TD9 – Catégories compactes closes

Samuel Mimram

2 février 2012

1 Catégories monoïdales

On rappelle qu'une *catégorie monoïdale* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et d'un objet $I \in \mathcal{C}$, ainsi que de trois transformations naturelles inversibles de composantes

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C) \qquad \lambda_A : I \otimes A \to A \qquad \rho_A : A \otimes I \to A$$

telles que les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C} \otimes D"] \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B,C,D}"'] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B \otimes C,D}"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

commutent.

Une *catégorie monoïdale tressée* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ est une catégorie monoïdale munie d'une transformation naturelle inversible γ de composantes

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

telle que certains diagrammes commutent. Une *catégorie monoïdale symétrique* est une catégorie monoïdale tressée pour laquelle $\gamma_{B,A} \circ \gamma_{A,B} = \mathrm{id}_{A \otimes B}$ pour tous objets A et B.

1. Expliquer comment munir toute cartésienne $\mathcal{C}$ d'une structure de catégorie monoïdale symétrique.
2. On note **Vect** la catégorie dont les objets sont les K-espaces vectoriels (où K est un corps fixé) et les morphismes sont les applications linéaires et on note **FdVect** la sous-catégorie pleine dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie. Montrez que **Vect** est cartésienne.
3. Étant données une base d'un espace vectoriel A et une base d'une espace vectoriel B, donnez une base de $A \times B$.
4. Montrez que le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ admet un adjoint à gauche $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}$.
5. Étant donnés trois espaces vectoriels A, B et C, on note $\mathrm{Bilin}(A, B; C)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $A \times B$ dans C. Montrez qu'il existe un espace vectoriel, noté $A \otimes B$, tel que pour tous espaces vectoriels A, B et C, on ait une bijection (naturelle)

   $$\mathrm{Bilin}(A, B; C) \qquad \cong \qquad \mathbf{Vect}(A \otimes B; C)$$

   On pourra décrire $A \otimes B$ comme un quotient de l'espace $F(U(A) \times U(B))$.
6. Étant données une base de A et une base de B, décrivez une base de $A \otimes B$.
7. Montrez que l'opération $\otimes$ permet de munir **Vect** (ainsi que **FdVect**) d'une structure de catégorie monoidale symétrique.
8. Une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est close lorsque pour tout objet B, le foncteur $- \otimes B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite $B \multimap - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
9. [Factultatif] Montrez que la catégorie **Vect** est monoïdale close.

2 Catégories compactes closes

Étant donnée une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$, un objet A admet un dual à droite A^* lorsqu'il existe deux morphismes

$$\eta : I \to A \otimes A^* \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : A^* \otimes A \to I$$

tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& I \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes A"] & (A \otimes A^*) \otimes A \arrow[r, "\alpha_{A,A^*,A}"] & A \otimes (A^* \otimes A) \arrow[r, "A\otimes\varepsilon"] & A \otimes I \arrow[dr, "\rho_A"] & \\
A \arrow[ur, "\lambda_A^{-1}"] \arrow[rrrrr, "\mathrm{id}_A"'] & & & & & A
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
& A^* \otimes I \arrow[r, "A^*\otimes\eta"] & A^* \otimes (A \otimes A^*) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*}"] & (A^* \otimes A) \otimes A^* \arrow[r, "\varepsilon\otimes A^*"] & I \otimes A^* \arrow[dr, "\lambda_{A^*}"] & \\
A^* \arrow[ur, "\rho_{A^*}^{-1}"] \arrow[rrrrr, "\mathrm{id}_{A^*}"'] & & & & & A^*
\end{tikzcd}$$

commutent. Une catégorie monoïdale symétrique est *compacte close* lorsque tout objet A admet un dual à droite A^*.

1. Représentez les lois ci-dessus sous forme de diagrammes de corde.
2. Montrez que la catégorie **FdVect** (des espaces vectoriels de dimension finie) est compacte close.
3. Montrez que toute catégorie compacte close est monoïdale close.

3 Catégories cartésiennes

1. Un *monoïde commutatif* (M, μ, η) dans une catégorie symétrique monoïdale est un objet M muni de deux morphismes

   $$\mu : M \otimes M \to M \qquad \text{et} \qquad \eta : I \to M$$

   satisfaisant des lois exprimant l'associativité de la multiplication, le fait que η est une unité pour la multiplication et la commutativité de la multiplication. Rappelez ces lois et donnez-en la représentation par diagrammes de corde.
2. De même, un *comonoïde commutatif* (M, δ, ε) est un objet M muni de deux morphismes

   $$\delta : M \to M \otimes M \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : M \to I$$

   satisfaisant des lois duales. Explicitez ces lois.
3. Montrez qu'une catégorie symétrique monoïdale est cartésienne (avec un choix de produit cartésien comme tenseur) si et seulement si tout objet A peut être muni d'une structure de comonoïde commutatif $(A, \delta_A, \varepsilon_A)$ qui soit naturelle en A, c'est-à-dire que pour tout morphisme $f : A \to B$,

   $$\delta_B \circ f = (f \otimes f) \circ \delta_A \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$$
4. Donnez la représentation par diagrammes de corde des lois ci-dessus.
5. Décrivez $\delta_{A\otimes B}$ en fonction de δ_A, δ_B et $\gamma_{A,B}$.
6. Qu'est-ce qu'un monoïde dans $(\mathbf{Cat}, \times, 1)$? Et un monoïde commutatif ?

4 Interprétation du λ-calcul

Dans le cas où l'on interprète le λ-calcul dans une catégorie cartésienne compacte close $\mathcal{C}$, pourquoi a-t-on pour tout terme $M : \Gamma \times B \to A$,

$$\varepsilon_{A,B} \circ (\phi_{\Gamma,B,A}(M) \times B) \quad = \quad M$$

Généralisez votre preuve au cas où $\mathcal{C}$ n'est que cartésienne close.