Isomorphismes et spans

September 20, 2021

1 Isomorphismes

Un *isomorphisme* $f : A \to B$ est un morphisme tel qu'il existe $g : B \to A$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

1. Montrer que g tel que $g \circ f = \mathrm{id}$ et $f \circ g = \mathrm{id}$ est unique. On le notera f^{-1}.
2. Montrer que dans la situation

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

   $f \circ g$ est un isomorphisme lorsque f et g sont des isomorphismes.
3. En déduire que g est un isomorphisme lorsque f et $g \circ f$ sont des isomorphismes.
4. En déduire que f est un isomorphisme lorsque g et $g \circ f$ sont des isomorphismes.
5. En déduire l'existence d'une catégorie $\mathrm{Iso}\,\mathcal{C}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les flèches sont les isomorphismes de $\mathcal{C}$.
6. Décrire $\mathrm{Iso}(\mathbf{Ens})$ et $\mathrm{Iso}(\mathbf{Top})$.

2 Objets terminaux et produits

Un objet A de $\mathcal{C}$ est appelé *terminal* lorsque pour tout objet X, il existe une flèche $X \to A$ unique.

1. Montrer que si A et B sont des objets terminaux dans $\mathcal{C}$ alors il existe un isomorphisme unique $A \to B$.
2. Donner des exemples d'objets terminaux dans **Ens**, dans **Top**, dans **Graph**.

Soient A et B deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. On définit la catégorie $\mathrm{Span}(A, B)$ dont

— les objets sont les triplets (X, f_X, g_X) constitués d'un objet X de $\mathcal{C}$ des deux flèches $f_X : X \to A$ et $g_X : X \to B$,

— les flèches $(X, f_X, g_X) \to (Y, f_Y, g_Y)$ sont les flèches $h : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ telles que

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f_Y} A \;=\; X \xrightarrow{f_X} A$$
$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g_Y} B \;=\; X \xrightarrow{g_X} B$$

3. Montrer que $\mathrm{Span}(A, B)$ définit une catégorie.
4. Montrer que la notion de produit cartésien de A et B dans $\mathcal{C}$ coïncide avec la notion d'objet terminal dans $\mathrm{Span}(A, B)$.