la sphère de dimension 2, et soit $P_{\overline{u}}$ le polygone obtenu en projetant le polytope P orthogonalement à la direction $\overline{u}$.

- Quelle est la probabilité qu'un sommet v de P ne soit pas projeté sur un sommet du polygone $P_{\overline{u}}$ en fonction de l'angle solide de P à v ?
- En déduire l'espérance du nombre de sommets du polygone projeté $P_{\overline{u}}$.
- Quelle est l'espérance du nombre d'arêtes du polygone projeté $P_{\overline{u}}$?
- Utiliser ces espérances pour montrer que $\alpha_0 - \alpha_1 = -f_2/2 + 1$.

(4) Étendre cette méthode à toute dimension $d \geq 3$.

Exercice 3 (Un polytope de dimension 4 dont une 2-face n'est pas prescriptible)**.**

(1) Considérons un polytope P dont le graphe d'incidences sommet-facette est $\mathcal{I}$. C'est-à-dire, $\mathcal{I}$ est le graphe biparti dont les noeuds sont les sommets et les facettes de P, et avec un arc reliant un sommet v à une facette F si et seulement si v appartient à F.

- Montrer que les faces de P sont en bijection avec les sous-graphes bipartis complets maximaux de $\mathcal{I}$, *i.e.* avec les paires $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ maximales pour l'inclusion où $\mathcal{V}$ est un sous-ensemble de sommets de P et $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de facettes de P tels que $v \in F$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et $F \in \mathcal{F}$.
- En déduire que le treillis des faces de P est complètement déterminé par les incidences sommet-facette de P.

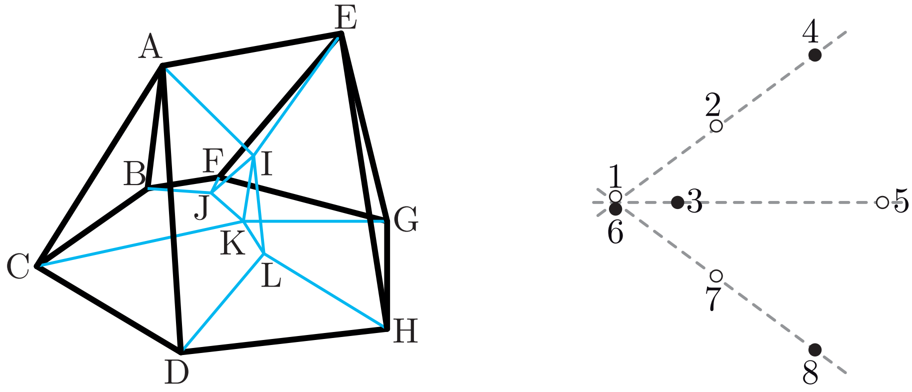

Figure 1: Un diagramme de Schlegel (gauche) et un diagramme de Gale (droite).

(2) Considérons le diagramme de Schlegel du polytope 4-dimensionnel Q à gauche de la Figure 1.

- Quel est le nombre de sommets et de facettes de Q ?
- Lister toutes les facettes de Q (pour chaque facette F, lister juste les sommets de F en ordre alphabétique). Étiqueter ces facettes de 1 à 8 en l'ordre lexicographique.

(3) Considerons le diagramme de Gale affine planaire G d'un polytope R à droite de la Figure 1.

- Quelle est la dimension et le nombre de sommets de R ?
- Lister tous les circuits C de G pour lesquels $C_4 \neq 0$ et $C_6 \neq 0$.
- Lister tous les cocircuits X de G pour lesquels $X_1 = 0$.
- Quelles sont les facettes de R ?

(4) Montrer que les treillis de faces des polytopes Q et R sont opposés.

(5) Montrer que le polytope Q a une face de dimension 2 hexagonale dont la géométrie ne peut pas être prescrite, dans le sens qu'il existe des hexagones qui ne peuvent pas apparaître comme une 2-face d'aucun polytope combinatoirement équivalent à Q. Pour ceci, montrer que

- tout hexagone convexe avec des sommets qui alternent noir et blanc est le diagramme de Gale affine d'un polytope,
- pour tout polytope combinatoirement équivalent à R, les trois droites qui passent par les sommets 2 et 4, par les sommets 3 et 5, et par les sommets 7 et 8, du diagramme de Gale G doivent être concourantes,
- la figure de sommet itérée $(R/v_1)/v_2$ ne peut pas être prescrite pour R,
- et conclure par polarité.

(6) Rappelons du TD F qu'un polytope est neighborly si et seulement si son diagramme de Gale est équilibré, c'est-à-dire qu'il y a au moins $\left\lfloor \frac{n-r+1}{2} \right\rfloor$ vecteurs de chaque côté de tout hyperplan engendré par $r-1$ vecteurs (où r est la dimension de G). Montrer que tout polygone convexe avec des sommets qui alternent noir et blanc est le diagramme de Gale affine d'un polytope neighborly. Quelle sont la dimension, le nombre de sommets et le nombre de facettes de ce polytope ?

Exercice 4 (Espace de réalisation d'un polytope)**.** Considérons d points $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_d$ affinement independants dans $\mathbb{R}^d$, et l'hyperplan H qu'ils définissent.

(1) Étant donné un point $\overline{p} \in \mathbb{R}^d$, comment peut-on tester (algébriquement) si $\overline{p} \in H$, et si $\overline{p} \notin H$, dans lequel des deux demi-espaces ouverts définis par H se trouve $\overline{p}$?

(2) Étant donnés $\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{R}^d$, comment peut-on tester (algébriquement) si $\overline{p}$ et $\overline{q}$ se trouvent dans le même demi-espace ouvert défini par H ?

(3) Montrer que l'espace de réalisation d'un polytope est un ensemble semi-algébrique primaire basique.

(4) (Si cela n'a pas déjà été fait à la question précédente.) Monter que l'espace de réalisation d'un polytope (simplicial) de dimension d est un ensemble semi-algébrique primaire basique défini par des polynômes de degré au plus d.

(On pourra se limiter au cas des polytope simpliciaux.)

Exercice 5 (Dessus-dessous et espace de réalisation de polytopes empilés)**.**

(1) Soit F une face d'un polytope $P \subseteq \mathbb{R}^d$ de dimension d. Considérons l'ensemble $\mathcal{N}_F$ des vecteurs $(\overline{a}, b) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $\langle \overline{a} \mid \overline{x} \rangle = b$ pour tout $\overline{x} \in F$ et $\langle \overline{a} \mid \overline{x} \rangle \leq b$ pour tout $\overline{x} \in P$. Montrer que $\mathcal{N}_F$ est un cône polyèdral. Quels sont les rayons qui l'engendrent ?

(2) Soit P un polytope de dimension d, soit $\overline{q} \in \mathbb{R}^d \setminus P$ et soit $Q := \operatorname{conv}(P \cup \{\overline{q}\})$. Montrer que toute face G de Q est soit une face de P, soit l'enveloppe convexe de l'union d'une face de P avec $\{\overline{q}\}$.

(3) Soit P un polytope de dimension d, soit $\overline{q} \in \mathbb{R}^d \setminus P$ et soit $Q := \operatorname{conv}(P \cup \{\overline{q}\})$. Soit H un hyperplan support tel que $P \subset \overline{H^-}$. On dit que $\overline{q}$ est en-dessous / sur / au-dessus de H si $\overline{q}$ est dans H^- / H / H^+, respectivement. Si F est une facette de P, on dit que $\overline{q}$ est en-dessous / sur / au-dessus de F s'il est en-dessous / sur / au-dessus de son hyperplan support H (orienté de sorte que $P \subset \overline{H^-}$).

Montrer qu'une facette F de P est aussi une facette de Q si et seulement si $\overline{q}$ est en-dessous de F.

(4) Soit P un polytope de dimension d, soit $\overline{q} \in \mathbb{R}^d \setminus P$, soit $Q := \operatorname{conv}(P \cup \{\overline{q}\})$, et soit G une face de P. Montrer que

- G est une face de Q si et seulement s'il existe une facette F de P, avec $G \subseteq F$, telle que $\overline{q}$ est en-dessous de F.
- $\operatorname{conv}(G \cup \{\overline{q}\})$ est une face de Q si et seulement si
  (i) soit $\overline{q} \in \operatorname{aff}(G)$ (ou de manière équivalente, $\overline{q}$ est sur toute facette de P contenant G),
  (ii) soit $\overline{q}$ est en-dessous d'au moins une des facettes de P contenant F et au-dessus d'au moins une des facettes de P contenant F.

(5) Soit G une face de P. Montrer qu'il existe un point $\overline{q}$ au-dessus de toutes les facettes de P contenant G et en-dessous de toutes les facettes de P ne contenant pas G. On dit que le polytope $\operatorname{conv}(P \cup \{\overline{q}\})$ est obtenu à partir de P en *empilant* un sommet sur G.

(6) Soit P un polytope de dimension d dont les sommets sont $V = \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$. Le type combinatoire de $\operatorname{conv}(V \setminus \{\overline{v}_n\})$ est-il toujours déterminé par le type combinatoire de P ?

(7) Un polytope empilé est un polytope obtenu à partir d'un simplexe par des opérations d'empilement itérées sur des facettes arbitraires. Montrer que les espaces de réalisation des polytopes empilés sont triviaux (stablement équivalents à un point).