TD6 – Catégories compactes closes

Samuel Mimram

12 novembre 2009

1 Catégories compactes closes

Étant donnée une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$, un objet A admet un dual à droite A^* lorsqu'il existe deux morphismes

$$\eta : I \to A \otimes A^* \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : A^* \otimes A \to I$$

tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& I \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes A"] & (A \otimes A^*) \otimes A \arrow[r, "\alpha_{A,A^*,A}"] & A \otimes (A^* \otimes A) \arrow[r, "A\otimes\varepsilon"] & A \otimes I \arrow[dr, "\rho_A"] & \\
A \arrow[ur, "\lambda_A^{-1}"] \arrow[rrrrr, "\mathrm{id}_A"'] & & & & & A
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
& A^* \otimes I \arrow[r, "A^*\otimes\eta"] & A^* \otimes (A \otimes A^*) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{A^*,A,A^*}"] & (A^* \otimes A) \otimes A^* \arrow[r, "\varepsilon\otimes A^*"] & I \otimes A^* \arrow[dr, "\lambda_{A^*}"] & \\
A^* \arrow[ur, "\rho_{A^*}^{-1}"] \arrow[rrrrr, "\mathrm{id}_{A^*}"'] & & & & & A^*
\end{tikzcd}$$

commutent. Une catégorie monoïdale symétrique est *compacte close* lorsque tout objet A admet un dual à droite A^*.

1. Représentez les lois ci-dessus sous forme de diagrammes de corde.
2. Montrez que la catégorie **FdVect** (des espaces vectoriels de dimension finie) est compacte close.
3. Montrez que toute catégorie compacte close est monoïdale close.

2 Catégories cartésiennes

1. Un *monoïde commutatif* (M, μ, η) dans une catégorie symétrique monoïdale est un objet M muni de deux morphismes

$$\mu : M \otimes M \to M \qquad \text{et} \qquad \eta : I \to M$$

   satisfaisant des lois exprimant l'associativité de la multiplication, le fait que η est une unité pour la multiplication et la commutativité de la multiplication. Rappelez ces lois et donnez-en la représentation par diagrammes de corde.
2. De même, un *comonoïde commutatif* (M, δ, ε) est un objet M muni de deux morphismes

$$\delta : M \to M \otimes M \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : M \to I$$

   satisfaisant des lois duales. Explicitez ces lois.
3. Montrez qu'une catégorie symétrique monoïdale est cartésienne (avec un choix de produit cartésien comme tenseur) si et seulement si tout objet A peut être muni d'une structure de comonoïde commutatif $(A, \delta_A, \varepsilon_A)$ qui soit naturelle en A, c'est-à-dire que pour tout morphisme $f : A \to B$,

$$\delta_B \circ f = (f \otimes f) \circ \delta_A \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$$

4. Donnez la représentation par diagrammes de corde des lois ci-dessus.
5. Décrivez $\delta_{A\otimes B}$ en fonction de δ_A, δ_B et $\gamma_{A,B}$.

3 Interprétation du λ-calcul

On suppose fixée une catégorie $\mathcal{C}$ cartésienne et compacte close. On note

$$\phi_{A,B,C} : \mathcal{C}(A \times B, C) \to \mathcal{C}(A, B \Rightarrow C)$$

l'isomorphisme canonique et

$$\varepsilon_{A,B} : (B \Rightarrow A) \times B \to A$$

la counité de la clôture.

1. Donnez une représentation par diagrammes de corde de l'axiome de naturalité de la symétrie $\gamma_{A,B} : A \times B \to B \times A$ de la catégorie monoïdale sous-jacente.
2. On suppose fixées les interprétations respectives

   $$[\![M_1]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![B]\!] \to [\![C \Rightarrow A]\!] \qquad [\![M_2]\!] : [\![\Gamma]\!] \times [\![B]\!] \to [\![C]\!] \qquad [\![N]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![B]\!]$$

   de séquents

   $$\Gamma, x : B \vdash M_1 : C \Rightarrow A \qquad \Gamma, x : B \vdash M_2 : C \qquad \Gamma \vdash N : B$$

   On rappelle que les interprétations des séquents

   $$\Gamma \vdash (\lambda x.M_1 M_2)N : A \qquad \text{et} \qquad \Gamma \vdash ((\lambda x.M_1)N)((\lambda x.M_2)N) : A$$

   sont respectivement

   $$\varepsilon_{A,B} \circ (\phi_{\Gamma,B,A} \langle \varepsilon_{A,C} \circ \langle [\![M_1]\!], [\![M_2]\!] \rangle , [\![N]\!] \rangle)$$

   et

   $$\varepsilon_{A,C} \circ \langle \varepsilon_{B,C\Rightarrow A} \circ (\phi_{\Gamma,B,C} \langle [\![M_1]\!], [\![N_1]\!] \rangle), \varepsilon_{C,B} \circ (\phi_{\Gamma,B,C} \langle [\![M_2]\!], [\![N]\!] \rangle) \rangle$$

   Représentez ces deux morphismes sous forme de diagrammes de corde.
3. Montrez que ces deux morphismes sont égaux.
4. Généralisez cette preuve au cas des catégories cartésiennes closes (non nécessairement compactes closes) ?

4 Catégories prémonoïdales

Une *catégorie prémonoïdale* $(\mathcal{C}, \otimes_A, I, {}_A\otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie $\mathcal{C}$ munie de deux foncteurs

$$_A \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad - \otimes_A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

pour tout objet A tels que pour tous objets A et B, $_A \otimes B = A \otimes_B$ (on note souvent $A \otimes B$ cet objet), ainsi que de deux isomorphismes naturels

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C) \qquad \lambda_A : I \otimes A \to A \qquad \rho_A : A \otimes I \to A$$

qui satisfont des axiomes de cohérence similaires à ceux requis pour une catégorie monoïdale.

1. Supposons que `f` et `g` soient deux fonctions en OCaml de type `unit -> a` où `a` est un type quelconque. On rappelle que ces fonctions peuvent lever des exceptions ou modifier la valeur d'une variable globale. Expliquez pourquoi le résultat de `(f(), g())` dépend de l'ordre d'évaluation des éléments de la paire.
2. Rappelez les axiomes de cohérence évoqués dans la définition.
3. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale et $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une monade sur la catégorie sous-jacente à la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. Définissez une structure de catégorie prémonoïdale sur la catégorie de Kleisli associée à la monade.