TD5 – Réalisabilité

Samuel Mimram

17 novembre 2011

On note Λ l'ensemble des λ-*termes* et Π l'ensemble des *piles* (les suites $t_1 \cdot t_2 \cdots t_n$ de λ-termes). Les *processus* sont les éléments (t, π) de $\Lambda \times \Pi$, souvent notés $t \star \pi$.

1. Rappelez la définition des λ-termes ainsi que les règles de la machine de Krivine (qui opèrent sur des processus).

Supposons fixé un ensemble $\perp\!\!\!\perp$ de processus clos par anti-réduction. Un élément de $\mathcal{P}(\Pi)$ est appelé *valeur de vérité*. Un terme $t \in \Lambda$ *réalise* une valeur de vérité $U \in \Pi$, ce que l'on note $t \Vdash U$ lorsque $\forall \pi \in U, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$.

2. On suppose fixé un ensemble $\mathcal{T}$ de *générateurs* d'arité donnée et on note $\mathcal{T}^*$ les termes générés. On suppose aussi fixé un ensemble $\mathcal{R}$ de propositions d'arités du second et premier ordre données. La syntaxe des formules du second ordre est

$$A \qquad ::= \qquad t \quad | \quad X \quad | \quad R(A_1, \ldots, A_m, t_1, \ldots, t_n) \quad | \quad A \Rightarrow B \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad \forall X.A$$

   où $t \in \mathcal{T}^*$ et $R \in \mathcal{R}$. Rappelez les règles de la logique du second ordre en déduction naturelle.

On note $\mathrm{FV}_1(A)$, resp. $\mathrm{FV}_2(A)$ l'ensemble des variables du premier, resp. second, ordre de A.

$$[\![A]\!] : \mathcal{P}(\Pi)^{\mathrm{FV}_2(A)} \times (\mathcal{T}^*)^{\mathrm{FV}_1(A)} \to \mathcal{P}(\Pi)$$

Si A est une formule telle que $\mathrm{FV}_2(A) = \{X_1, \ldots, X_m\}$ et $\mathrm{FV}_1(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $V_1, \ldots, V_m$ sont des valeurs de vérité et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, on note $[\![A]\!](X_1 = V_1, \ldots, X_m = V_m)[x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n]$ l'image de la fonction. On suppose fixée une interprétation des formules atomiques. L'interprétation $[\![A]\!]$ de A est définie inductivement par

$$[\![A \Rightarrow B]\!] = \{t \cdot \pi \;/\; t \in |A|, \pi \in [\![B]\!]\} \qquad [\![\forall x.A]\!] = \bigcup_{a \in \mathcal{T}^*} [\![A]\!][x = a] \qquad [\![\forall X.A]\!] = \bigcup_{V \in \mathcal{P}(\Pi)} [\![A]\!][X = V] \qquad [\![\bot]\!] = \Pi \qquad [\![\top]\!] = \emptyset$$

où $|A| = \{t \in \Lambda \;/\; \forall \pi \in [\![A]\!], t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$ dénote l'ensemble des *réalisateurs* de la formule A. On note $t \Vdash A$ lorsque $t \in |A|$ et on dit que t *réalise* A.

3. Montrez que si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$ alors $tu \Vdash B$.
4. Montrez que si pour tout $u \in \Lambda$, $u \Vdash A$ implique $tu \Vdash B$, alors $\lambda x.tx \Vdash A \Rightarrow B$.
5. Montrez que $[\![A[B/X]]\!] = [\![A]\!][X = B]$, etc.

On admet le lemme d'adéquation : si $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash t : A$ est dérivable et $\forall i, t_i \Vdash A_i$ alors $t[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n] \Vdash A$.

6. Montrez que si $\theta : \forall X.(X \Rightarrow X)$ alors pour tous $(t, \pi) \in \Lambda \times \Pi$, $\theta \star t \cdot \pi \succ t \star \pi$ (on utilisera la clôture par anti-réduction de $\{t \star \pi\}$ pour $\perp\!\!\!\perp$).
7. On note $\mathrm{Bool}(x) = \forall X.X(0) \Rightarrow X(1) \Rightarrow X(x)$ (qui est équivalente à $x = 0 \vee x = 1$). Montrez que si $\vdash \theta : \mathrm{Bool}(0)$ alors $\theta \star t \cdot u \cdot \pi \succ t \star \pi$. Procédez de même pour $\vdash \theta : \mathrm{Bool}(1)$.
8. On note $\exists x.A$ la formule $\forall X.(\forall x.(A \Rightarrow X)) \Rightarrow X$. Quelle est son interprétation ? Quelle est l'interprétation de $\exists x.\,\mathrm{Bool}(x)$ si on suppose que $\mathcal{T}^* = \{0, 1\}$?
9. Définissez de même les formules $A \wedge B$ et $A \vee B$. Quelle est leur interprétation ?
10. Montrez le lemme d'adéquation.