TD8 – Catégories monoïdales tracées

Samuel Mimram

26 novembre 2009

1 Catégories monoïdales tracées

1. Donnez une représentation graphique des axiomes des catégories monoïdales tracées.
2. Montrez que toute catégorie compacte close est tracée.
3. Construisez le monoïde additif $\mathbb{Z}$ à partir du monoïde additif $\mathbb{N}$ comme un quotient de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (un couple (m,n) doit être pensé comme l'entier relatif $m-n$).
4. Étant donnée une catégorie symétrique monoïdale tracée $\mathcal{C}$ on définit une catégorie $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$ dont les objets sont des paires (A^+,A^-) d'objets de $\mathcal{C}$ et les morphismes $f:(A^+,A^-)\to(B^+,B^-)$ sont les morphismes $f:A^+\otimes B^-\to A^-\otimes B^+$ de $\mathcal{C}$. En utilisant la trace, définissez une composition dans $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$ ainsi qu'une structure de catégorie monoïdale symétrique.
5. Montrez que la catégorie $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$ est compacte close.

On rappelle les axiomes définissant une trace :

We begin by recalling the basic notions. let $(\mathcal{C},\otimes,\mathrm{I},\tau)$ be a symmetric monoidal category. Here $\tau_{A,B}:A\otimes B\xrightarrow{\cong}B\otimes A$ is the symmetry or twist natural isomorphism. A *trace* on $\mathcal{C}$ is a family of functions

$$\mathsf{Tr}^U_{A,B}:\mathcal{C}(A\otimes U,B\otimes U)\longrightarrow\mathcal{C}(A,B)$$

for objects A, B, U of $\mathcal{C}$, satisfying the following axioms:

– **Input Naturality**:

$$\mathsf{Tr}^U_{A,B}(f)\circ g=\mathsf{Tr}^U_{A',B}(f\circ(g\otimes 1_U))$$

where $f:A\otimes U\to B\otimes U$, $g:A'\to A$,

– **Output Naturality**:

$$g\circ\mathsf{Tr}^U_{A,B}(f)=\mathsf{Tr}^U_{A,B'}((g\otimes 1_U)\circ f)$$

where $f:A\otimes U\to B\otimes U$, $g:B\to B'$,

– **Feedback Dinaturality**:

$$\mathsf{Tr}^U_{A,B}((1_B\otimes g)\circ f)=\mathsf{Tr}^{U'}_{A,B}(f\circ(1_A\otimes g))$$

where $f:A\otimes U\to B\otimes U'$, $g:U'\to U$,

– **Vanishing (I,II)**:

$$\mathsf{Tr}^I_{A,B}(f)=f\qquad\text{and}\qquad\mathsf{Tr}^{U\otimes V}_{A,B}(g)=\mathsf{Tr}^U_{A,B}(\mathsf{Tr}^V_{A\otimes U,B\otimes U}(g))$$

where $f:A\otimes I\to B\otimes I$ and $g:A\otimes U\otimes V\to B\otimes U\otimes V$.

– **Superposing**:

$$g\otimes\mathsf{Tr}^U_{A,B}(f)=\mathsf{Tr}^U_{W\otimes A,Z\otimes B}(g\otimes f)$$

where $f:A\otimes U\to B\otimes U$ and $g:W\to Z$.

– **Yanking**:

$$\mathsf{Tr}^U_{U,U}(\tau_{U,U})=1_U.$$