# TD10 – Limites, présentations de catégories

Samuel Mimram

11 décembre 2009

## 1 Limites

Soit $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur et $c$ un objet de $\mathcal{C}$. Une *flèche universelle* de $c$ dans $S$ est la donnée d'une paire $(r, u)$ où $r$ est un objet de $\mathcal{D}$ et $u : c \to Sr$ un morphisme de $\mathcal{C}$ telle que pour toute autre paire $(d, f)$ où $d$ est un objet de $\mathcal{D}$ et $f : c \to Sd$ un morphisme de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $f' : r \to d$ de $\mathcal{D}$ tel que $Sf' \circ u = f$.

1. Soit $U : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche $F$. Montrez que pour tout objet $X$ de $\mathcal{D}$, $(FX, \eta_X)$ est une flèche universelle de $X$ dans $U$ ($\eta_X$ étant l'unité de l'adjonction).

Soient $J$ et $\mathcal{C}$ deux catégories. Le foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$ est le foncteur qui envoie tout objet $C$ de $\mathcal{C}$ sur le foncteur constant (l'image de tout objet est $C$ et l'image de tout morphisme est $\mathrm{id}_C$) et tout morphisme $f : C \to D$ dans la transformation naturelle dont toutes les composantes sont $f$. La *limite* d'un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$ est une flèche co-universelle de $\Delta$ vers $F$.

2. Qu'est-ce que la limite d'un foncteur $F$ dans le cas où $J$ est la catégorie terminale ?
3. Exprimez les notions de produit et de produit fibré en termes de limites.
4. [Facultatif] Montrez que si toutes les limites des foncteurs $F : J \to \mathcal{C}$ existent pour une certaine catégorie $J$ alors elles sont données par l'adjoint à droite du foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^J$.

## 2 Une présentation de la catégorie simpliciale

Une présentation $(G, R)$ d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ est la donnée d'un ensemble $G$ de *générateurs* et d'un ensemble $R \subseteq G^* \times G^*$ de *relations* tels que le monoïde $M$ soit isomorphe au monoïde libre $G^*$ engendré par $G$ quotienté par la plus petite congruence contenant les relations.

1. Proposez une présentation pour les monoïdes additifs suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}/2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.
2. Afin de prouver que ces présentations sont correctes (qu'on a bien l'isomorphisme requis) orientez les relations de chacune de ces présentations afin d'obtenir un système normalisant (terminant et confluent) puis montrez que les éléments du monoïde sont en bijection avec les formes normales.

L'objectif de cette partie est de construire une présentation de la *catégorie simpliciale* $\Delta$ (en généralisant la notion précédente de présentation d'un monoïde). Les objets de cette catégorie sont les ensembles finis $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ à $n$ éléments et les morphismes sont les fonctions croissantes.

3. Équipez cette catégorie d'une structure de catégorie monoïdale.
4. Montrez que l'objet $[1]$ est terminal dans cette catégorie. On note $\delta : [2] \to [1]$ et $\varepsilon : [0] \to [1]$ les morphismes terminaux de $[2]$ et $[0]$ respectivement. Donnez-en une représentation par diagrammes de corde.
5. Représentez par diagrammes de corde les morphismes $\delta_i^n : [n] \to [n+1]$ et $\varepsilon_i^n : [n+2] \to [n+1]$ (avec $0 \leq i \leq n$) définis par

$$\delta_i^m(k) = \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_i^n = \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Utilisez cette représentation pour déterminer les relations de commutations entre ces morphismes, i.e. trouvez les membres droits des équations suivantes :

$$\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = ? \qquad \varepsilon_j^{n+1} \circ \varepsilon_i^{n+2} = ? \qquad \varepsilon_j^{n+1} \circ \delta_i^{n+1} = ? \tag{1}$$

7. Montrez que tout morphisme de la catégorie $\Delta$ est égal à une composée des morphismes $\delta_i^n$ et $\varepsilon_i^n$.

8. Montrez que deux composées de $\delta_i^n$ et $\varepsilon_i^n$ représentent le même morphisme si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en utilisant les équations (1).
9. Le *n-simplexe standard* $\Delta_n$ est le sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dont les points sont

$$\Delta_n \quad = \quad \{ \ (x_1, \ldots, x_n) \quad | \quad x_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_i x_i = 1 \ \}$$

   Définissez un foncteur $S : \Delta \to \mathbf{Top}$ tel que $S([n]) = \Delta_n$ en voyant les $S(\varepsilon_i)$ comme des opérateurs de faces et les $S(\delta_i)$ comme des opérateurs de dégénérescence. Quelle est l'interprétation géométrique des équations (1) ?
10. Donnez une intuition géométrique des foncteurs $\phi : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$, appelés *ensembles simpliciaux*.
11. Proposez des ensembles simpliciaux représentant un carré vide, un carré plein, un cube vide, un cube plein, un tore, un ruban de Möbius, etc.