TD12 – Lois distributives, Catégories de jeux

Samuel Mimram

7 janvier 2010

1 Loi distributive entre monades

Soient (S, μ^S, η^S) et (T, μ^T, η^T) deux monades sur une même catégorie $\mathcal{C}$. Une *loi distributive* entre ces deux monades est un transformation naturelle

$$l : TS \to ST$$

telle que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} TSS \arrow[r, "lS"] \arrow[d, "T\mu^S"'] & STS \arrow[r, "Sl"] & SST \arrow[d, "\mu^S T"] \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTS \arrow[r, "Tl"] \arrow[d, "\mu^T S"'] & TST \arrow[r, "lT"] & STT \arrow[d, "S\mu^T"] \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "T\eta^S"'] \arrow[dr, "\eta^S T"] & \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\eta^T S"'] \arrow[dr, "S\eta^T"] & \\ TS \arrow[rr, "l"'] & & ST \end{tikzcd}$$

commutent.

1. Représentez ces diagrammes sous forme de diagrammes de corde.
2. Définissez une structure de monade sur l'endofoncteur ST en utilisant la loi distributive.
3. Expliquez comment construire la monade des anneaux libres à partir de la monade des monoïdes libres et celle des groupes libres.

2 Une catégorie de jeux alternés

Un *jeu alterné* A est un triplet (M_A, λ_A, P_A) où
- M_A est un ensemble dont les éléments sont appelés *coups*,
- $\lambda_A : M_A \to \{+1, -1\}$ est une fonction de *polarisation* (un coup $m \in M_A$ est dit *joueur* lorsque $\lambda_A(m) = +1$ et *opposant* sinon),
- P_A est un ensemble de mots finis sur l'alphabet M_A appelés *parties*,

tels que
- $\varepsilon \in P_A$ (où ε désigne le mot vide),
- P_A est clos par préfixe : $s \cdot m \in P_A \Rightarrow s \in P_A$,
- les parties sont alternées et commencent par un coup opposant : pour toute partie $m_1 \cdots m_k \in P_A$, $\forall i, \lambda_A(m_i) = (-1)^i$,
- les parties dans P_A ne contiennent pas deux fois la même lettre.

Une *stratégie* $\sigma : A$ est un ensemble de parties de longueur paire de A qui est
- non vide,
- clos par préfixe pair : si $s \cdot m \cdot n \in \sigma$ alors $s \in \sigma$,
- déterministe : si $s \cdot m \cdot n_1 \in \sigma$ et $s \cdot m \cdot n_2 \in \sigma$ alors $n_1 = n_2$.

Si A et B sont des jeux alternés, on définit le jeu alterné $A \multimap B$ par $M_{A \multimap B} = M_A + M_B$, $\lambda_{A \multimap B} = -\lambda_A + \lambda_B$, $P_{A \multimap B}$ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $M_{A \multimap B}$ qui sont alternés, commencent par un coup opposant, et vérifient $s|_A \in P_A$ et $s|_B \in P_B$ (où $s|_A$ désigne la restriction du mot s aux lettres appartenant à A).

1. Montrer que $A \multimap B$ définit un jeu alterné.
2. Soient A, B et C trois jeux alternés. On note $\mathrm{Int}(A, B, C)$ l'ensemble des mots sur $M_A + M_B + M_C$ tels que $u|_{A,B} \in P_{A \multimap B}$, $u|_{A,B} \in P_{B \multimap C}$ et $u|_{A,C}$ est alterné et commence par un coup opposant. Montrez que pour tout $u \in \mathrm{Int}(A, B, C)$, $u|_{A,C} \in P_{A \multimap C}$.

3. L'*état* d'une interaction est un triplet constitué de la polarité de prochain coup à jouer dans $A \multimap B$, $B \multimap C$ et $A \multimap C$. Parant de l'état $(-1,-1,-1)$ déterminez les coups qui peuvent être joué (ainsi que leur polarité) et les états atteignables par un interaction $u \in \mathrm{Int}(A, B, C)$.
4. Quelle est la parité de la longueur des projections sur $A \multimap B$, $B \multimap C$ et $A \multimap C$ d'une interaction u dans chacun des états atteignables ?
5. Soient $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$. Montrez que

$$\tau \circ \sigma \quad = \quad \{ \, u|_{A,C} \quad | \quad u \in \mathrm{Int}(A, B, C), u|_{A,B} \in \sigma, u|_{B,C} \in \tau \, \}$$

   est non vide et clos par préfixe pair.
6. Montrez que pour tout $s \in \tau\circ\sigma$, il existe unique $u \in \mathrm{Int}(A, B, C)$ tel que $s = u|_{A,C}$, $u|_{A,B} \in \sigma$ et $u|_{B,C} \in \tau$.
7. Déduisez-en que $\tau \circ \sigma$ est déterministe et est donc une stratégie.
8. Montrez que la loi de composition est associative.
9. Définissez pour tout jeu A une stratégie identité $\mathrm{id}_A : A \multimap A$. On peut donc définir une catégorie dont les objets sont les jeux alternés et les morphismes sont les stratégies sur le jeu $A \multimap B$.

On suppose dans la suite que les parties d'une stratégie peuvent contenir des répétitions de lettres et que l'on obtient ainsi une nouvelle catégorie $\mathcal{C}$.

7. Définissez un jeu $\mathbb{B}$ correspondant aux booléens.
8. On voudrait interpréter le λ-calcul étendu avec des booléens (V et F) et une construction de test. Définissez les stratégies correspondant aux termes suivants de type $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$:
   - $\lambda x.x$
   - $\lambda x.\mathrm{V}$
   - $\lambda x.(x?\mathrm{V} : \mathrm{V})$
   - $\mathrm{neg} = \lambda x.(x?F : V)$ et vérifiez que $\mathrm{neg} \circ \mathrm{neg} = \mathrm{id}$.
9. Définissez la stratégie conjonction booléenne $\mathrm{conj} : \mathbb{B} \to \mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Y a-t-il qu'une seule implémentation possible de cette fonction ?
10. Montrez que $\mathcal{C}$ admet un objet terminal 1. Étant donné un jeu A, on notera $\varepsilon_A : A \to 1$ la flèche terminale.
11. Intuitivement, quel devrait être le jeu $A \times B$ correspondant au produit de A et B ? Étendez cette opération en un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
12. Définissez une stratégie diagonale $\delta_A : A \to A \times A$ et vérifiez que pour toute paire de stratégies $f : A \to B$ et $g : A \to C$ on a

$$f = (\mathrm{id}_A \times \varepsilon_B) \circ (f \times g) \circ \delta_A \quad \text{et} \quad g = (\mathrm{id}_B \times \varepsilon_B) \circ (f \times g) \circ \delta_A$$

    La flèche $(f \times g) \circ \delta_A$ fait donc commuter le diagramme habituel du produit. Montrez que cette flèche n'est pas unique : la catégorie $\mathcal{C}$ n'a pas les produits cartésiens.
13. Montrez que la catégorie $\mathcal{C}$ est cependant une catégorie symétrique monoïdale close.