

Fiches de math (MPSI/MP)

Samuel MIMRAM

2000-2002

Table des matières

1 Divers

Relation d'équivalence : réflexive, symétrique, transitive

Relation d'ordre : réflexive, antisymétrique, transitive

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|F| = p \Leftrightarrow |\mathcal{P}(F)| = 2^p$$

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(F)} |X| = p2^{p-1}$$

2 Algèbre générale

2.1 Divers

Un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\text{Signature de } \sigma \in \mathcal{S}_n : \varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}([1,n])} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Théorème de Bezout : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$

Théorème de Gauss : $(a \wedge b = 1 \text{ et } a|bc) \Rightarrow a|c$

2.2 Groupes

$(G, *)$: $*$ est associative, G admet un élément neutre pour $*$, tout élément de G admet un symétrique pour $*$

$$H \text{ sous-groupe de } G \Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in H^2, x * y \in H \\ \forall x \in H, x^{-1} \in H \end{cases}$$

Une intersection qqc de ss-groupes est un ss-groupe $H + G$: pp ss-gr tq $H \cup G \subset H + G$

L'image d'un groupe par un morphisme est un groupe de neutre $f(e_G)$

Transport de structure :

f bijection de $(G, \cdot)$ ds B alors c'est un morphisme de $(G, \cdot)$ ds $(B, *)$ avec $*$: $u * v = f[f^{-1}(u) \cdot f^{-1}(v)]$

Les ss-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$

$$H \cup K \text{ groupe} \Leftrightarrow H \subset K \text{ ou } K \subset H$$

Plus petit ss-groupe contenant $H \cup K$: $H + K$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$$

Relation d'équiv associée à un ss-groupe : $x\mathcal{R}_Hy \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \text{Décomposition canonique : } E \xrightarrow{f} F : \text{il existe } \bar{f}, \text{ bijective, tq : } & \begin{array}{ccc} s \downarrow & & \uparrow i \\ E/\mathcal{R}_f & \xrightarrow{\bar{f}} & f(E) \end{array} \end{array}$$

Groupe cyclique : monogène fini

Th de Lagrange : l'ordre de tt élémnt divise le cardinal du groupe

Si G est de cardinal p premier alors il est cyclique et isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$(G^\times, \times)$ est un groupe

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est un groupe de cardinal $\varphi(n)$ $\varphi(n) = n \prod_i (1 - \frac{1}{p_i})$

Si $m \wedge n = 1$ alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

démo : $\tau : \overline{k}^{mn} \mapsto (\overline{k}^m, \overline{k}^n)$ et $\dim \text{Im} = \frac{mn}{m \wedge n}$ car $m \wedge n = \dim \text{Ker}$

PGCD : générateur de $\sum_i a_i \mathbb{Z}$ PPCM : générateur de $\bigcap_i a_i \mathbb{Z}$

Théorème Chinois : si $m \wedge n = 1$ alors $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

EQ DIOPH

2.3 Groupe opérant sur un ensemble

Action à gauche : $e_G \cdot x = x$ et $\forall (g, g') \in G^2, g \cdot (g' \cdot x) = (g * g') \cdot x$

$(A_g)^{-1} = A_{g^{-1}}$

Automorphisme intérieur : $a_\sigma : \sigma x \sigma^{-1}$

$\tau : (G, \cdot) \rightarrow (\mathcal{O}(E), \circ) / g \mapsto A_g = g \cdot \cdot$ est un morphisme de groupes

A tt morphisme τ de $(G, \cdot)$ dans $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est associée une action à gauche de G sur E tq : $\forall g \in G, \tau(g) = A_g$

Action fidèle : τ injectif donc bijectif de $(G, \cdot)$ dans $(\tau(G), \circ)$

Relation d'équiv associée à une action : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g \cdot x = A_g(x)$

Orbites de E ss l'action A : élémts de $E/\mathcal{R}$ $O_x = A \cdot x$

Action transitive : $E/\mathcal{R}$ ne contient qu'un seul élément

Th de Lagrange : ds un groupe fini E , le cardinal de tout ss-groupe G divise le cardinal du groupe

démo : $G \rightarrow O_x / g \mapsto g \cdot x$ bijection donc $|O_x| = |G|$ et $E = \sum_{x \in E/\mathcal{R}_G} |O_x| = |E/\mathcal{R}_G| \cdot |G|$

Si $|G| = n$ alors $\forall g \in G, g^n = e_G$

Petit th de Fermat : si p premier et $a \neq 0$ alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ démo : Lagrange avec $(G^\times, \times)$

$\overline{x}$ invb ds $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \wedge n = 1 \Leftrightarrow \text{Gr}(\overline{x}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Centre : $Z(G) = \{g \in G / \forall x \in G, gx = xg\}$

Toute orbite est stable sous l'action de G

Pour tt orbite O_x et tt $g \in G, A_g : O_x \rightarrow O_x / y \mapsto g \cdot y$ est une bijection

Stabilisateur (groupe d'isotropie) : $\text{Stab}(a) = \{g \in G / g \cdot a = a\}$: groupe

$\forall (a, b) \in O_x^2, \text{Stab}(a)$ et $\text{Stab}(b)$ st isomorphes (conjugués par autom intérieur)

$\forall a \in O_x, \text{Card}(O_x) \times \text{Card}(\text{Stab}(a)) = \text{Card}(G)$

démo : $O_x = \{a_i\}$; $\varphi_a : G \rightarrow O_x / g \mapsto g \cdot a$ mq $\alpha_{i_0} = \varphi_a^{-1}(\{a_{i_0}\}) = g_{i_0} \cdot \text{Stab}(a)$ avec $a_i = g_{i_0} \cdot a$ puis les α_{i_0} : partition de G

$\text{Card } G = \text{Card}(\text{Im } f) \times \text{Card}(\text{Ker } f)$ démo : $\varphi : (g / \text{Ker } g) \rightarrow \text{Im } f / g \mapsto f(g)$ isomorphisme

Th de Burnside : $N \cdot |G| = \sum_{g \in G} |F_g|$ où $F_g = \{x \in E / g \cdot x = x\}$ démo : poser $\alpha = \{(g, x) \in G \times E / g \cdot x = x\}$

Il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ démo : $\varphi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times, \times) \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times, \times) / x \mapsto x^2$

2.4 Anneaux – corps

Anneau $(A, +, \times)$:

$(A, +)$ est un groupe abélien, $\times$ est associative, $\times$ est distributive sur $+$, A admet un élément neutre pour $\times$

$$B \text{ sous-anneau de } A \Leftrightarrow \begin{cases} 1_A \in B \\ \forall (x, y) \in B^2, x - y \in B \\ \forall (x, y) \in B^2, xy \in B \end{cases}$$

a est régulier : $ax = ay \Rightarrow x = y$ et $xa = ya \Rightarrow x = y$

a régulier $\Leftrightarrow a$ non diviseur de 0

Anneau intègre : non nul, commutatif, sans diviseur de 0

$(A^\times, \times)$: groupe des élémts inversibles

a est nilpotent : $\exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0$

Si a est nilpotent $e - a$ est inversb d'inverse $e + a + \dots + a^{n-1}$

I est un idéal de A : I est un sous-groupe de A et $\forall a \in A, \forall i \in I, ai \in I$

Si $1_A \in I$ ou I contient un élémt inversb alors $I = A$

$I \cap J$ est un idéal, $I + J$: pp idéal contenant $I \cup J$

Si f morphisme d'anneaux : $\text{Im } f$ ss-anneau et $\text{Ker } f$ idéal

Relation d'équiv associée à un idéal : $x \mathcal{R}_I y \Leftrightarrow x - y \in I$

Idéal principal : $\exists a \in A, I = aA$

Anneau principal : intègre, dt ts les idéaux st principaux

Caractéristique : ordre de e_A dans $(A, +)$

La caractéristique d'un anneau intègre est soit infinie, soit un nb premier

Ds un anneau de caractéristique p , si $xy = yx$ alors $(x + y)^p = x^p + y^p$

démo : $(x + y)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k x^k y^{p-k}$ et $\forall k \in [1, p-1], p \mid C_p^k$

Corps $(K, +, \times)$:

$(K, +, \times)$ est un anneau, $0_K \neq 1_K$, tout élément de $K \setminus \{0\}$ admet un inverse pour $\times$

$$L \text{ sous-corps de } K \Leftrightarrow \begin{cases} 1_K \in L \\ \forall (x, y) \in L^2, x - y \in L \\ \forall (x, y) \in L^2, xy \in L \\ \forall x \in L \setminus \{0\}, x^{-1} \in L \end{cases}$$

Un corps est un anneau intègre

La caractéristique d'un corps fini est un nombre premier

Si I est un idéal d'un corps K alors $I = \{0\}$ ou $I = K$

L'image d'un corps K par un morphisme d'anneaux est un corps isomorphe à K démo : $\text{Ker } \varphi = \{0\}$: idéal

Dans un corps commutatif fini de caractéristique p tt élémnt admet une et une seule racine p -ième

démo : $\tau : K \rightarrow K / x \mapsto x^p$ morphisme d'anneaux bijectif

Tout corps fini est commutatif

Tout corps fini a pour cardinal p^n avec p premier

démo : K de caractéristique p ; $L = \{e, 2e, \dots, pe\}$ ss-corps de K ; $K : L$ -EV de dim (fi nie) n

Un polyê de degré d admet au plus d racines ds un corps

Th de Wilson : $(p-1)! \equiv 1 \pmod{p}$ démo : $1, \dots, (p-1)$: racines de $X^{p-1} - 1$ ds $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

2.5 Polynômes

$\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal

Polynôme P irréductible : divisible seulement par λ et λP ($\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Un polynôme de degré n admettant $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul

$P \mid Q \Rightarrow [P(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0]$

a racine de multiplicité k de P : $\forall i \in [0, k-1], P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$

$P = \lambda[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n]$ avec $\sigma_1 = x_1 + \dots + x_n$ et $\sigma_n = x_1 \dots x_n$ ($\sum \prod_n x_i$)

attention à la normalisation de P

Mettre les polyê du 2nd degré ss forme canonique

Théorème de d'Alembert : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Si P est scindé alors P' l'est démo : multiplicités $m_i - 1$, Rolle pr les racines distinctes

Décomposition d'un fraction rationnelle en éléments simples :

– parité, conjugaison ?

– calculer la partie entière de $\frac{P}{Q}$

– pôle simple : calcul du coeff en virant le pôle

– si $\frac{N(X)}{D(X)} = \frac{N(X)}{(X-a)D_1(X)}$ avec a de multiplicité 1, partie principale relative à a : $\frac{N(a)}{(X-a)D_1'(a)}$

– pôle multiple : idem pour le calcul du coeff pr le plus haut degré du numérateur

– $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x)$: somme des coeffs (ou du coeff de x si racine non réelle dans $\mathbb{R}$) avec $d^o F \leq 1$

– valeurs particulières $\rightarrow$ équations

Si $\frac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de P alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$

Polyê de Tchebychev : $T_n(\cos t) = \cos nt$ $T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}$

Opérateur aux différences finies : $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ $\Delta = T - \text{Id}$ avec $T : P(X) \mapsto P(X+1)$

avec $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\deg P = n-1$: $\deg(\Delta^k P) = n-k$ donc $\Delta^n P = 0$

sur $\mathbb{C}_n[X]$: $\text{Ker } \Delta = \mathbb{C}_0[X]$ et $\text{Im } \Delta = \mathbb{C}_{n-1}[X]$

$T^n P(X) = P(X+n)$ et $T\Delta = \Delta T$ donc $\Delta^n P(X) = (T - \text{Id})^n P(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k T^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X+k)$

$\Rightarrow P(n+1)$ si on connaît ts les $P(k)$ avec $k \in [1, n]$

2.6 Polynômes et $\mathbb{K}$ -algèbres

Algèbre $(A, +, \times, \cdot)$:

$(A, +, \times)$ est un anneau, $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in A, (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$

$$B \text{ sous-algèbre de } A \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \in B \\ \forall (x, y) \in B^2, x + y \in B \text{ et } xy \in B \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in B, \lambda x \in B \end{cases}$$

$\tau_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K} \quad / \quad P = \sum \alpha_j X^j \mapsto \tau_a(P) = \sum \alpha_j a^j = P(a)$ est un morphisme d'algèbres

Poly $\hat{n}$ minimal : le générateur unitaire de $\text{Ker } \tau_a$ (idéal des poly $\hat{n}$ annulateurs de a)

Le poly $\hat{n}$ minimal divise tt poly $\hat{n}$ annulateur

$\mathbb{K}[a] = \text{Im } \tau_a$ ($a \in \mathcal{A}$) est une ss-algèbre commutative de $\mathcal{A}$: deux poly $\hat{n}$ d'un $\hat{m}$ endomorphisme commutent

Si l'algèbre est intègre et Π_a existe alors Π_a est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$

Si Π_a existe, tout $P(a) \in \mathbb{K}[a]$ est inversible dans $\mathcal{A}$ ssi $P \wedge \Pi_a = 1$; ds ce cas $P(a)^{-1} \in \mathbb{K}[a]$

Si $\mathcal{A}$ est de dim finie, $\forall a \in \mathcal{A}, \Pi_a$ existe démo : $(a^0, \dots, a^n)$ liée

$\text{Ker } \tau_a \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \Leftrightarrow \text{Im } \tau_a = \mathbb{K}[a]$ est une algèbre de dim finie démo : div eucl de P par Π_a

Si $\text{Ker } \tau_a = \Pi_a \mathbb{K}[X]$ avec $\deg \Pi_a = d$ alors $\mathbb{K}[a]$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre de dim d de base $(a^0, \dots, a^{d-1})$

Si $\mathcal{A}$ est intègre et $\mathbb{K}[a]$ est de dim finie alors $\mathbb{K}[a]$ est un corps démo : Π_a irréd donc $P \wedge \Pi_a = 1$

Si $\mathbb{K}[a]$ est un algèbre de dim finie et $P(a)$ inversible alors $P(a)^{-1} \in \mathbb{K}[a]$

démo : $\varphi_a : \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}[a] \quad / \quad x \mapsto xP(a)$ isomorphisme

3 Algèbre linéaire

3.1 Espaces vectoriels

Espace-vectoriel $(E, +, \cdot)$:

$(\mathbb{K}, +, \times)$ corps commutatif, $(E, +)$ groupe abélien, $1 \cdot x = x, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

$$F \text{ sous-ev de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in F^2, x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda x \in F \end{cases}$$

Pour montrer F ss-ev de E , on peut montrer $F = \text{Ker } \varphi$

Norme : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

norme d'algèbre : $N(a \times b) \leq N(a)N(b)$

$|N(x) - N(y)| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

donc $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne

Normes usuelles : $\|x\|_1 = \sum |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2} \quad \|x\|_\infty = \max |x_i|$

Normes équivalentes $\Leftrightarrow \forall x, N(x) \leq \alpha \|x\|$ et $\|x\| \leq \beta N(x) \Leftrightarrow \text{Id} : (E, N) \rightarrow (E, \| \cdot \|)$ bicontinue

Ds un EVN : $\overline{B(x, r)} = B_f(x, r)$ et vice versa

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ [u] continue $\Leftrightarrow C^0$ en 0 $\Leftrightarrow$ bornée sur $B_f(0_E, 1)$ ou $S(0_E, 1) \Leftrightarrow N[f(x)] \leq k \|x\| \Leftrightarrow k$ -lip

Norme subordonnée (norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E, F)$) : $\|f\| = \sup_{x \in B_f(0_E, 1)} N[f(x)] = \sup_{x \in S(0_E, 1)} N[f(x)] = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{N[f(x)]}{\|x\|}$

$N[f(x)] \leq \|f\| \cdot \|x\| \quad \|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$

Si F EVNC alors $(\mathcal{L}_c(E, F), \| \cdot \|)$ EVNC

Si $\| \text{Id} \| \neq 1$ alors $\| \cdot \|$ n'est pas une norme subordonnée

$(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues

Sur un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie, toutes les normes sont équiv

Sur un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie, une partie est compacte ssi c'est un fermé borné

F ss-ev de dim finie de $E \Rightarrow F$ EVNC et fermé de E

Un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie est un espace de Banach

Sur un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie, tt application linéaire est continue

En dim finie, la sphère unité est compacte donc $\exists x_0, \|u\| = \|u(x_0)\|$

u p-lin continue $\Leftrightarrow C^0$ en 0 $\Leftrightarrow$ bornée sur $S(0_E, 1)$ ou $B_f(0_E, 1) \Leftrightarrow N[u(x_1, \dots, x_n)] \leq k \|x_1\| \dots \|x_n\|$

Sur un produit d'ev de dim finies, u est continue

Hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle ($E \neq H$ et $\forall a \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}a$)

H est soit un fermé de E , soit une partie dense dans E avec F ss-ev de $E \Rightarrow \overline{F}$ ss-ev de E : si $\overline{H} \neq H$ alors $E \subset \overline{H}$

$H_1 \cap H_2$ ss-ev $H_1 + H_2$ pp ss-ev contenant H_1 et H_2

$f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie $\Leftrightarrow \forall x \in E, (x, f(x))$ est liée

$(x_1, \dots, x_n)$ libre ssi $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(x_F, x_G), x = x_F + x_G \Leftrightarrow F + G = E$ et $F \cap G = \{0\} \Leftrightarrow F \oplus G = E$

La somme $E_1 + \dots + E_n$ est directe ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

$\Leftrightarrow \forall k, \sum_{i=1}^{k-1} E_i \cap E_k = \{0\} \Leftrightarrow \forall j, E_j \cap \sum_{i \neq j} E_i = \{0\}$

$E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\} \Leftrightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

Restriction : $f|_H$ surjective $\Leftrightarrow E = H + \text{Ker } f$ $f|_H$ injective $\Leftrightarrow H \cap \text{Ker } f = \emptyset$

démo : $\forall x \in E, \exists h \in H, f(x) = f(h) \Leftrightarrow f(x - h) = 0$ et $x = h + (x - h) \in H + \text{Ker } f$

Tt supplémentaire de $\text{Ker } f$ est isomorphe à $\text{Im } f$

$p \circ p = p$: p projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$

$s \circ s = \text{Id}$: s symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id})$

Famille orthogonale de projecteurs :

si $(f_i) \in \mathcal{L}(E)^h$ tq $\sum_{i=1}^h f_i = \text{Id}_E$ et $i \neq j \Rightarrow f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors les f_i st des projecteurs de E et $E = \bigoplus_{i=1}^h \text{Im } f_i$

Si s est une symétrie, $\frac{s + \text{Id}_E}{2}$ est un projecteur...

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$; si $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont de dim finie alors E est de dim finie

Théorème de la base incomplète : $\exists B, L \subset B \subset L \cup G$

Si $F \subset E$ alors $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$

$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Théorème du rang : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = \dim E$ $\dim f(H) + \dim(H \cap \text{Ker } f) = \dim H$

$\dim \text{Ker } g \circ f \leq \dim \text{Ker } g + \dim \text{Ker } f$

Codimension : dimension du supplémentaire

f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$

Formule du binôme de Newton : si f et g commutent : $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k f^k g^{n-k}$

Si $fg - gf = \text{Id}$ alors, par réc : $fg^n - g^n f = (n - 1)g$

3.2 Matrices

Si $C = A \cdot B$ alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$

${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(u)$

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}' \mathcal{B}}(\text{Id})$ $X = PX'$

Rang : ordre maximum de tt ss-matrice carée inversible extraite

A est équivalente à B : $B = Q^{-1}AP$ ($\hat{m}$ endom ds bases $\neq$)

$\text{rg } A = r \Leftrightarrow A$ est équivalente à $J_{n,p,r}$ ($\rightarrow$ même rang)

A est semblable à B : $B = P^{-1}AP$ ($\rightarrow$ même trace)

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ démo : $\varphi : M \mapsto (\frac{M+{}^tM}{2}, \frac{M-{}^tM}{2})$ isom

$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \rightarrow$ deux matrices semblables ont même trace : la tr est indép du choix de la base

Pour un projecteur : $\text{tr } p = \text{rg } p$

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Inversion : $(A|I_n) \rightarrow$ opérations sur les lignes $\rightarrow (I_n|A^{-1})$

$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$

$\det(AB) = \det A \det B$ $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$ démo : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

Développement suivant la j_0 -ième colonne : $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij_0} (-1)^{i+j_0} \det A_{ij_0}$

Comatrice : matrice des cofacteurs : $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$A {}^t \text{Com}(A) = (\det A) I_n$ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} ({}^t \text{Com}(A))$

Formule de Cramer : $x_i = \frac{\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, b, \dots, v_n)}{\det A}$

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \quad A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ démo : $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$; $\frac{1}{p} \notin \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$ APCR : $\det M_p = \chi_M(\frac{-1}{p}) \neq 0$

Th de Hadamard : si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$ alors A est inversible

démo : par l'absurde : X tq $AX = 0$; $|x_{i_0}| = \max(|x_i|)$; ... $|a_{i_0 i_0}| < \dots$

Corol : $\text{Sp } M \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ avec $D_i = \{z \in \mathbb{C} / |a_{ii} - z| \leq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|\}$

$$\text{Déterminants de Van der Monde : } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_n & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

démo : les x_i tous $\neq$? puis remplacer la dernière colonne par des X^k

Les centres de $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{GL}_n$ sont les matrices scalaires (λId) démo : avec les E_{ij} pr $\mathcal{M}_n$; avec $(I + E_{ij})$ pour $\mathcal{GL}_n$

Le commutant d'un endomorphisme est une algèbre

$\mathbb{K}[A] \subset \Gamma(A)$ (commutant)

H stable par $M \Leftrightarrow H^\perp$ stable par ${}^tM \Leftrightarrow H^\perp = \text{Vect } v$ avec v vc pr de tM (si H hyperplan)

3.3 Réduction des endomorphismes

$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$: ensb des vl pr de f

Si f et g commutent $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g ($\rightarrow E_\lambda$)

Si $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^p$ distincts alors les $\text{Ker}(f - \alpha_i \text{Id}_E)$ st en somme directe

démo : par réc, mq 0 s'écrit de façon unique comme $\sum x_i$

$\Rightarrow$ si (λ_i, v_i) st des couples propres dt les λ_i st distincts, ils forment une famille libre ex : $(x \mapsto e^{\lambda_i x})$

Un endomorphisme diagonalisable qui admet une unique vl pr est une homothétie

f inversb $\Leftrightarrow \mu_f$ est de valuation nulle

Si $P(f) = 0$, tt vl pr de f est racine de P

Th de décomposition des noyaux : si $P_1 \wedge P_2 = 1$ alors $\forall f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \text{Ker } P_1 P_2(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \text{Ker } P_2(f)$

$\Rightarrow$ si $P = P_1 P_2 \dots P_n$ et $P(f) = 0$ alors $E = \text{Ker } P(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \text{Ker } P_2(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_n(f)$

f digonalisable (nb fini de vl pr) $\Leftrightarrow$ admet un polyû annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples (vrai aussi pr μ_f)

Polyû interpolateurs de Lagrange :

$$W_k(X) = \frac{\prod_{i=0}^n (X - \alpha_i)}{\prod_{i \neq k}^n (\alpha_k - \alpha_i)} \quad W_k(\alpha_j) = \delta_{jk} \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) W_k(X) : \text{base de } \mathbb{K}_n[X]$$

si les α_i st les vl pr : c'est une famille orthogonale de projecteurs et $\forall x \in E, x = \sum_{k=0}^n W_k(f)(x)$

Polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = \det(M - XI_n)$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $d^0 \chi_A = n$ et $\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr } A) X^{n-1} + \dots + \det A$

en dim 2 : $\chi_M(X) = X^2 - (\text{tr } M)X + \det M$

dim E_λ est au plus la multiplicité de λ dans χ_f

Si χ_f est scindé à racines simples alors f est diagonalisable

Diagonalisation : $M = PDP^{-1}$

$\chi_{AB} = \chi_{BA}$ démo : avec $A \sim J_r$ ou $A \in \mathcal{GL}_n$ puis densité

Les induits d'un endom diagb st diagb démo : $P(f) = 0 \Rightarrow P(f|_F) = 0$

Si f et g st diagb et commutent alors ils st codiagb démo : considérer les induits

$$\text{Matrices de Frœbenius : } A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \text{tt polyû est le polyû caractéristiq d'une matrice}$$

Drapeau : (E_i) tq $\dim E_i = i$ et $E_i \subset E_{i+1}$

Le polyû caractéristique d'une matrice $T \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}}$ est annulateur de T

χ_f scindé $\Leftrightarrow f$ trigonalisable avec vl pr sur la diagonale démo : réc sur $n = \dim E$; stt pas d'induit !

Si f admet un polyû annulateur scindé alors f est trigonalisable (dim finie)

Théorème de Cayley-Hamilton : χ_f est un polyû annulateur de f

$\Rightarrow (f^0, f^1, \dots, f^n)$ est liée

Si f est nilpotent, $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f) = \{0\}$ $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $(\text{Id}_E - f)^{-1} = \text{Id}_E + f + \dots + f^{p-1}$ (existe) 0 : seule vl pr

Si f est nilpotent d'indice $n = \dim E$ alors il existe une base $\mathcal{B}$ tq $f \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

f nilpotent $\Leftrightarrow \chi_f(X) = (-1)^n X^n \Leftrightarrow \exists \mathcal{B}, f \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Théorème des noyaux itérés : $p_0 = \min\{j \in \mathbb{N} / \text{Ker } u^j = \text{Ker } u^{j+1}\} = \min\{j \in \mathbb{N} / \text{Im } u^j = \text{Im } u^{j+1}\}$

$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker } u^{p_0+k} = \text{Ker } u^{p_0}$ et $\text{Im } u^{p_0+k} = \text{Im } u^{p_0}$ $E = \text{Im } u^{p_0} \oplus \text{Ker } u^{p_0}$

$u' = u|_{\text{Ker } u^{p_0}}$ nilpotent d'indice p_0 et $\dim \text{Ker } u^{p_0} \geq p_0$ $\dim \text{Ker } u^{p_0} = \text{multiplicité de } 0 \text{ comme racine de } \chi_u$
en particulier : si $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ alors $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$

χ_f scindé : $\chi_f(X) = (-1)^n \prod_i (X - \lambda_i)^{m_i}$

Ss-espace caractéristique : $F_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$

$E = \text{Ker } \chi_f(f) = \bigoplus_i F_i$ chaque F_i est stable par $f \Rightarrow$ matrice diagonale par blocs

Si χ_f est scindé, f s'écrit (de manière unique) ss la forme $f = d + n$ avec d diagonalisable et n nilpotent qui commutent

démo : les induits de $(f - \lambda_i \text{Id})$ sur F_i sont nilpotents

3.4 Dualité

E est isomorphe à E^* (ont même dimension)

Base duale : $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ tq $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $f^* = \sum_{i=1}^n f^*(e_i)e_i^*$

Une base duale de E^* est la base duale d'une unique base de E

$\rightarrow$ si on trouve (e_i) et (e_i^*) tq $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ alors (e_i) est une base de E de base duale (e_i^*)

Les polyû interpolateurs de Lagrange $(W_j)_{0 \leq j \leq n}$ sont une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $(\varphi_i^* : P \mapsto P(a_i))$ la base duale associée

$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle$ $\forall M \in \mathcal{M}_n^*, \exists ! A \in \mathcal{M}_n, \varphi(M) = \text{tr}(AM)$

démo : mq $\phi : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_n^* / A \mapsto [M \mapsto \text{tr}(AM)]$ est injective

Orthogonal : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \{f^* \in E^* / \forall x \in A, f^*(x) = 0\}$ $\forall B \in \mathcal{P}(E^*), B^\circ = \{x \in E / \forall f^* \in B, f^*(x) = 0\}$

ce sont des ss-ev de E

$F \subset (F^\perp)^\circ$ (égalité ssi F ss-ev) $F = ((F^\perp)^\circ)^\perp$ $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ (= ssi F et G ss-ev) (et vice versa...) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$

$(\text{Ker } \varphi)^\perp = \text{Vect } \varphi$

Si F ss-ev de E de dim n alors $\dim F^\perp = n - \dim F$ et $\dim G^\circ = n - \dim E$

démo : prendre une base de E^* et mq $F^\perp \oplus F^* = E$

donc $F \mapsto F^\perp$ est bijective de réciproque $G \mapsto G^\circ$

Si F et G ss-ev alors $F = G \Leftrightarrow F^\perp = G^\perp$

$\text{Vect}(e_i) = E \Leftrightarrow \text{Vect}(e_i)^\perp = \{0\}$ (= $E^\perp$)

$\text{Vect}(\varphi_i)^\circ = (\sum \text{Vect}(\varphi_i))^\circ = \bigcap \text{Vect}(\varphi_i)^\circ = \bigcap \text{Ker}(\varphi_i)$

Intersection d'hyperplans : $\dim \bigcap_{1 \leq s \leq t} H_s \geq n - t$ (égalité ssi $(f_s^*)_{1 \leq s \leq t}$ libre)

Si $f^*(x) = 0$ est l'éq d'un hyperplan, tt les autres éq st de la forme $\lambda f^*(x) = 0$ ($\lambda \neq 0$)

démo : si $H = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$ mq $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ convient avec $x \in E \ominus H$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de $E \Leftrightarrow f^* \mapsto (f^*(e_s)_{1 \leq s \leq n})$ isomorphisme d'ev entre E^* et $\mathbb{K}^n$

Transposée de $f \in \mathcal{L}(E, F)$: l'unique ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tq : $\forall \psi \in F^*, {}^t f(\psi) = \psi \circ f$

$\forall \psi \in F^*, \forall x \in E, \langle {}^t f(\psi) | x \rangle = \langle \psi | f(x) \rangle$

$\text{rg } f = \text{rg } {}^t f$ $\text{Ker } {}^t f = (\text{Im } f)^\perp$ $\text{Im } {}^t f = (\text{Ker } f)^\perp$ ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

F stable par $f \Leftrightarrow F^\perp$ stable par ${}^t f$

Tt hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible

démo : $\exists \varphi, H = \text{Ker } \varphi$, puis $\exists A, \varphi : M \mapsto \text{tr}(AM)$, puis $A \sim J_r$

4 Algèbre bilinéaire

$$g_\varphi : x \mapsto \varphi(x, \cdot) \quad d_\varphi : y \mapsto \varphi(\cdot, y)$$

$$\text{Symétrique : } \varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad \text{antisym : } \varphi(y, x) = -\varphi(x, y) \quad \text{alternée : } \varphi(x, x) = 0$$

$$\varphi \text{ antisym} \Leftrightarrow \text{alternée (en caractéristique } \neq 2)$$

$$\varphi \text{ symétrique} \Leftrightarrow g_\varphi = d_\varphi$$

$$\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E) \quad \dim \mathcal{L}_2(E) = n^2 \quad \dim \mathcal{S}_2 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{dém} : \varphi : M \mapsto \left(\frac{M+{}^tM}{2}, \frac{M-{}^tM}{2}\right) \text{ isom}$$

$$\text{Identité de polarisation : } \varphi_{\text{sym}}(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$$

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \varphi(e_i, e_i) + 2 \sum_{i < j} x_i x_j \varphi(e_i, e_j)$$

$$\text{Matrice : } A = (\varphi(e_i, e_j)) \quad \varphi(x, y) = {}^tXAY \quad A = \text{Mat}_{(e, e^*)} d_\varphi$$

$$\text{Changement de base : } P = \text{Mat}_{(e', e)}(\text{Id}_E) \quad X = PX' \quad A' = {}^tPAP$$

$$\text{Matrice positive : } \forall X, {}^tXAX \geq 0 \Leftrightarrow \phi(x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{Sp } A \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \text{sgn } A = (?, 0)$$

$$\text{HP : } \forall M, {}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \forall M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), {}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad M + {}^tM \in \mathcal{S}_n$$

$$A \text{ et } B \text{ sont congruentes : } \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), B = {}^tPAP$$

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}^2(\mathbb{K}), {}^tXAY = {}^tXBY \Leftrightarrow A = B$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}^2(\mathbb{K}), {}^tXAX = {}^tXBX \Leftrightarrow A - B \text{ est antisym}$$

$$x \text{ et } y \text{ st } \varphi\text{-orthogonaux : } \varphi(x, y) = 0 \quad x \perp_\varphi y$$

$$A^{\perp_\varphi} = \{x \in E / \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\} \quad \text{ss-ev de } E$$

$$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp \quad A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$$

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp \quad F \subset F^{\perp\perp} \quad F^{\perp\perp\perp} = F^\perp \quad \{0_E\}^\perp = E$$

$$\dim H^\perp = n - \dim H + \dim(H \cap \text{Ker } d_\varphi) \quad \text{dém} : H^\perp = [d_\varphi(H)]^\circ$$

$$E = H \oplus H^\perp \Leftrightarrow H \cap H^\perp = \{0\} \quad \text{dém} : \text{Ker } d_\varphi \subset H^\perp \text{ donc } H \cap \text{Ker } d_\varphi \subset H \cap H^\perp$$

$$\text{Si } \varphi \text{ non dégénérée : pr tt } H \text{ ss-ev de } E \dim H^\perp = n - \dim H$$

$$H^{\perp\perp} = H \quad (H_1 + H_2)^\perp = H_1^\perp \cap H_2^\perp \quad H_1^\perp + H_2^\perp = (H_1 \cap H_2)^\perp \quad E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F^\perp \oplus G^\perp$$

$$\text{Contre-exemples : } (l_2(\mathbb{N}), \varphi) \text{ avec } \varphi(u, v) = \sum u_k v_k \text{ prendre } \mathbb{R}[X]^\perp$$

$$\text{Noyau ou radical de } \varphi : \text{Rad } \varphi = E^{\perp_\varphi} = \text{Ker } d_\varphi = \{y \in E / \forall x \in E, \varphi(x, y) = 0\} \quad \forall F, \text{Rad } \varphi \subset F^\perp$$

$$\varphi \text{ non dégénérée : } \text{Rad } \varphi = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow M_\varphi \text{ inversible}$$

$$\text{Rang de } \varphi : \text{rg } d_\varphi$$

$$\dim(\text{Rad } \varphi) = n - \text{rg } \varphi$$

$$x \text{ est } \varphi\text{-isotrope : } \varphi(x, x) = 0 \quad \text{cône isotrope : } C_\varphi = \{x \in E / \varphi(x, x) = 0\}$$

$$x + y \in C_\varphi \Leftrightarrow x \perp_\varphi y \quad \text{Rad } \varphi \subset C_\varphi \quad \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{K}x \subset (\mathbb{K}x)^\perp$$

$$\varphi \text{ est définie : } C_\varphi = \{0_E\}$$

$$\varphi \text{ définie} \Rightarrow \text{non dégénérée} \quad \varphi \text{ définie} \Rightarrow \text{pr tt } H \text{ ss-ev de } E, \varphi|_{H \times H} \text{ est définie}$$

$$\text{ss-ev stables, utiliser : } F \text{ stable par } M \Leftrightarrow F^\perp \text{ stable par } {}^tM$$

$$\text{Si } \varphi \text{ fbs sur } E, \text{ il existe une base } \varphi\text{-orthogonale } (\rightarrow \text{matrice diagonale}) : \text{base réductrice}$$

$$\text{dém} : \text{par réc, prendre } x_0 \text{ tq } \varphi(x_0, x_0) \neq 0 \text{ et } E = (\mathbb{K}x_0) + (\mathbb{K}x_0)^\perp$$

$$\text{Signature } (p_+, p_-) \text{ de } \varphi : p_+ : \text{dimension max d'un ss-ev } H \text{ de } E \text{ tq } \varphi|_H \text{ soit définie positive}$$

$$\text{Th d'inertie de Sylvester : ds une base } \varepsilon \text{ } \varphi\text{-orthogonale, } p_+ : \text{nb de } \phi(\varepsilon_i) > 0, \text{ etc...}$$

$$\text{Recherche de la signature :}$$

$$- \text{parachuter la solution : } E = F \oplus G$$

$$- \text{utiliser une décomposition de Gauss}$$

$$- \text{matriciellement : relations avec le det, la trace, les restrictions...}$$

$$- \text{mettre sous forme de produit puis utiliser } ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 + (a-b)^2] \quad \text{ex : } \sum_{i,j=1}^n ix_j x_j = (\sum_{i=1}^n ix_i)(\sum_{j=1}^n x_j)$$

$$- \text{avec les vl pr}$$

$$- \text{pr une forme positive [resp négative] : rg} = n - \dim \text{Rad et Rad} = \text{Cône} \quad \text{dém} : \text{ics}$$

$$\text{Mineur principal d'ordre } k : \det \text{ de la matrice carrée } k \times k \text{ extraite en haut à gauche}$$

$$\text{Condition de Sylvester : } M \in \mathcal{S}_n^{++} \Leftrightarrow \text{ts les mineurs principaux de } M \text{ sont } > 0 \quad \text{dém} : \text{réc, avec les restrictions}$$

$$\text{Gauss : forme canonique / produit}$$

$$\text{Endomorphisme symétrique } u (\Leftrightarrow \text{autoadjoint}) : \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$$

$$\text{Ds une base } r \text{ } \langle | \rangle\text{-orthonormée : } u \text{ symétrique} \Leftrightarrow \text{Mat}_r(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Les vl pr d'une matrice symétrique réelle (ds } \mathbb{C}) \text{ st réelles} \quad \text{dém} : \lambda = \bar{\lambda} \text{ avec } {}^t\overline{Z}MZ$$

$$\text{Les ss-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux} \quad \text{dém} : \langle \lambda x|y \rangle = \mu \langle x|y \rangle$$

$$\text{Th spectral :}$$

$$\text{tt endom symétrique admet une base orthonormée de vc pr}$$

tt matrice symétrique réelle est diagonalisable avec matrice de passage orthogonale
 $\forall M \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), D = P^{-1}MP = {}^t PMP$
HP : $\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \exists ! \sqrt{S}, (\sqrt{S})^2 = S$ démo : induits
Th de réduction simultanée :
si ϕ forme quadrtq de $(E, \langle | \rangle)$ alors il existe une base de $E \langle | \rangle$ -orthonormée et φ -orthogonale
 $\forall A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \forall B \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), {}^t PAP = I_n$ et ${}^t PBP = \Delta \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$
 $\forall \varphi \in S_2(E), \exists ! u \in S_2(E), \varphi(x, y) = \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$

A et A' sont congruentes ssi ϕ_A et $\phi_{A'}$ ont $\hat{m}$ signature

Inégalité de Schwartz : si ϕ est positive, $|\varphi(x, y)|^2 \leq \phi(x)\phi(y)$ $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ démo : avec $\phi(x + \lambda y)$
si ϕ est définie positive, $|\varphi(x, y)|^2 = \phi(x)\phi(y) \Leftrightarrow (x, y)$ liée
Inégalité de Minkowski : si ϕ est positive, $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$
si ϕ est définie positive, $\sqrt{\phi(x+y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \Leftrightarrow (x, y)$ positivement liée
Si φ est positive : Cône $\phi = \text{Rad } \phi$ démo : ics
Une forme quadratique définie est soit positive, soit négative
démo : $\lambda \mapsto \phi(x + \lambda y_0)$ admet au plus une racine donc $\phi(x)\phi(y_0) \geq 0$

4.1 Espaces euclidiens

Produit scalaire : forme bilinéaire symétrique définie positive

Norme euclidienne : $\sqrt{\langle x | x \rangle}$

Distance : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$ $d(M, N) = d(N, M)$ $d(M, N) \leq d(M, P) + d(P, N)$ distance eucl : $\|\overrightarrow{MN}\|$

Normes : $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ $(P, Q) \mapsto \int_0^\infty PQ e^{-t^2}$ $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$

polyè orthogonaux : avec le polyè des racines avec changement de signe

Si $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ est tq $\forall p \in \mathbb{N}, \int_a^b t^p f(t) dt = 0$ alors $f = 0$ démo : th de Weierstraß : f lim unif sur $[a, b]$ de $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

$\|\sum x_i^2\| \leq \|\sum x_i\|^2$

Théorème de Pythagore : $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Identité du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Si (r_i) base φ -orthonormée de E eucl alors $(d_\varphi(r_i))$ est la base duale associée

$\forall f^* \in E^*, \exists ! y \in E, \forall x \in E, f^*(x) = \varphi(x, y)$

Th de la base orthogonale incomplète

$M : m_{ij} = \langle u(r_j) | r_i \rangle$ $\text{tr}(u) = \sum \langle u(r_i) | r_i \rangle$

$E = F \oplus G \Rightarrow E = F^\perp \oplus G^\perp$ et $F^{\perp\perp} = G^\perp = F$

$E = F \oplus G \Leftrightarrow F \perp G$ et $F^\perp \perp G^\perp$

$E = \text{Vect}(e_i) \Leftrightarrow [\text{Vect}(e_i)]^\perp = \{0\}$

Adjoint : $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$

$(u^*)^* = u$ $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ $u(H) \subset H \Rightarrow u^*(H^\perp) \subset H^\perp$ $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$

Ds une BON : $\text{Mat}(u_M^*) = {}^t M$

Si u est défini positif alors u^* est défini positif

$\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker } u$ $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$ $\Rightarrow \text{rg } f^* \circ f = \text{rg } f \circ f^* = \text{rg } f$ $\text{rg } {}^t MM = \text{rg } M$ ($\rightarrow$ Gram)

Endom symétrique (autoadjoint) : $u^* = u$ antisym : $u^* = -u$

ds ce cas : $E = \text{Ker } u + \oplus \text{Im } u$

f autoadjoint positif :

$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \rho(f) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |\lambda|$ démo : ics : $\|f\|^2 \leq \|f^* \circ f\| \leq \|f^*\| \|f\|$

$\|f\|^2 = \|f^* f\| = \|f^* \circ f\|$ $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle f(x) | y \rangle|$ démo : $\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x | y \rangle|$

$\|M\|_{2,2} = \sqrt{\rho({}^t MM)}$

Endom orthogonal u ($\in O(E) \subset \mathcal{GL}(E)$) :

$\|u(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle \Leftrightarrow$ envoie une BON sur une BON $\Leftrightarrow {}^t MM = I_n \Leftrightarrow u^* = u^{-1}$

$\Rightarrow \det M \in \{-1, 1\}$

Si F stable par u alors $F^\perp$ stable par u

Dans un BON r , si $\Omega = \text{Mat}_r(u)$ alors tt vl pr de Ω est de module 1

Tt endom orthogonal admet un ss-espace invariant de dim 1 ou 2

démo : soit v_l pr, soit $u + u^*$ sym dt b vc pr alors $\text{Vect}(b, u(b))$ stable par u

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

à tt drapeau de E , il existe une base orthonormée adaptée à ce drapeau

$\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(b_1, \dots, b_k) \quad v_{k+1} = b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | v_i \rangle v_i \quad w_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$
il y a unicité si l'on impose : $\forall k, \langle v_k | b_k \rangle > 0$

Topologie matricielle :

- S_n^{++} : partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$
- $O_n(\mathbb{R})$: partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$: partie dense de $M_n(\mathbb{R})$

Si $S \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exists M \in M_n(\mathbb{R}), S = {}^tMM$ démo : avec $M = \sqrt{S}$

Décomposition polaire : si $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\exists O \in O_n(\mathbb{R}), \exists S \in S_n^+(\mathbb{R}), M = OS$

démo : M inversible puis densité sachant $O_n(\mathbb{R})$ compact (ss-suite de O_n cv) ou bien $S = \sqrt{{}^tMM}$ et $O = MS^{-1}$ conviennent

Décomposition d'Iwasawa : si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $\exists O \in O_n(\mathbb{R}), \exists T \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}}, M = OT$ démo : Schmidt

Avec $H \in S_n^{++}$ et $K \in S_n$, HK nilpotent $\Leftrightarrow K = 0$

démo : $\exists \alpha \in S_n^{++}, H = {}^t\alpha\alpha$ et $HK = {}^t\alpha\alpha K = {}^t\alpha(K^t\alpha)^t\alpha^{-1}$: semblable à une diagb donc diagb

Décomposition de Choleski : $\forall A \in S_n^{++}, \exists ! S \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}}, A = {}^tSS$ avec S à élémts diagonaux positifs

démo : φ_A prod scal de $\mathbb{R}^2$ (base canonq η) ; Schmidt : $\exists r \varphi_A$ -BON tq $\forall i, \text{Vect}(\eta_i, \dots, \eta_k) = \text{Vect}(r_i, \dots, r_k)$ et $\varphi_A(\eta_i, r_i) > 0$; soit $S = P_r^\eta$ alors :
 $A = {}^tS I_n S$ avec $S \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}}$

unicité : si $A = {}^tSS = {}^tS'S'$ alors $SS'^{-1} = {}^tS^{-1}tS' \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}} \cap \mathcal{T}_n^{\text{inf}} = \mathcal{D}_n$ et $(SS'^{-1})(SS'^{-1}) = I_n$ donc $SS'^{-1} = I_n$

$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} / M \mapsto \sup_{O \in O_n(\mathbb{R})} |\text{tr}(OM)|$: norme de $M_n(\mathbb{R})$

φ -matrice de Gram : $G = (\varphi(v_i, v_j)) \quad \Delta_\varphi[(x_i)] = \det G$
 $\text{rg } G = \text{rg}(v_i) \quad (x_i) \text{ liée} \Leftrightarrow \Delta_\varphi[(x_i)] = 0 \quad d(a, F)^2 = \frac{\Delta_\varphi(a, f_1, \dots, f_n)}{\Delta_\varphi(f_1, \dots, f_n)}$

Symétrie ($s^2 = \text{Id}$) : orthogonale $\Leftrightarrow {}^tMM = I_n$ et ${}^tM = M \Leftrightarrow \text{Ker}(s - \text{Id}) = (\text{Ker}(s + \text{Id}))^\perp \Leftrightarrow s$ end sym

p projection ($p^2 = p$) : orthogonale $\Leftrightarrow \text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp \Leftrightarrow p$ end sym $\Leftrightarrow (\text{Id}_E - p)$ end sym $\Leftrightarrow \text{Im } p = (\text{Ker } p)^\perp \Leftrightarrow p^* = p$
 $\Leftrightarrow \|p\| = 1$ ou 0

p proj ortho $\Leftrightarrow p^* = p$ et $\forall x, \|p(x)\| \leq \|x\|$

démo : $\|p(x)\|^2 = \langle x | p^* p(x) \rangle = \langle x | p(x) \rangle \leq \|x\| \|p(x)\|$; réciproque : appliquer l'inégalité à $x + ty$ avec $x \in \text{Ker } p$

Ds une BON $r : u$ end sym $\Leftrightarrow \text{Mat}_r(u) \in S_n(\mathbb{R})$

Réflexion d'hyperplan $H : s(x) = x - \frac{2\langle x | \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$

Projection orthogonale sur $H : p(x) = x - \frac{\langle x | \vec{N} \rangle}{\|\vec{N}\|^2} \vec{N}$

Rotations ($\det = 1$) $SO_2 : \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ réflexions $O_2 \setminus SO_2$: semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

O_3 :

– $\det = 1 : SO_3 \setminus \{\text{Id}\}$: rotations axiales : axe tq $f(v) = v$ et $\text{tr } f = 1 + 2 \cos \theta$

– $\det = -1$: réflexion / prod commutatif d'une rot et d'une réfl de plan $\perp$ à l'axe de la rot : axe tq $f(u) = -u$ et $\text{tr } f = -1 + 2 \cos \theta$

Signe de $\sin \theta$: signe de $[v, f(v), u]$ avec $u \in D$ et $v \in E \setminus D$

Produit mixte (parfois noté Det) : det dans une BON ne dépend pas du choix de la BON

Si $\det u = 1$ alors $[u(x_1), \dots, u(x_n)] = [x_1, \dots, x_n]$

Mesure de l'angle orienté entre x et y en dim 2 : $\cos \theta = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad \sin \theta = \frac{[x, y]}{\|x\| \|y\|}$

En dim 3 : $\cos \theta = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad |\sin \theta| = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\| \|y\|}$

Aire algébrique du triangle ABC : $\frac{1}{2}[\vec{AB}, \vec{AC}]$, etc... (pavé en dim n)

Rem : dim 2 $\leftrightarrow$ dim 3 : $[\vec{u}, \vec{v}] \leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Produit vectoriel : $v = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ tq $\forall x \in E, \langle v | x \rangle = [x_1, \dots, x_n, x]$

$\forall u \in O^+(E), u(x_1) \wedge \dots \wedge u(x_n) = u(x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$

Formule de Gibbs : $(a \wedge b) \wedge c = \langle a | c \rangle b - \langle b | c \rangle a$

Division vectorielle : si $a \cdot b = 0$ alors $\{x \in E / a \wedge x = b\} = \{\lambda a - \frac{a \wedge b}{\|a\|} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

En dim 3, l'application : $\tau : E \rightarrow \mathcal{A}(E) / \omega \mapsto a_\omega = [x \mapsto \omega \wedge x]$ est un isom d'ev

$\forall f \in \mathcal{A}(E), \exists ! \omega, \forall x \in E, f(x) = \omega \wedge x \quad \forall M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}), \exists ! \Omega, \forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), MX = \Omega \wedge X$

Distance de x à F : $d(x, F) = \inf\{\|y - x\| / y \in F\} = d(x, p(x))$ où p : proj orto sur F

$\|a - x\| = d(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^\perp \Leftrightarrow x = p_F(a)$

La projection ortho sur F de dim finie ou ss-ev complet ou partie convexe et complète existe

démo : identité du parallélogramme...

Distance de M à l'hyperplan $\mathcal{H}$ de normale $\vec{N}(a_1, \dots, a_n)$: $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n - d|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$ avec $\mathcal{H} : \sum a_ix_i + d = 0$

Distance de M à la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{u})$:

$$\dim 2 : d(M, \mathcal{D}) = \sqrt{\|\vec{AM}\|^2 - \frac{\langle \vec{AM}, \vec{u} \rangle^2}{\|\vec{u}\|^2}} \quad \dim 3 : d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ avec } A \in \mathcal{D}$$

Droite $\mathcal{D}$ définie par $P_1 \cap P_2$: chercher $P \perp P_1$ puis : $d(M, \mathcal{D})^2 = d(M, P_1)^2 + d(M, P)^2$

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\|\vec{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2}\|}{\|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}\|}$$

4.2 Espaces préhilbertiens complexes

φ sesquilinéaire à gauche : $x \mapsto \varphi(x, y)$ est semi-linéaire ($\varphi(\lambda x, y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y)$) et $y \mapsto \varphi(x, y)$ est $\mathbb{C}$ -linéaire

φ sesquilinéaire hermitienne (autoadjointe) : $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} \Leftrightarrow {}^t\bar{A} = A$

$$\bar{A}^{-1} = \overline{A}^{-1} \quad \text{rg } \bar{A} = \text{rg } A \quad A^* = {}^t\bar{A}$$

$$\varphi(x, y) = X^*AY \quad A' = P^*AP$$

Matrice unitaire : $U^* = U^{-1} \Leftrightarrow$ mat de passage entre $\text{bon} \Leftrightarrow \langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|y \rangle \Leftrightarrow \|u(x)\| = \|x\|$

$$M^*M \in \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) \quad \forall M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), M^*M \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$$

$$\phi(\lambda x) = |\lambda|^2 \phi(x)$$

Identité de polarisation : $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[\phi(x+y) - \phi(x-y) - i\phi(x+iy) + i\phi(x-iy)]$

$$X^*AX = X^*BX \Leftrightarrow A = B \quad X^*AX = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

φ sql hermitienne $\Leftrightarrow \forall x \in E, \phi(x) = \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$

Si φ est définie alors elle est soit positive, soit négative démo : $\phi(x)\phi(y_0) \leq 0$ avec $\phi(x + \lambda y_0)$

Si φ est positive alors : $\forall (x, y) \in E^2, |\varphi(x, y)|^2 \leq \phi(x)\phi(y)$

si de plus φ est définie : $|\varphi(x, y)|^2 = \phi(x)\phi(y) \Leftrightarrow y = 0$ ou $y \neq 0$ et $\exists \mu \in \mathbb{C}, x = \mu y$

Minkowski : $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$...

Décomposition de Gauss : avec $|x|^2$ et $a\bar{b} + \bar{a}b = \frac{1}{2}[|a+b|^2 - |a-b|^2]$

Penser à : $\phi(x + \mu y_0) = \phi(x) + 2\Re[\mu\varphi(x, y_0)] + |\mu|^2\phi(y_0)$, puis poser $\varphi(x, y_0) = \rho_0 e^{i\theta_0}$ et $\mu = \lambda e^{-i\theta_0}$

Produit scalaire hermitien : forme sesquilinéaire hermitienne définie positive $\rightarrow$ espace hermitien

$$\text{att} : \langle \lambda x | y \rangle = \bar{\lambda} \langle x | y \rangle$$

Th de Pythagore : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \Re[\varphi(x, y)] = 0$

$$\|a - x\| = d(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^\perp \Leftrightarrow x = p_F(a)$$

Ds une bon : $x = \sum_{i=1}^n \langle r_i | x \rangle r_i$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Décomposition de Choleski

Tt ss-EV de dim finie [resp complet] admet un supplémentaire orthogonal

Matrice unitaire diagonale : a ses vl pr de module 1

Tt endom hermitien a un spectre réel et admet une bon de vc pr

Tt matrice hermitienne est diagonalisable avec matrice de passage unitaire

Si A est antihermitienne alors iA est hermitienne

Tt matrice antihermitienne est diagonalisable avec matrice de passage unitaire et vl pr imaginaires pures

Endom normal : $f \circ f^* = f^* \circ f$

ds ce cas : $\|f\| = \|f^*\| \quad \text{Ker } f = \text{Ker } f^* \quad W_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ est stable par f^* et $W_\lambda = \text{Ker}(f^* - \bar{\lambda} \text{Id})$ (st normaux)

si $\lambda \neq \mu$ alors $W_\lambda \perp W_\mu \quad W_\lambda^\perp$ stable par $f \quad f$ admet une bon de vc pr

f normal $\Leftrightarrow f^*$ est un polyû en f démo : polyû interpolateurs de Lagrange sur les vl pr de f

Si U unitaire U est semblable à $\text{Diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ démo : $u = u^*$: commnutent

4.3 Géométrie affine

Soit E un EV

$$(\mathcal{E}, E, f) \quad \mathbb{K}\text{-espace-affine} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, f(A, C) = f(A, B) + f(B, C) \\ \forall A \in \mathcal{E}, \forall u \in E, \exists ! B \in \mathcal{E}, f(A, B) = u \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ SS-EA $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM} / M \in \mathcal{F}\}$ SS-EV de E

Barycentre : G tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega G} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ (notation : $G = \sum_i \frac{\lambda_i A_i}{\sum_i \lambda_i}$)

Le SS-EA engendré par $(A_1, \dots, A_n)$ est l'ensemble des barycentres des A_i

$\mathcal{A}$ convexe ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{A}^2, [M, N] \subset \mathcal{A}$

f application affine $\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{L}(E, F), \forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

Affinité : $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} / P \mapsto p(P) + \lambda \overrightarrow{p(P)\vec{P}}$

4.3.1 Coniques

Conique : $C = \{M \in \mathcal{A} / \phi(\overrightarrow{OM}) + f^*(\overrightarrow{OM}) + k = 0\}$

Centre Ω de la conique : $C = \{M \in \mathcal{A} / \phi(\overrightarrow{\Omega M}) + k' = 0\} \Leftrightarrow d_\varphi(\overrightarrow{OM}) = \frac{-f^*}{2} \Rightarrow$ unique si $\text{rg } A = 2$, droite ou $\emptyset$ si $\text{rg } A = 1$

Coniques :

- matrice M de la forme quad (attention aux $\frac{1}{2}$ pr le coef de xy)
- $\det M$:
 - $\det M > 0$: ellipse : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$ (ou pt unique si $k = 0$ ou $\emptyset$ si $a < 0$)
 - $\det M = 0$: parabole : $y^2 = 2px$ (ou deux droites parallèles : $x^2 - \lambda^2 = 0$ ou $\emptyset$)
 - $\det M < 0$: hyperbole : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$ (ou deux droites concourrantes : $\alpha x^2 - \beta y^2 = 0$ si $k = 0$)
 - si $\text{tr } M = 0$: hyperbole équilatère : $xy = k$
- $\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Omega(\omega_x, \omega_y) \Rightarrow$ changement d'origine : Ω
- vl pr λ_1 et λ_2 et directions propres v_1 et $v_2 \Rightarrow$ changement de base

Ex : $F(x, y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x + \alpha_5 y + \alpha_6 = 0 \Rightarrow \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + F(\omega_x, \omega_y) = 0 \Rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F(\omega_x, \omega_y) = 0$ dans $(\Omega, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Peut s'obtenir à l'aide d'une réduction de Gauss

En pol : $\rho = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ $p = ed$: param ; e : excentricité ($e < 1$: ellipse...); directrice : $\mathcal{D} : x = d$
 $d(M, F) = e d(M, \mathcal{D})$ $e = \frac{c}{a}$ $c^2 = a^2 \pm b^2$

Paramétrages :

- cercle : $x = R \frac{1-u^2}{1+u^2}, y = R \frac{2u}{1+u^2}$
- ellipse : $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$
- parabole : $x = \frac{t^2}{2p}, y = t$
- hyperbole : $x = \varepsilon a \text{ch } t, y = b \text{sh } t$ équilatère : $x = t, y = \frac{k}{t}$

4.3.2 Courbes paramétrées

Arc simple : pas de pts multiples point régulier : $\vec{F}'(t_0) \neq 0$ birégulier : $(\vec{F}'(t_0), \vec{F}''(t_0))$ libre

Normale à Γ (régulière) : $\text{grad } \vec{F}(x_0, y_0)$

Tangente à Γ en $M_0 : (M_0, \vec{F}^{(p)}(t_0))$ ($\Rightarrow$ éq avec le det) $\vec{F}^{(p)}(t_0)$: 1^{re} dérivée non nulle

Plan osculateur à Γ en $M_0 : M_0 + \text{Vect}(\vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0))$ avec $(\vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0))$: 1^{res} dérivées $\neq 0$ et libres

En dim 2 : $M = M_0 + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \vec{F}^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \vec{F}^{(q)}(t_0) + o\left((t-t_0)^q \vec{F}^{(q)}(t_0)\right)$ donc :

- p impair, q pair : pt ordinaire
- p impair, q impair : pt d'inflexion
- p pair, q impair : pt de rebroussement de 1^{re} espèce
- p pair, q pair : pt de rebroussement de 2^e espèce

Branche infinie : $\|\vec{F}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow a} \infty$ direction limite : chercher $m = \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)}$

Asymptotes : faire un DL ou :

- si $m = 0$, asymptote si $l = \lim_{t \rightarrow t_0} y(t)$ est fini $\Rightarrow \mathcal{D} : y = l$; branche parabolique sinon idem pour $m = \pm \infty$

- si $m = d \neq 0$, asymptote si $d = \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - mx(t)]$ est fini $\Rightarrow \mathcal{D} : y - mx = d$; branche parabolique sinon

Restriction de l'ensb d'étude : périodicité, symétries $(-t, 1/t, \dots)$ tableau de variations

Arcs paramétrés C^k -équivalents : $\exists \theta C^k$ -difféomorphisme tq $g = f \circ \theta$

$\rightarrow$ classes d'équiv : arcs géométrq représentants : paramétrages admissibles

Un arc paramétré de classe C^1 est rectifiable (on peut définir sa longueur)

Longueur : $L(\Gamma) = \int_a^b \|\vec{F}'(t)\| dt$

en pratique (en $\mathbb{R}^n$) : $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ $L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$

Abscisse curviligne : $s : t \mapsto \varepsilon \int_{t_0}^t \|\vec{F}'(u)\| du + k$ représentation normale de Γ (régulier) : $F \circ s^{-1}(t)$

Arc normal : $L([\alpha, \beta], g) = |\beta - \alpha|$ est normal : $g = f \circ s^{-1}$ avec $f \in C^1$

Tt arc régulier de classe C^1 admet un paramétrage admissible normal

Th du relèvement : si $z \in C^1(I, \mathbb{U})$ alors $\exists \theta \in C^1(I, \mathbb{R}), \forall t \in I, z(t) = e^{i\theta(t)}$

démo : poser $\mu(t) = \frac{1}{i} \int_0^t \frac{z'(u)}{z(u)} du$; dériver $z(u)\bar{z}(u) = 1$ pr mq $\bar{\mu} = \mu \Rightarrow \mu(t) \in \mathbb{R}$; puis $\mu'(t) = \frac{1}{i} \frac{z'(t)}{z(t)} \Rightarrow z$ sol de $y' - i\mu'y = 0$

Avec $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\theta(t) = \int^t (x(y)y'(u) - x'(u)y(u)) du$

Coord pol : $\vec{OM} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ avec $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$

Coord sphériques : $M = \Omega + \rho(\sin \theta \vec{u}_\varphi + \cos \theta \vec{k})$

Tangente en $O : \theta = \theta_0$ sinon éq ds $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta) : \begin{vmatrix} x - \rho & \rho' \\ y & \rho \end{vmatrix} = 0$ vect direct : $\begin{pmatrix} \rho' \\ \rho \end{pmatrix}$

Intersection T de la tg et de $O + \mathbb{R} \vec{v}_\theta$ tq : $\vec{OT} = \frac{-\rho^2}{\rho'}$

Branche infinie : $\rho \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta_0} \pm \infty$ direction : $\vec{\Delta} : \theta = \theta_0$

Asymptote : si $l = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$ fini, passe par K tq $\vec{OK} = l \vec{v}_{\theta_0}$; branche parabolique sinon

rem : si $(\frac{1}{\rho})'(\theta_0) \neq 0$, $l = \frac{1}{(\frac{1}{\rho})'(\theta_0)}$

Si $\rho \xrightarrow{\theta \rightarrow \pm \infty} l$: cercle (ou point) asymptote

Si $\rho(\theta) \neq 0$, inflexion géométrique ssi $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$ s'annule en changeant de signe

pr $\rho(\theta) = 0$ allure ordinaire / rebroussement de 1^{re} espèce si ρ s'annule en changeant de signe / non

Droite en coord pol : $\rho = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)} = \frac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$

Repère de Frénet en M (ROND) : $(M, \vec{T}, \vec{N})$ avec $\vec{T} = \frac{\vec{F}'(t)}{\|\vec{F}'(t)\|} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$ $\vec{N} = r_{\pi/2}[\vec{T}(t)]$

$\frac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}$ $\frac{d\vec{N}}{ds} = -c\vec{T}$ démo : dériver $\vec{T}^2 = 1$

Courbure de Γ au pt $M : c$ tq $\vec{F} \circ s^{-1}(t) = c\vec{N}$ Rayon de courbure : $R = \frac{1}{c}$

Centre de courbure : K tq $\vec{MK} = R\vec{N}$

Cercle de courbure = cercle osculateur (centre ds la concavité)

$\frac{ds}{dt} = s'(t)$ donc $\vec{F}'(t) = \frac{ds}{dt} \vec{T}$ et $\vec{F}''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + c \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}$

$c = \frac{[\vec{F}'(t), \vec{F}''(t)]}{\|\vec{F}'(t)\|^3}$ $c = \frac{\|\vec{F}'(t) \wedge \vec{F}''(t)\|}{\|\vec{F}'(t)\|^3}$

Développée de Γ : ensb $\mathcal{D}$ des centres de courbure (Γ : développante de $\mathcal{D}$)

Avec $\vec{T}(t) = \cos[\alpha(t)]\vec{i} + \sin[\alpha(t)]\vec{j}$ $c = \frac{d\alpha}{ds}$ $R = \frac{ds}{d\alpha}$

α avec $\tan \alpha = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \tan t$ $\alpha \equiv t \pmod{\pi}$ $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{s'(t)}{\alpha'(t)}$

centre de courbure : $K = (x - \frac{dy}{d\alpha}, y + \frac{dx}{d\alpha})$

$v = \alpha - \theta$ $\tan v = \frac{\rho}{\rho'}$ $\rightarrow d\alpha = dv + d\theta$

Th des fonctions implicites : $\Gamma = \{(x, y) / F(x, y) = 0\}$ et $F \in C^1$; si $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ alors il existe W voisinage de (a, b) et U

voisinage de a tels que : $\forall x \in U, \exists \varphi(x), F(x, \varphi(x)) = 0$ avec $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$

4.3.3 Surfaces

Pt régulier : $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ famille libre / $\vec{\text{grad}} G(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$

Plan tangent : éq avec le det pr une nappe ($z = \varphi(x, y)$) ou une fonction implicite ($\vec{n} = \vec{\text{grad}} G$) : avec la normale

La tangente à un arc sur une nappe est une droite du plan tangent

Intersection avec une droite : $G(H_\lambda) = 0$: si λ_0 est racine d'ordre ≥ 2 , $\mathcal{D}$ est une tangente à Σ en H_{λ_0}

Application affine de $\mathcal{A}$ ds $\mathbb{R} : f(M) = ux + vy + wz + h$

Cylindre de direction de génératrice $\vec{u} : \forall M \in C, M + \mathbb{R}\vec{u} \subset C$

Si f et g formes affines alors $C = \{M \in \mathcal{A} / F[f(M), g(M)] = 0\}$ est un cylindre de dir de gén $\vec{f} \cap \vec{g}$

Cylindre de révolution d'axe $\mathcal{D}$ et rayon $R : M \in C \Leftrightarrow d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = R$

Cylindre d'axe $Oz : F(x, y) = 0$

Éq : $M \in C \Leftrightarrow \exists \lambda, H_\lambda \in \mathcal{B}$

Cône de sommet $S : \forall M \in C, S + \mathbb{R} \overrightarrow{SM} \subset C$

Si f, g et h formes linéaires tq $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})$ base de E^* et F fct p -homogène alors $C = \{M / F[f(M), g(M), h(M)] = 0\}$ est un cône de sommet S tq $f(S) = g(S) = h(S) = 0$

démo : S pt unique tq $f(S) = g(S) = h(S) = 0$ car base ; p -homogène $\Rightarrow F(0, 0, 0) = 0$; $f(S + \lambda \overrightarrow{SM}_0) = \lambda f(M_0)$

Cône de révolution : $M \in C \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\|\vec{d} \cdot \overrightarrow{SM}\|}{\|\vec{d}\| \|\overrightarrow{SM}\|}$

cas particulier $\vec{d} = (0, 0, 1), S = O : x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$

Ensemble de révolution : $\forall M \in \mathcal{E}, C_{M, \mathcal{D}} \in \mathcal{E}$

Si f forme affine non cst alors $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{A} / F[f(M), \|\overrightarrow{\Omega M}\|] = 0\}$ est un ensb de rév d'axe $\Omega + \mathbb{R}(\text{Ker } \vec{f})^\perp$

Surf engendrée par $\mathcal{B} : M \in E \Leftrightarrow C_{M, \mathcal{D}} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists m, m \in \mathcal{B} \text{ et } \overrightarrow{Mm} \cdot \vec{d} = 0 \text{ et } \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega m}\|^2 \text{ avec } \Omega \in \mathcal{D}$

Distance d'un pt à une droite : $d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

Distance d'un pt au plan $ux + vy + wz + h = 0 : d(M, \Pi) = \frac{|uX + vY + wZ + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$

Perpendiculaire commune à deux droites : $[A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{g})] \cap [B + \text{Vect}(\vec{v}, \vec{g})]$ avec $\vec{g} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

Plus courte distance entre deux droites : $\|\overrightarrow{HK}\| = \frac{|\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

Volume d'un tétraèdre : $V = \frac{1}{6} \left\| \overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 M_4} \right\|$

Éq du cercle circonscrit à un triangle : $C(X, Y) : \begin{vmatrix} X^2 + Y^2 & X & Y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

4.3.4 Quadriques

rg	Éq réduite	Nature
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	singleton
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	cône
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	$\emptyset$
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	ellipsoïde
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	hyperboloïde à une nappe (H_1)
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	hyperboloïde à deux nappes (H_2)
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$	paraboloïde elliptique
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$	paraboloïde hyperbolique
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	cylindre elliptique
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	cylindre hyperbolique
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	droite
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	deux plans sécants
	$\frac{x^2}{a^2} = 0$	droite
1	$x^2 = 2py$	cylindre parabolique

Une quadrique est de révolution ssi ses vl pr st égales

Les intersections d'une quadrique par deux plans / sont deux coniques de m type

5 Topologie

Topologie : $\emptyset$ et $E \in \mathcal{T} \quad - \quad A \cap B \in \mathcal{T} \quad - \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

Topologie trace : $\mathcal{T}_H = H \cap \mathcal{T}$

Ouvert : voisinage de chacun de ses pts

Fermé : $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert $\Leftrightarrow \overline{F} \subset F \Leftrightarrow$ tt suite d'élémts de F a sa lim ds $F \Leftrightarrow F = f^{<-1>}(F')$ avec $f \in C^0$

Voisinage : $\exists U \in \mathcal{T}, U \subset V$

Distance : $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ diamètre : $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y)$

Intérieur à A : A est un voisinage de a (plus gd ouvert $\subset A$)

Adhérent à A : tout voisinage de a rencontre A / a est la lim d'une suite d'élémnts de A (plus petit fermé $\supset A$)

A est dense dans B : $\overline{A} = B$

Valeur d'adhérence : $\forall V \in \mathcal{V}_a, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq N, u_{n_0} \in V \Leftrightarrow$ est la lim d'une suite extraite

L'ensb des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé

Frontière : $A^* = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \setminus A$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow [\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim(x_n) = a \Rightarrow \lim f(x_n) = l]$

f continue $\Leftrightarrow f^{<-1>}(O) = O' \Leftrightarrow f^{<-1>}(F) = F'$

$f \in \mathcal{L}(E)$ est $[u]$ continue $\Leftrightarrow$ continue en 0 $\Leftrightarrow N[f(x)] \leq k\|x\| \Leftrightarrow k$ -lip

Sur un $\mathbb{K}$ -EV de dim finie, tt les normes st équivalentes

EM complet : tt suite de Cauchy de $H^{\mathbb{N}}$ est cv (ds H)

Partie complète $\Rightarrow$ fermée — ds un espace de Banach (EVNC) : partie complète $\Leftrightarrow$ partie fermée

Un $\mathbb{K}$ -EV de dim finie est complet

Petit th de Baire : ds un métrique complet, si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow$ de fermés non vides tq $\delta(F_n) \rightarrow 0$ alors $\exists \alpha, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{\alpha\}$

Critère de Cauchy pr les fonctions (ds un EMC) :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{V}_a, \forall (x', x'') \in U, d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$

Th du point fixe (sur une partie complète d'un EVN ; en pratique, sur D fermé tq $f(D) \subset D$) :

f k -contractante ($k < 1$) et (u_n) f -récurrente $\Rightarrow$ la lim de (u_n) est le pt fixe de f et $\forall n, \|u_n - l\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|u_1 - u_0\|$

Compact : de tt suite on peut extraire une ss-suite cv

Sur un EVN : compact $\Rightarrow$ fermé borné (on a l'équivalence sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

Sont compacts : parties finies — $\{y \in E / \exists n \in \mathbb{N}, y = x_n\} \cup \{l\}$ avec (u_n) cv

Ds un compact, la lim de tt suite $\searrow$ de fermés non vides est un fermé non vide

Tt EM compact est complet

Partie compacte $\Rightarrow$ fermée — ds un espace compact : partie compacte $\Leftrightarrow$ partie fermée

Ds un compact, si une suite admet une unique valeur d'adhérence alors elle cv vers cette valeur

L'image d'un compact par un fonction continue est un compact

Une application continue bijective est un homéomorphisme sur un compact

Théorème de Heine : une application continue est uniformément continue sur un compact

Une application continue est bornée sur un compact et y atteint ses bornes

Propriété de Borel-Lebesgue :

une partie K est compacte ssi de tt recouvrement ouvert de K on peut extraire un ss-recouvrement fini

$\mathbb{R}$ est un compact

Dans les espaces produits :

Les normes usuelles sur une famille de p EVN sont équivalentes

La projection sur le i^e EVN est continue

Dans $(E = \prod_i E_i, \|\cdot\|_{\infty})$, $B(x, r) = \prod_i B(x_i, r)$

Il y a cv ssi il y a cv coord par coord

Un produit d'ouverts est un ouvert un produit de fermés est un fermé

Une partie est compacte ssi c'est un produit de compacts

Ds un $\mathbb{K}$ -EV de dim finie les compacts sont les fermés bornés

Une partie est complète ssi c'est un produit de complets

La continuité d'une fonction implique la continuité des applications partielles (réciproque fausse)

$(\mathbb{R}, +)$ n'admet pas de ss-grp ouvert autre que lui-même

démo : $\exists \varepsilon, B(0, \varepsilon) \subset G \Rightarrow]-2^p \varepsilon, 2^p \varepsilon[\subset G$

G ss-grp de $(\mathbb{R}, +)$: soit $\exists \alpha \in \mathbb{R}, G = \alpha \mathbb{Z}$ soit G est dense dans $\mathbb{R}$

démo : $\alpha = \inf G$; si $\alpha \neq 0$ alors $\alpha \in G$ prendre 2 élémnts entre α et 2α et faire leur différence : $G = \alpha \mathbb{Z}$; sinon mq $\forall (x, y), G \cap]x, y[\neq \emptyset$ avec $|\frac{y}{x}|$

Connexité par arcs : $\forall (a, b), \exists ([\alpha, \beta], \varphi), \varphi \in C^0, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

Les parties c p a de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

Tt partie convexe ou étoilée d'un EVN est c p a

L'image d'une partie c p a par une application continue est c p a

Le produit d'EVN c p a est c p a

Th du peigne : si C et les $(A_i)_{i \in I}$ sont c p a et $\forall i, A_i \cap C \neq \emptyset$ alors $C \cup (\cup_{i \in I} A_i)$ c p a

Si les $(A_i)_{i \in I}$ sont c p a et $\forall(i, j), A_i \cap A_j \neq \emptyset$ alors $\cup A_i$ c p a

Toute partie c p a d'un EVN est une partie connexe (i.e. tt partie à la fois ouverte et fermée est E ou $\emptyset$)

démo : mq si $P \neq \emptyset$ alors $P = A$ avec $\chi_P \circ \varphi$ avec $\chi_P \in C^0$

Si f est localement cste sur une partie connexe par arcs alors elle est cste

Th de Darboux : si $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ avec I intervalle alors $f'(I)$ intervalle

démo : $g_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \neq a$ et $g_a(a) = f'(a)$; $\cup_{a \in I} g_a(I)$ c p a car $g_a \in C^0$, I c p a et $g_a(I) \cap g_b(I) \neq \emptyset$ car $g_a(b) = g_b(a)$; puis mq $f'(I) = \cup_{a \in I} g_a(I)$: intervalle

6 Suites – séries

6.1 Suites

Suite arithmétique ($u_n = u_0 + nr$) : $\sum_{i=0}^n u_i = (n+1) \frac{u_0+u_n}{2}$

Suite géométrique ($u_n = u_0 q^n$) : $\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Suite arithmético-géométrique ($u_{n+1} = au_n + b$) : soit l tel que $l = al + b$ et se ramener à $(v_n) = (u_n - l)$ géométrique

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

$\Delta > 0 \Rightarrow u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ ou $\Delta = 0 \Rightarrow u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$ ou $\Delta < 0 \Rightarrow u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$

Suites récurrentes linéaires :

si $P \circ T(u) = 0$ et si $P(X) = \prod_{i=1}^h (X - \lambda_i)^{m_i}$ est scindé, une base des suites (u_n) est $(n^s \lambda_i^n)_{\substack{1 \leq i \leq h \\ 0 \leq s \leq m_i - 1}}$

avec $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$; on a : $\text{Ker}(T - \lambda \text{Id})^m = \text{Vect}\{(n^0 \lambda^n), (n \lambda^n), \dots, (n^{m-1} \lambda^n)\}$

démo : réc avec $\varphi : \text{Ker}(T - \lambda \text{Id})^{m+1} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / (u_n) \mapsto (T - \lambda \text{Id})(u_n)$; mq $\dim \text{Ker}(T - \lambda \text{Id})^{m+1} = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi \leq m + 1$ et $\text{Im} \varphi \subset \text{Ker}(T - \lambda \text{Id})^m \dots$

Suites f -récurrentes :

- domaine de déf
- graphe de f
- limites possibles
- existence de la limite : cv monotone / unique val d'adhérence
- (th du pt fixe $\rightarrow$ cv)
- recherche d'un domaine D tq $f(D) \subset D$
- avec $f \in C^1$: si $f' \geq 0$, (u_n) monotone si $f' \geq 0$, $f \circ f \nearrow$ et (u_{2n}) et $(u_{2(n+1)})$ monotones de varient en sens contraire (adjacentes)

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n > 0$, $u_n \rightarrow 0$ et : $\exists \alpha, f(x) \underset{(0)}{=} x - \alpha x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$ alors : $u_n \sim \left(\frac{1}{\alpha n}\right)^{1/\alpha}$

démo : poser $v_n = u_n^{-\alpha}$ et mq $v_{n+1} - v_n \rightarrow \alpha \alpha$, puis Césaro : $\frac{v_{n+1} - v_1}{n} \rightarrow \alpha \alpha$

Une suite monotone bornée est cv

Suites adjacentes : $u \nearrow, v \searrow$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = 0$: même limite

Théorème de Césaro : $u_n \rightarrow l \Rightarrow v_n = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \rightarrow l$

généralisé : $u_n \rightarrow l$ et $\sum_{k=0}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow v_n = \frac{\sum a_k u_k}{\sum a_k} \rightarrow l$

Si $(s_{n+1} - s_n) \rightarrow \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\frac{s_n}{n} \rightarrow \lambda$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$ alors $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \lambda$

Suite de Cauchy : $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall n \geq N, |u_n - u_m| < \varepsilon$

Suite cv $\Rightarrow$ de Cauchy $\Rightarrow$ bornée

La val d'adhérence d'une suite de Cauchy (si elle existe) est sa limite

Théorème de Bolzano-Weierstraß : de toute suite bornée dans un EMC on peut extraire une ss-suite convergente

$\Rightarrow$ toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence

La limite d'une suite cv est son unique valeur d'adhérence

Th d'interversion des limites monotones (HP) : si $\forall p, (a_{n,p})_n \nearrow$ et $\forall n, (a_{n,p})_p \nearrow$ alors $\lim_n (\lim_p a_{n,p}) = \lim_p (\lim_n a_{n,p})$

démo : les limites existent ds $\overline{\mathbb{R}}$ puis mq chacune est inférieure à l'autre

Suites homographiques : $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d} = f(u_n)$; suivant $l = f(l)$:

- unique sol : $v_n = \frac{1}{u_n - l}$ est arithmétique
- deux sol : $v_n = \frac{u_n - l}{u_n - l'}$ est géométrique

6.2 Séries

stg u_n cv $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n u_k$ cv

Dans un EVNC, ACV $\Rightarrow$ CV

Si stg v_n ($v_n \geq 0$ APCR) cv et $u_n \leq v_n$ ou $u_n = O(v_n)$ alors stg u_n cv

si $u_n \sim v_n$ alors $u_n \geq 0$ APCR et stg u_n et v_n st de m nature

Si stg v_n cv et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors stg u_n cv

Théorème de d'Alembert : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda$ alors $\lambda < 1 \Rightarrow$ stg u_n cv et $\lambda > 1 \Rightarrow$ stg u_n dv

idem avec $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \lambda$ (comparer avec stg k^n)

Règle de Raabe-Duhamel : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$ alors $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ démo : $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ puis stg $(b_{n+1} - b_n)$

Si $u_n \rightarrow \infty$ alors $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n} \rightarrow \infty$

Si $f \in C^0$ par morceaux et $\searrow$ alors : stg $f(n)$ cv $\Leftrightarrow f$ intégrable sur $[a, +\infty[$

stg z^n cv $\Leftrightarrow |z| < 1$

stg $e^{\gamma n}$ cv $\Leftrightarrow \gamma < 0$

Série harmonique : $\sum \frac{1}{k}$ dv démo : $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ pas de Cauchy

Séries de Riemann : $\frac{1}{n^\alpha}$ cv ssi $\alpha > 1 \Rightarrow$ Règle de Riemann

Séries de Bertrand : stg $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ cv $\Leftrightarrow \alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Si $v_n \geq 0$ APCR et $u_n \sim v_n$ alors (idem avec $u_n = o(v_n)$) :

– si stg v_n cv alors $\sum_{k=n}^\infty u_k \sim \sum_{k=n}^\infty v_k$

– si stg v_n dv alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ ($= \ln n + \gamma + o(1)$) démo : mq stg $\alpha_n = x_{n+1} - x_n$ cv avec $x_n = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ si $\alpha < 1$ alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$

démo : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^\alpha \rightarrow \int_0^1 t^\alpha dt$

$\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{n!}$ $\sum_{k=0}^n k! \sim n!$ démo : $b_k = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \sim \frac{1}{k!}$

Produit de Cauchy : si u_n et v_n sont acv alors stg $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$ cv (resp acv) et $\sum_{n=0}^\infty w_n = (\sum_{k=0}^\infty u_k)(\sum_{k=0}^\infty v_k)$

Critère spécial de cv des séries alternées : si $(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^N \searrow$ et tend vers 0 alors stg $(-1)^n \alpha_n$ cv et : $|\sum_{k=N}^\infty \alpha_k| \leq |\alpha_N|$

Transformation d'Abel (HP) :

si $\forall n, \|\sum_{k=0}^n u_k\| < M$ et stg $|\lambda_{n+1} - \lambda_n|$ cv (ou $\lambda_n \searrow$) et $\lambda_n \rightarrow 0$ alors stg $\lambda_n u_n$ cv

démo : $T_N = \sum_{k=0}^N u_k$ et mq $S_N = \sum_{k=0}^N \lambda_k u_k$ est de Cauchy

$\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$: dv si $\alpha \leq 0$, acv si $\alpha > 1$, si $0 < \alpha \leq 1$: dv si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, scv si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$

avec $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ et $\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ scv démo : Abel

démo : si $\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ acv ; $\frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha} \leq \frac{|\cos n\theta|}{n^\alpha}$ d'où : $\frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha} + \frac{\sin^2 n\theta}{n^\alpha}$ et $\frac{\cos 2n\theta}{n^\alpha} = \frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha} - \frac{\sin^2 n\theta}{n^\alpha}$

Pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\sin n\theta \not\rightarrow 0$

démo : sinon $\sin[(n+1)\theta] = \sin n\theta \cos \theta + \sin \theta \cos n\theta \rightarrow 0$ donc $\cos n\theta \rightarrow 0$ donc $\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta = 1 \rightarrow 0$!

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(e^{tA})' = A e^{tA} = e^{tA} A$ démo : cvu de $f' \dots$ et continuité de $M \mapsto AM$

$\ln 2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ démo : $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k t^k dt$

6.3 Séries entières

Lemme d'Abel : si $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $(a_n z_0^n)$ est bornée alors : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \Rightarrow$ stg $|a_n z^n|$ cv

démo : $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ avec $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$

Rayon de cv $R = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ / (a_n \lambda^n) \text{ bornée}\} : |z| < R \Rightarrow$ stg $a_n z^n$ acv $|z| > R \Rightarrow$ stg $a_n z^n$ dv

stg $a_n z_0^n$ scv $\Rightarrow |z_0| = R$ – $\forall z \in \mathbb{C}$ stg $a_n z^n$ cv $\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}$ stg $a_n z^n$ acv

$R = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ / (a_n \lambda^n) \text{ bornée}\} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ / a_n \lambda^n \rightarrow 0\} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ / \text{stg } a_n \lambda^n \text{ cv}\} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ / a_n \lambda^n \text{ acv}\}$

si $a_n \leq b_n$ alors $R_a \geq R_b$

Stg $a_n z^n$ a m rayon de cv que : $|a_n| z^n \sim \lambda \cdot a_n z^n \sim b_n \sim a_n \sim n^\alpha a_n z^n \sim (n+1) a_{n+1} z^n \sim \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$

$R_{a+b} \leq \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ ou si (a_n) et (b_n) sont à supports disjoints alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$

Le produit de Cauchy de deux se est une se de $R \leq \min(R_a, R_b)$

Les pts du cercle de cv sont soit tous acv soit tous dv, soit ??? ($\Rightarrow$ si on connaît la cv d'un pt...)

La stg $a_n z^n$ cvn donc cvu sur tt compact inclus dans le disque ouvert de cv

La fonction somme d'une se est continue en tout z du disque ouvert de cv

Si la stg $|a_n z^n|$ cv en un pt du cercle de rayon R alors la se cvn donc cvu sur le disque fermé de cv et la fonction somme est

continue sur ce disque

La fonction somme d'un SE est C^∞ sur le disque ouvert de cv

On peut intégrer ou dériver terme à terme une SE sur son disque ouvert de cv

Formule de Cauchy (HP) : $\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{N}, a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

Penser à $\frac{1}{an+b} = \int_0^1 t^{an+b-1} dt$

Si une fonction est $DSE(0)$ alors elle est C^∞ sur un $\mathcal{V}(0)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$: série de Mac-Laurin

L'ensb des fonctions $DSE(0)$ est une algèbre

DSE : avec les SE usuelles / par une équation diff

Recherche de DSE :

- on cherche une sol sur $] -R, R[$ ($R > 0$)
- identifier par unicité du DSE
- vérifier le rayon de cv

Si $f \in C^\infty$ et $\forall x \in [0, a], \forall n, |f^{(n)}(x)| < M$ [resp $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, |f^{(n)}(x)| < CB^n n!$] alors f est $DSE(0)$ démo : rrl

Contre-ex : $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est C^∞ et non $DSE(0)$: la série de M-L est nulle

6.4 Familles sommables

Toute réunion dénombrable d'une famille d'ensembles dénombrables est dénombrable

Famille sommable : $\exists A \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \in \mathcal{F}, J_0 \subset J \Rightarrow \|\sum_{j \in J} a_j - A\| \leq \varepsilon$

L'image d'une famille sommable par une application linéaire continue est une famille sommable

Une famille positive est sommable ssi : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall J \in \mathcal{F}, \sum_{j \in J} a_j \leq M$; ds ce cas : $\sum_{i \in I} a_i = \sup_{J \in \mathcal{F}} A_J$

Si $(J_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_I^{\mathbb{N}}$ est une suite $\nearrow$ tq $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = I$ alors $A = \sum_i a_i$ existe ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{J_n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_{J_n}$ existe ($\Rightarrow$ vaut A)

$\Rightarrow$ sommer sur $T_N = \{(p, q) / p + q \leq N\}$ ou $C_N = \{(p, q) \in [0, N]^2\}$

$(z_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (|z_i|)_{i \in I}$ sommable

Tt ss-famille d'une famille sommable est sommable

Avec $l_1(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ sommable}\}$ et $N_1 : u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ on a : $(l_1(\mathbb{N}), N_1)$ EVNC

Avec $l_2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n^2) \text{ sommable}\}$ et $N_2 : u \mapsto \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2}$ on a : $(l_2(\mathbb{N}), N_2)$ EVNC

Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable alors $\sum_{i \in I} a_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_N} a_j$

Si $I = I' \cup I''$ avec $I' \cap I'' = \emptyset$ alors $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (a_i)_{i \in I'}$ et $(a_i)_{i \in I''}$ sommables

ds ce cas $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I'} a_i + \sum_{i \in I''} a_i$

si $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, généralisable à $I = \bigsqcup_{t \in T} I_t$ avec T dénombrable (faux ds le cas général)

Si $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable alors $\sum_p \sum_q u_{p,q} = \sum_q \sum_p u_{p,q}$

$(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable ssi $\forall q, \sigma_q = \sum_{p \in \mathbb{N}} |u_{p,q}|$ existe et $(\sigma_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable

ds ce cas : $\sum_{(p,q)} u_{p,q} = \sum_p \sum_q u_{p,q} = \sum_q \sum_p u_{p,q}$

Si $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q \in \mathbb{N}}$ sont sommables alors : $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} = (\sum_p a_p) (\sum_q b_q)$

Convergence dominée : si $\forall n, |u_{n,p}| \leq v_p$ avec $\text{stg } v_p$ cv alors $u_{n,p}$ est sommable

7 Fonctions

7.1 Fonctions

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$f = o(g) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap E, f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ $f = O(g) \Leftrightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|$

$f \sim g \Leftrightarrow (f - g) = o(g) \Leftrightarrow f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$

Homéomorphisme : bijection bicontinue

$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

si $f \in C^n$ et $\forall x, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} existe et est C^n

Formule de Leibnitz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

Théorème du retour de la limite : si $f \rightarrow l$ et $\alpha < l$ alors il existe un voisinage V de a tq $\forall x \in V \cap E, f(x) > \alpha$

k -lipschitzienne : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \Leftrightarrow |f'| \leq k \Rightarrow$ uniformément continue

Théorème des valeurs intermédiaires : I intervalle et $f \in C^0$ alors $f(I)$ intervalle.

en particulier $\exists(a, b) \in I^2, f(a) < 0$ et $f(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in]a, b[, f(c) = 0$

Continuité uniforme : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Théorème de la limite monotone : si $f \nearrow$ alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Th de prolongement de la dérivée :

si $f \in C^0([a, b])$ et $f \in \mathcal{D}^1([a, b])$ et f' admet une limite l en a alors f est continûment dérivable en a et $f'(a) = l$

Théorème de Rolle : si $f \in C^0([a, b])$ et $f \in \mathcal{D}^1([a, b])$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis (faux ds $\mathbb{K}^n$) : si $f \in \mathcal{D}^1([a, b])$ alors $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

démo : Rolle avec $\varphi(t) = f(t) - t \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Inégalité des accroissements finis (encore vrai ds $\mathbb{K}^n$) : $\forall t \in [a, b], \|f'(t)\| \leq g'(t) \Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

démo : $\| \int_a^b f'(t) dt \| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$

Règle de l'hôpital : $\exists c \in]x_0, x[, \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ($\Rightarrow$ passage à la lim)

démo : Rolle sur $\varphi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$

Formule de Taylor-Lagrange ($\Rightarrow$ mtl) : $\exists c \in]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Formule de Taylor-Young : $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$

Formule de Taylor avec reste intégral : $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Convexe (e.g. $x \mapsto e^x$) : $\forall x, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \nearrow$

f convexe ssi $f' \nearrow$ ssi $f'' \geq 0$

Si f convexe alors $\forall x, f(x) \leq f(a) + (x - a)f'(a)$

Penser à : $\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(tx) dt \rightarrow$ existence d'un prolongement par continuité

$\{z \in \mathbb{C} / e^z = z_0\} = \{z = \ln|z_0| + i\theta + 2ik\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\theta = \arg z_0$

7.1.1 Equations fonctionnelles

1^{re} méthode :

- tâtonner
- par réc : $f(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}$ puis $n \in \mathbb{Z}$
- pour $x = \frac{t}{n}$ ($t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) : $f(\frac{t}{n}) \Rightarrow f(\frac{t}{n}) \Rightarrow f(qt)$ avec $q \in \mathbb{Q}$
- pour $x \in \mathbb{R} : \exists (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ (densité de $\mathbb{Q}$ ds $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f(x)$
- vérification

2^e méthode :

- intégrer pour montrer par réc : $f \in C^\infty$
- dériver pour obtenir une équation diff $\rightarrow$ la résoudre
- vérification

3^e méthode : $T(f) = g$ avec T linéaire $\Rightarrow f = f_0 + \text{Ker } T$

7.2 Suites de fonctions

cvu $\Leftrightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

La convergence uniforme est conservée pour : $f_n + g_n, \lambda f_n, \varphi \circ f$ avec φ k -lip, $\rho_n \times f_n$ avec (ρ_n) et (f_n) bornées

Critère de Cauchy uniforme : (f_n) , ds F evnc, cvu sur $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in A, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$

Si F evnc, $(\mathcal{B}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach

Si K compact, $C^0(K, F)$ est un fermé de $(\mathcal{B}(K, F), \|\cdot\|_\infty)$, c'est donc un evnc

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue ($\Rightarrow$ non cvu si f non continue)

encore vrai si cvu sur tt compact

Si les f_n sont C^0 (resp intb) et $f_n \xrightarrow[\text{sur } [a, b]]{\text{cvu}} f$ (et f intb) alors $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Si $f_n \xrightarrow[\text{sur tt compact de } I]{\text{cvu}} f$ alors $\int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow[\text{sur tt compact de } I]{\text{cvu}} \int_a^x f(t) dt$

Th de dérivation :

si $\forall n, f_n \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{\text{cvs}} f$ et $f'_n \xrightarrow[\text{sur tt compact de } I]{\text{cvu}} g$ alors $f_n \xrightarrow[\text{sur tt compact de } I]{\text{cvu}} f$ et $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ et $f' = g$

la cvs de f en un pt de I suffit

Th de Dini : K partie compacte de E , $(f_n) \in C^0(K, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ suite $\nearrow$, $f_n \xrightarrow[\text{sur } K]{\text{cvs}} f$ et $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ alors $f_n \xrightarrow[\text{sur } K]{\text{cvu}} f$

démo : mq $F_n(\varepsilon) = \{x \in K / |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = (f - f_n)^{-1}([\varepsilon, \infty])$ suite $\searrow$ de fermés vides $\wedge$ pcr

2^e th de Dini : si $(f_n) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $f_n \xrightarrow[\text{sur } [a, b]]{\text{cvs}} f$ et $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\forall n, f_n \nearrow$ alors $f_n \xrightarrow[\text{sur } [a, b]]{\text{cvu}} f$

démo : prendre une subdivision de pas η (tq $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$)

Penser aux fonctions créneau, pic, escalier, etc...

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow x_0} & \lambda_n \\ \text{Si } n \rightarrow \infty \downarrow \text{cvu sur } A & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ f(x) & & \Lambda \end{array} \quad \text{alors } f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow A} \Lambda$$

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow x_0} & \lambda_n \\ \text{Si } f_n \text{ de } E \text{ dans } F \text{ complet et si } n \rightarrow \infty \downarrow \text{cvu sur } A & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ f(x) & & \Lambda \end{array} \quad \text{alors } \exists \Lambda \in F, \quad f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \Lambda$$

Fonction réglée sur $[a, b]$: $\exists (e_n) \in (\mathcal{E}^{[a,b]})^{\mathbb{N}}, e_n \xrightarrow[\text{sur } [a,b]]{\text{cvu}} f \Leftrightarrow \forall x_0 \in [a, b], f \text{ admet une lim à gauche et à droite}$

Th de Weierstraß : si $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ alors : $\exists (P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}, P_n \xrightarrow[\text{sur } [a,b]]{\text{cvu}} f$ (analogue ds $\mathbb{C}$)

démo : avec les polyû de Bernstein : $E_k(X) = C_n^k X^k (1-X)^{n-k}$, on a : $\sum_{k=0}^n E_k = 1$, $\sum_{k=0}^n k E_k = nX$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1) E_k$ en dérivant $t \mapsto \sum_{k=0}^n C_n^k (tX)^k (1-X)^{n-k}$; d'où $\sum_{k=0}^n k^2 E_k = n(n-1)X^2 + nX$; $P_n(f) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) E_k \xrightarrow[\text{sur } [0,1]]{\text{cvu}} f$

$$\text{mq } \sum_{k \in A_n} E_k(x) \leq \frac{1}{4n\eta^2} \text{ où } A_n = \{k \in [0, n], |\frac{k}{n} - x| \geq \eta\} \text{ avec } \sum_{k=0}^n (k-nX)^2 E_k(X) \leq \frac{n}{4} \text{ et } |\sum_{k=0}^n| \leq |\sum_{k \in A_n}| + |\sum_{k \in [0, n] \setminus A_n}|$$

f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$ ssi il existe une subdivision de $[a, b]$ tq $f|_{[a_i, a_{i+1}[}$ est C^k et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$

Tt application continue par morceaux sur $[a, b]$ est réglée sur $[a, b]$

Tt application continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite d'applications affines par morceaux

Si f est la lim unif sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polyû alors c'est un polyû démo : mq P_n cste APCR avec le critère de Cauchy

7.3 Séries de fonctions

Mêmes propriétés que ci-dessus avec la suite des sommes partielles : $S_N = \sum_{k=0}^N u_k(x)$

(continuité, intégration, dérivation)

Stg $x \mapsto u_k(x)$ cvu sur $A \Leftrightarrow (S_N)$ est de Cauchy

Stg $x \mapsto u_k(x)$ est dite normalement cv ssi : $\exists (\alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}, \text{ stg } \alpha_n \text{ cv et } \forall n, \forall x, \|u_n(x)\| \leq \alpha_n$

Si stg u_n cvn alors stg $x \mapsto u_n(x)$ acvu donc cvu

majorer $u_n(x)$ par α_n (avec éventuellement $\alpha_n = \sup \|u_n(x)\|$)

si $u_n(x)$ est alternée, majorer $|S(x) - S_N(x)|$ avec le cscsa (premier terme non négligé)

Si $(u_k) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^k$ cvu sur $[a, b]$ alors stg $\int_a^b u_k(t) dt$ cv et $\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t) dt$

Si on a cvn de stg $[x \mapsto u_k(x)]$ sur $[a, b]$ alors :

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \|\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\| dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b \|u_k(t)\| dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_1$$

Si $\sum_{k=0}^n u_k(t) \xrightarrow[\text{sur } I]{\text{cvs}} f$ et $\sum_{k=0}^n u'_k(t) \xrightarrow[\text{sur } I]{\text{cvu}} g$ alors f' existe et $f' = g$

7.4 Séries de Fourier

$C_{2\pi}$: ensb des fonctions continues 2π -périodiques

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C} / (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt = \langle f | g \rangle$$

$(e_k = t \mapsto e^{ikt})_{k \in \mathbb{Z}}$ famille orthonormale génératrice des polyû trigonométriques

$$c_k(f) = \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Inégalité de Bessel : $\forall f \in C_{2\pi}^{0,m}, \forall N, \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

$(|c_k(f)|^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable

Si f paire : $c_{-k}(f) = c_k(f)$ impaire $c_{-k}(f) = -c_k(f)$

$$c_k(f') = i k c_k(f) \quad c_k(t \mapsto f(t+a)) = e^{ik a} c_k(f) \quad |c_k(f)| \leq \|f\|_{\infty}$$

$c_k(f^{(j)}) = (ik)^j c_k(f)$ idem avec $f \in C_{2\pi}^{p-1} \cap C^{p,m}$ et la dérivée prolongée arbitrairement

Th de Weierstraß trigonométrique (HP) : tt fonction de $C_{2\pi}$ est la lim unif sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polyû trigonométrq

Théorème de Parseval : $\forall f \in C_{2\pi}^{0,m}, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$

$$\forall (f, g) \in (C_{2\pi})^2, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{c_k(f)} c_k(g)$$

$\tau : (C_{2\pi}, <|>) \rightarrow (l_2(\mathbb{Z}), \varphi) / f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ conserve la norme donc est injective

$\forall f \in C_{2\pi}, [\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0_{C_{2\pi}}]$

Si $f \in C_{2\pi}$, il y a unicité du DSF démo : $f - g \in C_{2\pi}$ et $\forall k, c_k(f - g) = 0 \dots$

Théorème de Dirichlet : $\forall f \in C_{2\pi}^{1,m}, \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ avec $S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx}$

Si $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable alors $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx} \in C_{2\pi}$ et $\forall k, c_k(f) = \gamma_k$

Si $f \in C_{2\pi} \cap C^{1,m}$ alors $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable, $\forall x, f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$

et $[x \mapsto S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx}] \xrightarrow[\text{sur } \mathbb{R}]{\text{cvu}} [x \mapsto f(x)]$

démo : $(c_k(f)^2)$ et $(\frac{1}{(ik)^2})$ sommables donc $(c_k(f) = \frac{c_k(f')}{ik})$ sommable donc $g : t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}$ cvn donc est C^0 et a le m DSF que f donc $f = g$ car $f - g$ est C^0 et th de Parseval

$$a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(jt) dt \quad b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(jt) dt \quad a_j = c_j + c_{-j} \quad b_j = i c_j - i c_{-j}$$

$$c_k = \frac{a_k - i b_k}{2} \quad c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}$$

Th de Dirichlet : $\forall f \in C_{2\pi}^{1,m}, \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^N (a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx) \right]$

Si f paire : $a_j(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(jt) dt$ et $b_j(f) = 0 \dots$

Th de Parseval : si $f \in C^{0,m}$ alors $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k>0} (a_k^2 + b_k^2)$

Lemme de Lebesgue : $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{ikt} dt = 0 \rightarrow$ avec $\cos kt \dots$

démo : si $f \in C^1 : \text{IPP}$; sinon f cste, puis en escalier, puis réglée

Noyau de Dirichlet : $D_N(u) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \cos(ju) = N + \frac{1}{2}$ si $u \in 2\pi\mathbb{Z}$, $= \frac{\sin[(2N+1)\frac{u}{2}]}{2 \sin \frac{u}{2}}$ si $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\int_0^{\pi} D_N(u) du = \frac{\pi}{2}$$

Applications T-périodiques : $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) e^{-ik\omega u} du \quad c_k(f') = i k \omega c_k(f)$$

Formule de Parseval : $\forall f \in C^{0,m}, \frac{1}{T} \int_0^T |f(u)|^2 du = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$

Th de Dirichlet : $\forall f \in C^{1,m}, \frac{1}{2} [f(u^+) + f(u^-)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega u}$

Si $f \in C^0 \cap C^{1,m}, \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ik\omega u} \xrightarrow[\text{sur } \mathbb{R}]{\text{cvu}} f(u)$

f [im]paire : $a_j(f) = c_j + c_{-j} = \frac{2}{T} \int_0^T f(u) \cos(j\omega u) du \quad b_j(f) = i c_j - i c_{-j} = \frac{2}{T} \int_0^T f(u) \sin(j\omega u) du$

Si $f \in C^{1,m} : \frac{1}{2} [f(u^+) + f(u^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^N (a_j \cos j\omega u + b_j \sin j\omega u)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ démo : DSF de $f \in C_{2\pi}^{0,m}$ paire tq $\forall t \in [0, \pi], f(t) = \pi - t$

Penser à : $\sum \frac{1}{k^2} = \sum \frac{1}{(2k)^2} + \sum \frac{1}{(2k+1)^2}$

7.5 Intégration

7.5.1 Calcul

Intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ (permet de virer les ln) bien choisir la cste

Changement de variable : si φC^1 [-difféomorphisme] alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Si $h : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x)dt$ alors $h'(x) = b'(x)f(b(x), x) - a'(x)f(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dx$

Th de Fubini sur les intégrales doubles : $\int_x \int_y = \int_y \int_x$ att : sur des compacts avec f continue

Fractions rationnelles :

$$\int^x \frac{at+\beta}{t^2+pt+q} dt = \frac{\alpha}{2} \int^x \frac{2t+p}{t^2+pt+q} dt + \int^x \frac{\gamma}{(t+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} dt = \frac{\alpha}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{1}{a} \text{Arc tan}(\frac{x+\frac{p}{2}}{a}) + C \text{ avec } a^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

$$\int^x \frac{at+\beta}{(t^2+pt+q)^j} dt = \frac{\alpha}{2} \int^x \frac{(2t+p)dt}{(t^2+pt+q)^j} + \gamma \int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^j} \text{ puis calculer } J_n = \int^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \text{ par réc avec une IPP}$$

Polynôme en sin et cos : $\int^x (\sin t)^{2p+1} (\cos t)^q dt = - \int^{\cos x} (1-u^2)^p u^q du$ avec $u = \cos t$ et vice versa si q impair ou passer par les exp

FR en sin et cos : $u = \tan \frac{t}{2}$ (penser à $1 = \sin^2 + \cos^2$)

Règles de Bioche :

$$f(-t) = -f(t) : u = \cos t \quad f(\pi - t) = -f(t) : u = \sin t \quad f(\pi + t) = f(t) : u = \tan t \quad (\text{hyperbolique : idem})$$

$$f(x) = P(x)e^{Ax} \Rightarrow F(x) = Q(x)e^{Ax} \text{ avec } d^0 Q = d^0 P : \text{dériver } F \text{ puis identification}$$

FR en x et $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{n}} : u = (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{n}}$ d'où u^n d'où t

Intégrales abéliennes (en $\sqrt{ax^2+bx+c}$) : $z = x + \frac{b}{2a}$ puis $\sqrt{a(z^2+h)}$ avec $\sqrt{\text{sh}^2 u - 1} = \text{ch } u$:

$$\sqrt{1+t^2} \rightarrow t = \operatorname{sh} u \quad \sqrt{1-t^2} \rightarrow t = \sin u \quad \sqrt{t^2-1} \rightarrow t = \operatorname{ch} u$$

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} \text{ poser } x = \alpha \cos^2 t + \beta \sin^2 t \text{ avec } t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\alpha| \sqrt{a \frac{x-\beta}{x-\alpha}} \text{ et poser } u = \sqrt{a \frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

$$\text{Si } f(a+b-t) = f(t) \text{ alors } \int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt \quad \text{démo : } \int_a^b (a+b) f(t) dt = \int_a^b t f(t) dt + \int_a^b (a+b-t) f(t) dt = 2 \int_a^b t f(t) dt$$

Penser à dériver les int à paramètre puis réintégrer penser à intégrer le DSE

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \text{ (IPP)} \quad \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

$$\text{Wallis : } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \quad I_{2p} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \quad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$\text{démo : } I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t \cos^2 t dt = \int \cos^{n-1} t (1 - \sin^2 t) dt = I_{n-1} - \int (\cos^{n-1} t \sin t) \sin t dt \Rightarrow I_{n+1} = I_{n-1} - \frac{1}{n} I_{n+1}$$

$$\Gamma \text{ d'Euler : } \Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*, C^\infty, \text{ convexe, } \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

7.5.2 Intégrabilité

Une fonction bornée ou prolongeable par continuité est intégrable

Fonctions continues : intégrables sur un segment ; de même si la primitive est bornée

f intégrable ssi $|f|$ intégrable

Utiliser $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^x f(t) dt$ (d'abord vérifier que f intb)

Si g à valeurs ds $\mathbb{R}_+$ intégrable et si $f = O(g)$ (resp $f \sim g$) alors f intégrable et $\int_x^b f = O(\int_x^b g)$ (resp $\sim$)

Si g à valeurs ds $\mathbb{R}_+$ non intégrable et $f = o(g)$ (resp $f \sim g$) alors $\int_a^x f = o(\int_a^x g)$ (resp $\int_a^x f \sim \int_a^x g$)

   recherche d'équivalents (eventuellement précédé par une IPP)

ex : $\int_x^\infty e^{-t^2} dt \sim_\infty ?$ rechercher $h(t)$ tq $(h(t) e^{-t^2})' \sim e^{-t^2} \dots$

$e^{-\lambda t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Intégrales de Riemann ($a > 0$) : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$; intégrable sur $]0, a]$ ssi $\alpha < 1$

Critère de Riemann :

si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ ($\alpha > 1$) alors $f = o(\frac{1}{t^\alpha})$ donc f intégrable sur $[a, +\infty[$ (idem avec $\alpha < 1$ sur $]0, a]$)

Intégrales de Bertrand : $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ intb sur $[e, \infty[\Leftrightarrow (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$

Si $f \searrow$ et est à valeurs ds $\mathbb{R}_+$ alors $\operatorname{stg} \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \operatorname{cv}$ et : $\operatorname{stg} f(n) \operatorname{cv} \Leftrightarrow f$ intb sur $[A, \infty[$

7.5.3   tudes théoriques

Une application réglée sur K est bornée sur K

$$\| \int_a^b f \| \leq \int_a^b \| f \|$$

On intègre composante par composante

Si $f \in C^0([a, b] \times K, \mathbb{R})$ avec K compact alors $x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$ est C^0 sur K (idem si $K = E$ de dim finie)

Si $f \in C^0$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0$ (en (x, t)) alors $x \mapsto \varphi(x) = \int_a^b f(t, x) dt$ est C^1 et $\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$

Si f est C^0 à valeurs ds $\mathbb{R}_+$ alors $\int_I f = 0 \Rightarrow \forall x \in I, f(x) = 0$

Si f intb sur $[a, \infty[$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lambda$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lambda = 0$

Penser à traiter f cste, puis en escalier, puis réglée

Changement de variable $\varphi \in C^1$ strictement monotone (difféomorphisme)

$$\text{si } \varphi \text{ monotone : } \int_{\varphi(I)} f = \int_I f \circ \varphi \times |\varphi'|$$

Sommes de Riemann : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f(x) dx$

impropres : si f est C^0 , positive, monotone et intb sur $]a, b[$ alors $\int_0^{\frac{n-1}{n}} f \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) \leq \int_{1/n}^1 f$

si f est C^0 , positive, $\searrow$ et intb sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $\sum_{n=1}^\infty h f(nh) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \int_0^\infty f$

Formule de la moyenne : si $g \leq 0$ alors $\exists c \in [a, b], \int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$

en particulier : $\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a)$

Inégalité de Cauchy-Schwartz : $(\int_a^b f g)^2 \leq (\int_a^b f^2)(\int_a^b g^2)$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Théorème de convergence monotone :

si (f_n) suite $\nearrow$ de fonctions réelles intb sur I tq $f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{\text{cvs}} f$ alors f intb sur I ssi $(\int_I f_n)_n$ est majorée et $\int_I f = \sup_n \int_I f_n = \lim_n \int_I f_n$

Corollaire :

si (u_k) suite de fonctions ≥ 0 intb sur I tq la stg u_k cvs vers f sur I alors f intb sur I ssi la stg $\int_I u_k$ cv et $\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_k = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_k$

Théorème de convergence dominée :

si (f_n) suite de fonctions ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intb sur I et $\varphi \geq 0$ intb sur I tq $f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{\text{cvs}} f$ et $\forall n, |f_n| \leq \varphi$ alors f est intb sur I et :
 $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$ (penser à l'appliquer sur un intervalle)

Intégration terme à terme :

si (u_k) suite de fonctions ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intb sur I tq stg u_k cvs sur I vers f alors si stg $\int_I |u_k|$ cv alors f intb sur I , $\int_I |f| = \int_I \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_I |u_k|$ et $\int_I f = \int_I \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I u_k$

Théorème de continuité :

si f ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue sur $D \times I$ et $\forall x \in D, t \mapsto f(x, t)$ intb sur I et $\varphi \geq 0$ intb sur I tq $\forall (x, t), |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ alors $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est continue sur D

pour la continuité : penser à séquentialiser $\rightarrow$ TCD

Théorème de dérivation :

mêmes hyp avec D intervalle de $\mathbb{R}$ et f tq $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et vérifie aussi ces hyp alors g est C^1 sur D et $\forall x \in D, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Penser à utiliser le cscsa

Suites d' $\int_{\alpha_n}^{\beta_n}$: utiliser $\chi_{[\alpha_n, \beta_n]}$ pr se ramener sur un compact

Lemme de Lebesgue : $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{-int} dt = 0$

Si $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \int_a^b t^p f(t) dt = 0$ alors $f = 0$ démo : th de Weierstraß

7.6 Equations différentielles

$y' + a(t)y = b(t)$ sg : $t \mapsto \alpha e^{-A(t)}$ démo : avec $f(t) = e^{-A(t)} y(t)$

Le pb de Cauchy : $y'(t) = u[y(t)]$ et $y(t_0) = y_0$ admet une sol unique $\mathcal{Y}_{(t_0, y_0)}$

Si $(y_1, \dots, y_p) \in S_h$ alors $\forall t_0, \text{rg}(y_1, \dots, y_p) = \text{rg}(y_1(t_0), \dots, y_p(t_0))$ démo : $\tau_{t_0} : F \rightarrow S_h / y_0 \mapsto \mathcal{Y}_{(t_0, y_0)}$ isomorphisme

$\dim S_h = \dim F = n$

$\overrightarrow{y'(t)} = u[\overrightarrow{y(t)}]$ avec u diagonalisable : $\exists (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^2, \forall t \in J, \overrightarrow{y(t)} = \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$

Le pb de Cauchy : $Y'(t) = AY(t)$ et $Y(t_0) = Y_0$ admet une sol unique $\mathcal{Y}_{(t_0, Y_0)}(t) = \exp[(t - t_0)A] \cdot Y_0$

démo : avec $F(t) = \exp(-tA)Y(t)$

$\dim S_H = \dim F = n$ le rang d'une famille de solutions ne dépend pas de t

Raccords : même limite en x_0 , même dérivée en x_0 , la sol en x_0 convient

Matrice Wronskienne : $\mathcal{W}(t)$: n solutions en vecteurs colonnes

$(Y_1, \dots, Y_n)$ base de $S_H \Leftrightarrow \exists t_0, \mathcal{W}(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t, \mathcal{W}(t) \neq 0$

$\det \mathcal{W}(t) = \det \mathcal{W}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds\right)$

Variation de la constante : sp ss la forme $\lambda(x)e^{-B(x)}$

Méthode de Lagrange : si $\sum_{j=1}^n k_j Y_j$ SEH, poser $Y(t) = \sum_{j=1}^n k_j(t) Y_j = \mathcal{W}(t) \vec{K}(t)$ alors $\mathcal{W}(t) \vec{K}' = B(t)$

d'où $\vec{K}' = \mathcal{W}(t)^{-1} B(t)$

Th de Cauchy-Lipschitz linéaire :

le pb de Cauchy $\overrightarrow{y'(t)} = u(t)[\overrightarrow{y(t)}] + \overrightarrow{b(t)}$ et $\overrightarrow{y(t_0)} = \overrightarrow{y_0}$ admet une sol unique définie sur J entier

$\dim S_H = \dim F = n$ le rang d'une famille de solutions ne dépend pas de t

$\varphi : S_h \rightarrow S_h / y \mapsto (y, y')$ est un isomorphisme d'EV $\dim S_H = 2$

Cas particulier : $y'' + f(t)y = 0$ alors $\mathcal{W}(t) = \text{cst}$

Changement de var $t = \varphi(x)$ où φ est un difféomorphisme (bijection bidérivable) : poser $z(t) = y(x) = y(\varphi^{-1}(t))$

Coeffs csts : racines de l'éq caractéristique sur $\mathbb{C}$

$y'' + by' + c = f(x)$ sg : $\alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ $(\alpha x + \beta) e^{r_0 x}$ $e^{\alpha x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

EDLH : si on connaît une sp y^* , poser : $y = zy^*$

$\sum a_i y(x) = \gamma(x)$ avec $\gamma(x) = P(x)$ poly $\hat{n}$ [resp $P(x)e^{\lambda x}$] chercher une sp ss la forme $x^m P(x)$ [resp $x^m P(x)e^{\lambda x}$] avec m multiplicité de 0 comme racine du poly $\hat{n}$ caractéristiq

ED à variables séparables ?

$P(x, y) + y'Q(x, y) = 0$ avec $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et U étoilé ?

ED de Newton : $y'' = f(y)$: multiplier par y'

ED d'Euler : $ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$: poser $t = \ln x$

ED de Bernoulli : $y' = a(x)y + b(x)y^p$: poser $z = \frac{1}{y^{p-1}}$

ED de Ricatti : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ avec y^* sp : poser $y = y^* + z$

Si $F(\lambda x, \lambda y, y') = \lambda^\alpha F(x, y, y')$ poser $y(x) = x m(x) \rightarrow$ ED à var sép

$F(t, y, y') = 0 \quad y' = f(t, y)$

Si t n'apparaît pas ds l'éq alors l'ensb des sols est "invariant par translation"

Solution maximale : on ne peut pas la prolonger

Th de Cauchy-Lipschitz : si U est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ sur lequel f est définie et C^1 alors $\forall (t_0, y_0) \in U$, il existe une unique solution maximale (I, ϕ) de $E_{(t_0, y_0)}$ avec contrainte $(t, y(t)) \in U$

tt autre sol est une restriction de (I, ϕ)

il y unicité locale au pb de Cauchy : $\exists \varepsilon$ tq $\exists$ une sol $(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \varphi)$

Th de Cauchy-Lipschitz pr les éq du second ordre : sur l'ouvert U , avec $g \in C^1$ le pb de Cauchy : $y'' = g(t, y, y')$, $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une solution maximale unique (I, ϕ)

Tt solution non nulle de $y'' = a(t)y' + b(t)y$ admet un nb fini de zéros sur tt segment $[\alpha, \beta]$

démo : compact $\rightarrow$ prendre une ss-suite d'élémts distincts qui cv vers l et $y'(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(u_n) - y(l)}{u_n - l} = 0$

Si $y' = f(t, y)$ avec f bornée alors tt sol max à un intervalle de déf égal à $\mathbb{R}$

démo : supposer $]a, b[$ et prolonger en b car $y(b) = y_0 + \int_{t_0}^b y'(t) dt$

Lemme de Gronwall : $f, u \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ tq $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M + \int_a^x |f(t)||u(t)| dt$ alors $|f(x)| \leq M \exp \left[\int_a^x |u(t)| dt \right]$

démo : poser $g(x) = M + \int_a^x |f(t)||u(t)| dt$ et majorer $\frac{g'}{g}$ si $M > 0$

7.7 Fonctions de plusieurs variables

$f : U \rightarrow F$ est différentiable ssi $\exists l \in \mathcal{L}(E, F), \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in U}} \frac{f(a+h) - f(a) - l(h)}{\|h\|} = 0$

f admet un DL à l'ordre 1 en a : $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Si $E = \mathbb{R}$, f différentiable en $t_0 \Leftrightarrow f$ dérivable en t_0 et $d_{t_0} f(1) = f'(t_0)$

f différentiable en $a \Rightarrow f$ continue en a

Dérivée partielle : $d_a f(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t\vec{v}) - f(a)}{t}$

Différentielle : $d_a f : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

$df : a \mapsto d_a f \quad df = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ avec $dx_i = \eta_i^* : (h_1, \dots, h_p) \mapsto h_i \quad d_a(\eta_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_j f(a)$

$f \in C^1 \Leftrightarrow df \in C^0$

f est C^1 sur $U \Leftrightarrow \forall i \in [1, n], f_i = p_i \circ f$ est C^1 sur U

Si $\psi : x \mapsto \varphi[f(x), g(x)]$ alors $d_a \psi(h) = \varphi[d_a f(h), g(a)] + \varphi[f(a), d_a g(h)]$

$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$

Si f est cste, $\forall a, d_a f = 0$

Si f est affine, $\forall a, d_a f = \vec{f}$

Les applications linéaires sont leurs propre différentielle

Avec $N(x) = \|x\| : d_x N(h) = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$ démo : $N : x \mapsto \sqrt{} \mapsto \|x\|^2$

Si f bijective d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ ds un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est différentiable en un pt a et si f^{-1} l'est en $b = f(a)$ alors $n = p$ et $d_{f(a)} f^{-1} = (d_a f)^{-1}$

Une application est différentiable ssi elle l'est composante par composante

Si $f \in C^1$ alors $\forall j \in [1, p], \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0$

Si $\forall j \in [1, p], \frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe et est C^0 sur U alors f est différentiable sur U et est C^1

Sur $U : f \in C^1 \Leftrightarrow \forall i, f_i = p_i \circ f \in C^1 \Leftrightarrow \forall i, j, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est C^0

Matrice jacobienne : $Jf(a) = \text{Mat}_{(\eta, \varepsilon)}(d_a f) \quad Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j}$

$f: C^1 \Leftrightarrow a \mapsto Jf(a) C^0$
 $d_a f$ isomorphisme $\Leftrightarrow \det Jf(a) \neq 0$

Si $h = g \circ f$ alors $\frac{\partial h_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$

Si $g(t) = f(u_1(t), \dots, u_p(t))$ alors $g'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} [u_1(t), \dots, u_p(t)] u_i'(t)$

f est un C^1 -difféomorphisme ssi f bijection et f et f^{-1} sont de classe C^1

Si f est injective d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ ds $\mathbb{R}^n$ et $\forall a, d_a f$ est un isom d'ev alors $n = p$, $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^1 -difféomorphisme de U sur V

Th d'inversion locale : si $f \in C^1(U, F)$ et si $d_a f$ isomorphisme alors f est localement un C^1 -difféomorphisme

Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ injective et si $\forall x \in U, d_x f$ isomorphisme alors $p = n$, $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^k -difféomorphisme de U sur V

Passage en polaires : $x dx + y dy = r dr \quad x dy - y dx = r^2 d\theta$

Si U ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ tq $\exists M, \forall x \in U, \|d_x f\| < M$ alors $\forall (a, b) \in U^2, \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$
 f est alors unif continue sur U

Si $\forall x \in U, d_x f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)}$ alors f est cste sur U

Formule des accroissements finis : avec $f \in C^1(U, \mathbb{R}) : \exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = d_c f(b - a) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(c) | b - a \rangle$

$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right) \quad d_a(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \vec{v} \rangle$

Hessienne : $Hf(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(v) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(v) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(v) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(v) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(v) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(v) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(v) \end{pmatrix} \quad q_a(v) = {}^t v \cdot Hf(a) \cdot v$

Si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, pr $\vec{v}$ fixé : $f(a + t\vec{v}) = f(a) + td_a f(v) + \frac{t^2}{2} q_a(v) + o(t^2)$ démo : Taylor avec $\varphi : t \mapsto f(a + t\vec{v})$
 $f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Pt critique a de $f : d_a f = 0$

Si f admet un extremum local en a alors $d_a f = 0$

Si a est un pt critique de $f : a$ est un maximum [resp min] relatif de f ssi q_a forme négative [resp positive]

Si a pt critique et si q_a définie positive alors a min relatif strict de f sur U

Si f continue tq $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ alors f admet un min absolu qui est atteint

Si A partie convexe et f convexe alors tt min relatif de f sur A est min absolu sur A démo : avec $z_t = x_0 + t(y - x_0)$

Passage en polaires : $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow \Delta / (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un C^1 -difféomorphisme de bijection réciproque : $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \text{Arc tan } \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}})$

Th de Fubini

Th du changement de variable :

$\iint_{\tau(U)} f(x, y) dx dy = \iint_U f \circ \tau(u, v) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad \text{où } \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = J\tau(u, v) \text{ avec } \tau : (u, v) \mapsto (x, y)$

Représentation polaire : $\iint_{\tau(U)} f(x, y) dx dy = \iint_U f \circ \tau(r, \theta) |r| dr d\theta$

Représentation sphérique : $\iiint_{\tau(U)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f \circ \tau(r, \theta, \varphi) |r^2 \sin \theta| dr d\theta d\varphi$

Pour l'ellipse, poser : $(x, y) = (a \lambda \cos t, b \lambda \sin t)$

Théorème de Schwartz : si $f \in C^k, \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$

$\text{div } \vec{F} = \text{tr}(d_a f)$

Forme différentielle : application de U ds $\mathbb{R}^{3*}$

Forme différentielle exacte α : il existe un champ scalaire f (primitive de α) tq $d_{(x, y)} f = \alpha(x, y)$

Si $\alpha = \langle \vec{F} | (dx, dy, dz) \rangle$ on a : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ ($\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire) donc $\text{rot } \vec{F} = 0$

Forme différentielle fermée : vérifie Schwartz $\alpha = P dx + Q dy : \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Ensemble étoilé : $\exists M_0 \in A, \forall M \in A, [M_0, M] \subset A$

Th de Poincaré : une forme différentielle définie sur un ouvert étoilé est exacte ssi elle est fermée

Intégrale curviligne : $I = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz') dt = \int_a^b \alpha[\varphi(t)](\varphi'(t)) dt$

pr une forme différentielle exacte : $I = f[\varphi(b)] - f[\varphi(a)] \quad I$ ne dépend que des extrémités de l'arc

Formule de Green-Riemann :

si $\alpha = P \, dx + Q \, dy$ forme différentielle, $P, Q \in C^1$, D domaine défini par un arc fermé Γ alors $\int_{\Gamma} \alpha = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy$

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx \, dy = \int_{\Gamma} x \, dy = \int_{\Gamma} -y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x \, dy - y \, dx) \quad \text{pol : } \alpha = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$$

8 Formules

8.1 Trigonométrie

8.1.1 Dérivées

$$\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$(\cos)'(x) = -\sin x$	$(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$
$(\sin)'(x) = \cos x$	$(\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x$
$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{th})'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{Arc} \cos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{Arg} \operatorname{ch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$(\operatorname{Arc} \sin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{Arg} \operatorname{sh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$(\operatorname{Arc} \tan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{Arg} \operatorname{th})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

8.1.2 Composées

$$\cos(\operatorname{Arc} \cos x) = x$$

$$\sin(\operatorname{Arc} \sin x) = x$$

$$\tan(\operatorname{Arc} \tan x) = x$$

$$\cos(\operatorname{Arc} \sin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\operatorname{Arc} \cos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\operatorname{Arc} \tan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{Arc} \tan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\operatorname{Arc} \cos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\tan(\operatorname{Arc} \sin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x) = x$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x) = x$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{Arg} \operatorname{th} x) = x$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Arg} \operatorname{th} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{sh}(\operatorname{Arg} \operatorname{th} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{Arg} \operatorname{ch} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\operatorname{th}(\operatorname{Arg} \operatorname{sh} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

8.1.3 Addition, linéarisation, factorisation, duplication, ...

$$\operatorname{Arc} \sin x + \operatorname{Arc} \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arc} \tan x + \operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \times \operatorname{sgn} x \rightarrow \text{DL}$$

	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ $\cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$	$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ $\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$
Addition	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\cos(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$ $\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$
Linéarisation	$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)]$ $\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)]$ $\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)]$
Factorisation	$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$	$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{ch} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2}$ $\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b}{2}$ $\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a+b}{2} \operatorname{ch} \frac{a-b}{2}$ $\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} b = 2 \operatorname{sh} \frac{a-b}{2} \operatorname{ch} \frac{a+b}{2}$
Duplication	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$ $= 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 a$ $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$ $\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$
$t = \tan\left(\frac{h}{2}\right)$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$	$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$ $\operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\sin^2 \rightarrow -\operatorname{sh}^2 \text{ et } \tan^2 \rightarrow -\operatorname{th}^2$$

8.2 Primitives

f(x)	F(x)		
λ	λx	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\ln x$	$x \ln x - x$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotg x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\th x$	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\coth x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\cotg x$	$\ln \sin x $
$\th x$	$\ln(\cosh x)$	$\coth x$	$\ln \sinh x $
$\frac{1}{\sinh x}$	$\ln \tanh \frac{x}{2} $	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) $
$\frac{1}{\cosh x}$	$\ln \th \frac{x}{2} $	$\frac{1}{\sinh x}$	$2 \operatorname{Arc tan}(e^x)$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arc tan} \frac{x}{a}$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right \quad (= \frac{1}{a} \operatorname{Arc th} \frac{x}{a} \text{ sur }]-a, a[)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\operatorname{Arg sh} \frac{x}{a} = \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} $	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\operatorname{Arc sin} \frac{x}{a}$
		$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 - a^2} \quad (= \operatorname{Arg ch} \frac{x}{a} \text{ sur }]a, +\infty[)$

8.3 Développements en séries entières

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ \frac{1}{(1-x)^p} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p-1}^{p-1} x^k \quad \text{démonstration : dériver } p \text{ fois } \frac{1}{1-x} \\ e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ \operatorname{Arc tan} x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \\ \operatorname{Arc sin} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{120} + \dots \\ \operatorname{Arc cos} x &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc sin} x \end{aligned}$$

Encore vraies pour $x \in \mathbb{C}$; fonctions hyperboliques : remplacer $(-1)^k$ par 1

8.4 Divers

$$\begin{aligned} A_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!} \quad \binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ C_n^{n-p} &= C_n^p \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p \\ C_n^0 &= C_n^n = 1 \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \quad A_n^0 = 1 \quad A_n^1 = n \quad A_n^n = n! \\ (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \\ a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Comparaison des moyennes : } \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq (a_1 \times \dots \times a_n)^{1/n}$$

démonstration : 1 : i.c.s : $n^2 \leq (\sum a_i)(\sum \frac{1}{a_i})$; 2 : concavité du $\ln$

$$\frac{1}{(p+q)!} \leq \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \quad \text{démonstration : } C_{p+q}^p = \frac{(p+q)!}{p!q!} \geq 1$$

$$\text{Formule de Stirling : } n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\begin{aligned} x - \frac{x^2}{2} &\leq \ln(1+x) \leq x \quad e^x \geq 1+x \\ |\sin x| &\leq |x| \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin t \geq \frac{2}{\pi} t \quad (\text{car } \sin \text{ est concave sur } [0, \frac{\pi}{2}]) \quad \left| \frac{\sin(nu)}{\sin u} \right| \leq n \quad (\text{par réc avec } \sin(n+1)u = \dots) \\ \tan x &\geq x \\ \cos^{(n)} x &= \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \quad \sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u| - |v| &\leq |u - v| \\ |uv| &\leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{car } (|u| - |v|)^2 \geq 0) \\ z\bar{z}' + z'\bar{z} &\leq |z|^2 + |z'|^2 \quad (\text{car } 0 \leq |z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - z\bar{z}' - z'\bar{z}) \end{aligned}$$

$$k^2 = i \Leftrightarrow k = \pm \frac{1-i}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} = n \text{ si } p|n / 0 \text{ sinon}$$

$$\text{Arc cos } \sim_1 \sqrt{1-x^2} \text{ car Arc cos } 1 = 0 \text{ donc Arc cos } x \sim_1 \sin(\text{Arc cos } x)$$