TD2 – Monades

Samuel Mimram

13 octobre 2011

1 Monade d'exception

On définit une *monade* comme un endofoncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ muni de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$ telles que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{tikzcd} T \circ T \circ T \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\ T \circ T \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

1. Considérons le foncteur $T : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$ qui a tout ensemble A associe l'ensemble $A \uplus \{*\}$ (i.e. ajoute un *nouvel* élément à A). Munissez T d'une structure de monade.
2. Soit $f : A \to B$ une fonction en OCaml pouvant lever une unique exception e (ici A et B sont des types quelconques) et $g : B \to C$ une fonction pouvant lever une unique exception e'. Construisez une fonction correspondant à la composée de f et g pouvant lever une unique exception e''.
3. On note $\mathbf{Ens}_T$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathbf{Ens}$ et les morphismes $f : A \to B$ sont les morphismes $f : A \to TB$ de $\mathbf{Ens}$, la composition de deux morphismes $f : A \to TB$ et $g : B \to TC$ étant définie par $g \circ f = \mu_C \circ Tg \circ f$ et les identités par $\mathrm{id}_A = \eta_A$. Vérifiez que les axiomes de catégorie sont satisfaits.
4. Donnez une description explicite directe de la catégorie $\mathbf{Ens}_T$.

2 Monades et catégorie simpliciale

2.1 Catégories monoïdales

Une *catégorie monoïdale stricte* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et d'un objet $I \in \mathcal{C}$ telle que pour tous objets $A, B, C \in \mathcal{C}$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \qquad\qquad I \otimes A = A = A \otimes I$$

1. Expliquez en quoi toute 2-catégorie avec une unique 0-cellule peut être vue comme une catégorie monoïdale et réciproquement.
2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cartésienne dont les isomorphismes canoniques ($1 \times A \cong A$, etc.) sont supposés êtres des égalités. Munissez $\mathcal{C}$ d'une structure de catégorie monoïdale.

On admettra dans la suite que l'on peut toujours supposer sans perte de généralité que les isomorphismes canoniques d'une catégorie cartésienne sont des égalités.

2.2 Monoïdes

On rappelle qu'un *monoïde* $(M, \cdot, 1)$ est un ensemble M muni d'une *multiplication* $\cdot : M \times M \to M$ et d'une *unité* $1 \in M$ vérifiant pour tous $x, y, z \in M$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad\qquad 1 \cdot x = x = x \cdot 1$$

1. Un monoïde $(M, \cdot, 1)$ peut être vu comme un triplet (M, μ, η) où M est un objet de $\mathbf{Ens}$ et $\mu : M \times M \to M$ et $\eta : 1 \to M$ sont deux morphismes dans $\mathbf{Ens}$. Reformulez les trois égalités ci-dessus par des diagrammes commutatifs.

2. Généralisez la notion de monoïde à une catégorie monoïdale quelconque.
3. Généralisez la notion de morphisme de monoïde à une catégorie monoïdale quelconque.
4. Qu'est-ce qu'un monoïde dans $(\mathbf{Cat}, \times, 1)$?
5. Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, on note $\mathbf{End}_{\mathcal{C}}$ la 2-catégorie dont l'unique 0-cellule est $\mathcal{C}$, les 1-cellules sont les endofoncteurs $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et les 2-cellules sont les transformations naturelles. Cette 2-catégorie a une unique 0-cellule et peut donc être vue comme une catégorie monoïdale. Qu'est-ce qu'un monoïde dans cette catégorie monoïdale ?

2.3 Présentations de monoïdes

Une présentation (G, R) d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ est la donnée d'un ensemble G de *générateurs* et d'un ensemble $R \subseteq G^* \times G^*$ de *relations* tels que le monoïde M soit isomorphe au monoïde libre G^* engendré par G quotienté par la plus petite congruence contenant les relations.

1. Proposez une présentation pour les monoïdes additifs suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}/2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
2. Afin de prouver que ces présentations sont correctes (qu'on a bien l'isomorphisme requis) orientez les relations de chacune de ces présentations afin d'obtenir un système normalisant (terminant et confluent) puis montrez que les éléments du monoïde sont en bijection avec les formes normales.

2.4 Une présentation monoïdale de la catégorie simpliciale

L'objectif de cette partie est de construire une “présentation” de la *catégorie simpliciale* Δ (en généralisant la notion précédente de présentation d'un monoïde). Les objets de cette catégorie sont les ensembles finis $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ à n éléments et les morphismes sont les fonctions croissantes.

1. Équipez cette catégorie d'une structure de catégorie monoïdale.
2. Montrez que l'objet $[1]$ est terminal dans cette catégorie. On note $\mu : [2] \to [1]$ et $\eta : [0] \to [1]$ les morphismes terminaux de $[2]$ et $[0]$ respectivement. Montrez que ces morphismes munissent l'objet $[1]$ d'une structure de monoïde.
3. On note $\mathcal{M}$ la plus petite catégorie monoïdale contenant un objet monoïde (on admet qu'une telle catégorie existe). En utilisant la question précédente définissez un foncteur monoïdal $F : \mathcal{M} \to \Delta$.
4. Dessinez les lois que doivent satisfaire un monoïde sous forme de diagrammes de corde.
5. Orientez les lois de monoïde en un système de réécriture localement confluent (on pourra calculer les paires critiques sous forme de diagrammes de corde).
6. On admet que ce système de réécriture est terminant. Décrivez les formes normales sous forme de diagrammes de corde.
7. Déduisez-en que le foncteur F défini ci-dessus est un isomorphisme.
8. Déduisez-en que les monoïdes dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ sont en bijection avec les foncteurs monoïdaux $F : \Delta \to \mathcal{C}$.
9. [Optionnel] En utilisant la même méthodologie, proposez une présentation de la catégorie des entiers naturels et bijections. Combien le système de réécriture associé a-t-il de paires critiques ?
10. [Optionnel] Proposez une présentation de la catégorie des entiers naturels et fonctions (non nécessairement croissantes).
11. [Optionnel] Proposez une présentation de la catégorie des entiers naturels et relations.