

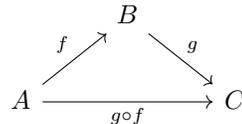
Isomorphismes et spans

September 20, 2021

1 Isomorphismes

Un *isomorphisme* $f : A \rightarrow B$ est un morphisme tel qu'il existe $g : B \rightarrow A$ tel que $g \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ g = \text{id}_B$.

1. Montrer que g tel que $g \circ f = \text{id}$ et $f \circ g = \text{id}$ est unique. On le notera f^{-1} .
2. Montrer que dans la situation



$f \circ g$ est un isomorphisme lorsque f et g sont des isomorphismes.

3. En déduire que g est un isomorphisme lorsque f et $g \circ f$ sont des isomorphismes.
4. En déduire que f est un isomorphisme lorsque g et $g \circ f$ sont des isomorphismes.
5. En déduire l'existence d'une catégorie $\text{Iso } \mathcal{C}$ dont les objets sont les objets de \mathcal{C} et dont les flèches sont les isomorphismes de \mathcal{C} .
6. Décrire $\text{Iso}(\mathbf{Ens})$ et $\text{Iso}(\mathbf{Top})$.

2 Objets terminaux et produits

Un objet A de \mathcal{C} est appelé *terminal* lorsque pour tout objet X , il existe une flèche $X \rightarrow A$ unique.

1. Montrer que si A et B sont des objets terminaux dans \mathcal{C} alors il existe un isomorphisme unique $A \rightarrow B$.
2. Donner des exemples d'objets terminaux dans \mathbf{Ens} , dans \mathbf{Top} , dans \mathbf{Graph} .

Soient A et B deux objets d'une catégorie \mathcal{C} . On définit la catégorie $\text{Span}(A, B)$ dont

- les objets sont les triplets (X, f_X, g_X) constitués d'un objet X de \mathcal{C} des deux flèches $f_X : X \rightarrow A$ et $g_X : X \rightarrow B$,
- les flèches $(X, f_X, g_X) \rightarrow (Y, f_Y, g_Y)$ sont les flèches $h : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} telles que

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f_Y} A &= X \xrightarrow{f_X} A \\ X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g_Y} B &= X \xrightarrow{g_X} B \end{aligned}$$

3. Montrer que $\text{Span}(A, B)$ définit une catégorie.
4. Montrer que la notion de produit cartésien de A et B dans \mathcal{C} coïncide avec la notion d'objet terminal dans $\text{Span}(A, B)$.