TD7 – Catégories monoïdales tracées

Samuel Mimram

19 novembre 2009

1 Interprétation du λ-calcul dans une CCCC

On suppose fixée une catégorie $\mathcal{C}$ cartésienne et compacte close. On note

$$\phi_{A,B,C} : \mathcal{C}(A \times B, C) \to \mathcal{C}(A, B \Rightarrow C)$$

l'isomorphisme canonique et

$$\varepsilon_{A,B} : (B \Rightarrow A) \times B \to A$$

la counité de la clôture.

1. Montrez qu'une catégorie symétrique monoïdale est cartésienne si et seulement si tout objet A est muni d'une structure canonique de comonoïde commutatif $(A, \delta_A, \varepsilon_A)$ où δ et ε sont des transformations naturelles.
2. Donnez la représentation par diagrammes de cordes des lois de comonoïde commutatif ainsi que des axiomes de naturalité.
3. Décrivez $\delta_{A\otimes B}$ en fonction de δ_A, δ_B et $\gamma_{A,B}$.
4. Donnez une représentation par diagrammes de corde de l'axiome de naturalité de la symétrie $\gamma_{A,B} : A \times B \to B \times A$ de la catégorie monoïdale sous-jacente.
5. On suppose fixées les interprétations respectives

   $$[\![M_1]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![B]\!] \to [\![C \Rightarrow A]\!] \qquad [\![M_2]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![B]\!] \to [\![C]\!] \qquad [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$$

   de séquents

   $$\Gamma, x : B \vdash M_1 : C \Rightarrow A \qquad \Gamma, x : B \vdash M_2 : C \qquad \Gamma \vdash N : B$$

   On rappelle que les interprétations des séquents

   $$\Gamma \vdash (\lambda x.M_1 M_2)N : A \qquad \text{et} \qquad \Gamma \vdash ((\lambda x.M_1)N)((\lambda x.M_2)N) : A$$

   sont respectivement

   $$\varepsilon_{A,B} \circ (\phi_{\Gamma,B,A} \langle \varepsilon_{A,C} \circ \langle [\![M_1]\!], [\![M_2]\!] \rangle , [\![N]\!] \rangle)$$

   et

   $$\varepsilon_{A,C} \circ \langle \varepsilon_{B,C\Rightarrow A} \circ (\phi_{\Gamma,B,C} \langle [\![M_1]\!], [\![N_1]\!] \rangle), \varepsilon_{C,B} \circ (\phi_{\Gamma,B,C} \langle [\![M_2]\!], [\![N]\!] \rangle) \rangle$$

   Représentez ces deux morphismes sous forme de diagrammes de corde.
6. Montrez que ces deux morphismes sont égaux.
7. Comment généraliser cette preuve au cas des catégories cartésiennes closes (non nécessairement compactes closes) ?

2 Catégories monoïdales tracées

1. Donnez une représentation graphique des axiomes des catégories monoïdales tracées.
2. Montrez que toute catégorie compacte close est tracée.
3. Construisez le monoïde additif $\mathbb{Z}$ à partir du monoïde additif $\mathbb{N}$ comme un quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (un couple (m, n) doit être pensé comme l'entier relatif $m - n$).
4. Étant donnée une catégorie symétrique monoïdale tracée $\mathcal{C}$ on définit une catégorie $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$ dont les objets sont des paires (A^+, A^-) d'objets de $\mathcal{C}$ et les morphismes $f : (A^+, A^-) \to (B^+, B^-)$ sont les morphismes $f : A^+ \otimes B^- \to A^- \otimes B^+$ de $\mathcal{C}$. En utilisant la trace, définissez une composition dans $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$ ainsi qu'une structure de catégorie monoïdale symétrique.
5. Montrez que la catégorie $\mathrm{Int}(\mathcal{C})$ est compacte close.

On rappelle les axiomes définissant une trace :

We begin by recalling the basic notions. let $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{I}, \tau)$ be a symmetric monoidal category. Here $\tau_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$ is the symmetry or twist natural isomorphism. A *trace* on $\mathcal{C}$ is a family of functions

$$\mathsf{Tr}^{U}_{A,B} : \mathcal{C}(A \otimes U, B \otimes U) \longrightarrow \mathcal{C}(A, B)$$

for objects A, B, U of $\mathcal{C}$, satisfying the following axioms:

– **Input Naturality**:

$$\mathsf{Tr}^{U}_{A,B}(f) \circ g = \mathsf{Tr}^{U}_{A',B}(f \circ (g \otimes 1_U))$$

where $f : A \otimes U \to B \otimes U$, $g : A' \to A$,

– **Output Naturality**:

$$g \circ \mathsf{Tr}^{U}_{A,B}(f) = \mathsf{Tr}^{U}_{A,B'}((g \otimes 1_U) \circ f)$$

where $f : A \otimes U \to B \otimes U$, $g : B \to B'$,

– **Feedback Dinaturality**:

$$\mathsf{Tr}^{U}_{A,B}((1_B \otimes g) \circ f) = \mathsf{Tr}^{U'}_{A,B}(f \circ (1_A \otimes g))$$

where $f : A \otimes U \to B \otimes U'$, $g : U' \to U$,

– **Vanishing (I,II)**:

$$\mathsf{Tr}^{I}_{A,B}(f) = f \qquad \text{and} \qquad \mathsf{Tr}^{U \otimes V}_{A,B}(g) = \mathsf{Tr}^{U}_{A,B}(\mathsf{Tr}^{V}_{A \otimes U, B \otimes U}(g))$$

where $f : A \otimes I \to B \otimes I$ and $g : A \otimes U \otimes V \to B \otimes U \otimes V$.

– **Superposing**:

$$g \otimes \mathsf{Tr}^{U}_{A,B}(f) = \mathsf{Tr}^{U}_{W \otimes A, Z \otimes B}(g \otimes f)$$

where $f : A \otimes U \to B \otimes U$ and $g : W \to Z$.

– **Yanking**:

$$\mathsf{Tr}^{U}_{U,U}(\tau_{U,U}) = 1_U .$$