Présentation d'une sémantique de jeux pour la quantification du premier ordre

Samuel Mimram

Journées de l'ANR INVAL

25 septembre 2008

1. Une sémantique interactive des dépendances du premier ordre
2. Une présentation polygraphique de la sémantique

Présentations polygraphiques de catégories

$\boxed{\text{Présentations par générateurs et relations}}$

- Décrivent les catégories comme des structures algébriques libres
- Peuvent fournir des descriptions finies des catégories
- Sont intéressantes techniquement (ex : composition)

Première partie I

Causalité en logique propositionnelle du premier ordre

Logique propositionnelle du premier ordre

Formule : $A \quad ::= \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \wedge A \quad | \quad A \vee A$

Logique propositionnelle du premier ordre

Formule : $$A \quad ::= \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \wedge A \quad | \quad A \vee A$$

- Quantificateurs du premier ordre :

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.P, \Delta}(\forall) \qquad \frac{\Gamma \vdash P[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.P, \Delta}(\exists)$$

Logique propositionnelle du premier ordre

Formule : $\quad A \quad ::= \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \wedge A \quad | \quad A \vee A$

- Quantificateurs du premier ordre :

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.P, \Delta}(\forall) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash P[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.P, \Delta}(\exists)$$

- Connecteurs :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}(\wedge) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}(\vee)$$

- ...

Causalité dans les preuves

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}}{\Gamma \vdash A, \forall y.B, \Delta}(\forall)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \forall y.B, \Delta}(\forall)$$

Causalité dans les preuves

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}}{\Gamma \vdash A, \forall y.B, \Delta}(\forall)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \forall y.B, \Delta}(\forall)
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B, \Delta}}{\Gamma \vdash \forall x.A, B, \Delta}(\forall)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \forall y.B, \Delta}(\forall)
$$

Causalité dans les preuves

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B[t'/y], \Delta}}{\Gamma \vdash A[t/x], \exists y.B, \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \exists x.A, \exists y.B, \Delta}(\exists)
\quad \leadsto \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B[t'/y], \Delta}}{\Gamma \vdash \exists x.A, B[t'/y], \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \exists x.A, \exists y.B, \Delta}(\exists)
$$

Causalité dans les preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B, \Delta}}{\Gamma \vdash A[t/x], \forall y.B, \Delta}(\forall)}{\Gamma \vdash \exists x.A, \forall y.B, \Delta}(\exists) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A[t/x], B, \Delta}}{\Gamma \vdash \exists x.A, B, \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \exists x.A, \forall y.B, \Delta}(\forall)$$

Causalité dans les preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B[t/y], \Delta}}{\Gamma \vdash A, \exists y.B, \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \exists y.B, \Delta}(\forall) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B[t/y], \Delta}}{\Gamma \vdash \forall x.A, B[t/y], \Delta}(\forall)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \exists y.B, \Delta}(\exists)$$

Causalité dans les preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B[t/y], \Delta}}{\Gamma \vdash A, \exists y.B, \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \exists y.B, \Delta}(\forall) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, B[t/y], \Delta}}{\Gamma \vdash \forall x.A, B[t/y], \Delta}(\forall)}{\Gamma \vdash \forall x.A, \exists y.B, \Delta}(\exists)$$

Si $x \notin \mathrm{FV}(t)$!

Causalité dans les preuves

Les dépendances essentielles induites par les preuves sont

$$\forall x \dashrightarrow \exists y$$

où le témoin t fourni pour y admet x comme variable libre.

Jeux

Formules : $$A \quad = \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \wedge A \quad | \quad A \vee A$$

$$\forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)$$

Formules : $A \quad = \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \wedge A \quad | \quad A \vee A$

$$\boxed{\text{jeu} \quad = \quad \text{formule} \quad = \quad \text{arbre de coups (Joueur / Opposant)}}$$

$\forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)$

Jeux

Formules : $\quad A \;=\; \exists x.A \;\mid\; \forall x.A \;\mid\; A \wedge A \;\mid\; A \vee A$

$$\boxed{\text{jeu} \quad = \quad \text{formule} \quad = \quad \text{arbre de coups (Joueur / Opposant)}}$$

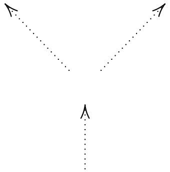
$$\forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \forall & & \exists \\ & \forall \arrow[ul, dotted] \arrow[ur, dotted] & \\ & \forall \arrow[u, dotted] & \end{tikzcd}$$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

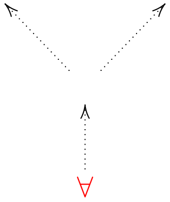
$$\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)$$

$\rightsquigarrow$



$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

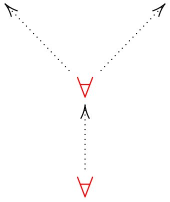
$$\dfrac{\vdash \forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$



Stratégies

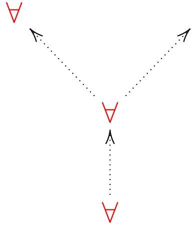
$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}}{}}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}}{\vdash \forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}(\forall) \quad \rightsquigarrow$$



$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}}{\vdash P, \exists z'.Q}}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}\,(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall) \quad \rightsquigarrow$$



$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

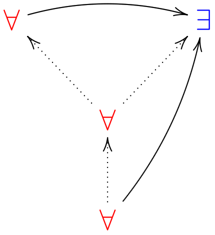
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \lor \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \lor \exists z'.Q)}(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd}
\forall & & \exists \\
& \forall \arrow[ul, dotted] \arrow[ur, dotted] & \\
& \forall \arrow[u, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$

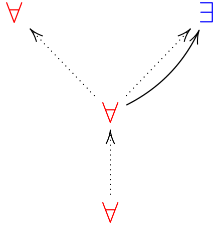


Variables libres de t : $\{x, z\}$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}\,(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}\,(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$

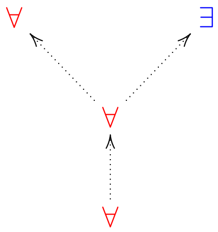


Variables libres de t : $\{y\}$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendance sur les coups du jeu}}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}\,(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}\,(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \vee \exists z'.Q)}\,(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$



Variables libres de t : $\emptyset$

Stratégies causales

$$\begin{aligned} \text{jeu } A &= \text{ordre partiel sur les coups} \\ \text{stratégie } \sigma &= \text{relation sur les coups} \end{aligned}$$

Stratégies causales

$$\begin{array}{rcl} \text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} \\ \text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} \end{array}$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

1. si $m \ \sigma \ n$ alors m opposant et n joueur
2. la relation $\leq_A \ \cup \ \sigma$ est acyclique

Stratégies causales

$$\begin{array}{rcl} \text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} \\ \text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} \end{array}$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

1. si $m \ \sigma \ n$ alors m opposant et n joueur

Interdit :

$$\begin{tikzcd} \color{red}{\forall} \\ \color{blue}{\exists} \arrow[u, dotted] \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

Stratégies causales

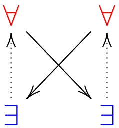
jeu A	$=$	ordre partiel sur les coups
stratégie σ	$=$	relation sur les coups

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

2. la relation $\leq_A \cup \sigma$ est acyclique

Interdit :

et



Stratégies causales

$$
\begin{array}{rcl}
\text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} \\
\text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups}
\end{array}
$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

❷ la relation $\leq_A \cup \sigma$ est acyclique

Interdit :

$$
\begin{tikzcd}
\forall \arrow[d, bend left] \\
\exists \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
\forall \arrow[dr] & \forall \arrow[dl] \\
\exists \arrow[u, dotted] & \exists \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
\quad \text{mais pas} \quad
\begin{tikzcd}
\exists & \exists \\
\forall \arrow[u, dotted] \arrow[ur] & \forall \arrow[u, dotted] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Une première étape

On traitera ici le cas des formules dont les connecteurs sont restreints aux feuilles :

$$\forall x_1.\forall x_2.\exists x_3.\forall x_4.\exists x_5.\exists x_6.\forall x_7 \ \dots \ P(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

On peut ainsi construire une catégorie monoïdale **Jeux** des jeux et stratégies causales.

On peut ainsi construire une catégorie monoïdale **Jeux** des jeux et stratégies causales.

Rem : la compositionalité des stratégies n'est pas évidente.

Deuxième partie II

Présentation polygraphiques de catégories monoïdales

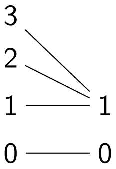
La catégorie simpliciale

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.



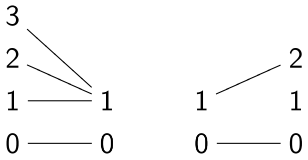
$: [4] \to [2]$

La catégorie simpliciale

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

C'est une catégorie : composition horizontale ($\circ$)

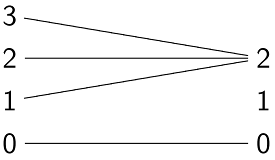


La catégorie simpliciale

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

C'est une catégorie : composition horizontale ($\circ$)

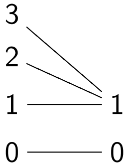


La catégorie simpliciale

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Cette catégorie est monoïdale : composition verticale ($\otimes$)



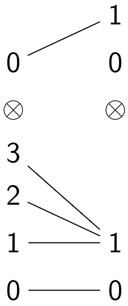
$: [4] \to [2]$

La catégorie simpliciale

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Cette catégorie est monoïdale : composition verticale ($\otimes$)



$: [1] \to [2]$

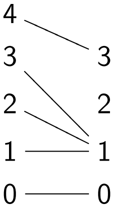
$: [4] \to [2]$

La catégorie simpliciale

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Cette catégorie est monoïdale : composition verticale ($\otimes$)

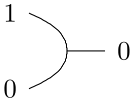


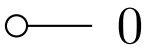
$: [5] \to [4]$

Une théorie des monoïdes

La catégorie Δ contient deux morphismes générateurs :

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$

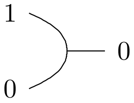


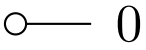


Une théorie des monoïdes

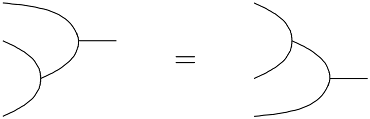
La catégorie Δ contient deux morphismes générateurs :

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$

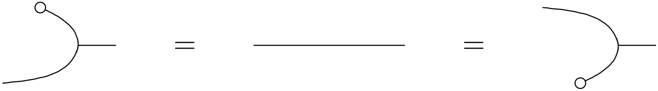




qui vérifient :



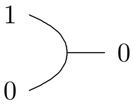
et

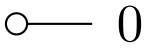


Une théorie des monoïdes

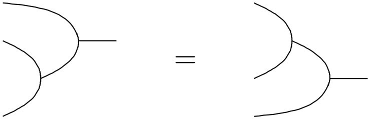
La catégorie Δ contient deux morphismes générateurs :

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$





qui vérifient :

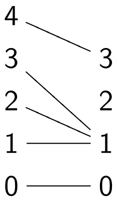


et

$\boxed{\mu \text{ et } \eta \text{ engendrent } \Delta}$

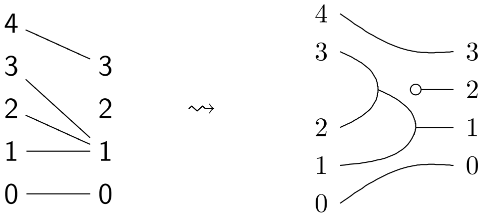
Une théorie des monoïdes

$\boxed{\mu \text{ et } \eta \text{ engendrent } \Delta}$



Une théorie des monoïdes

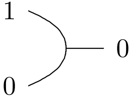
$\boxed{\mu \text{ et } \eta \text{ engendrent } \Delta}$

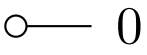


Une présentation de la catégorie Δ

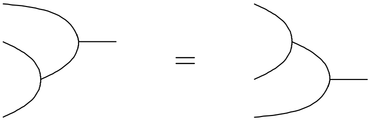
La catégorie Δ est isomorphe à la catégorie monoïdale libre sur les deux générateurs

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$

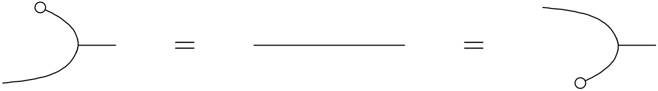




quotientée par les relations



et



Une théorie des monoïdes

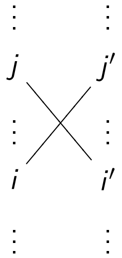
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{foncteur monoïdal strict } \Delta \to \mathcal{C} \\ = \\ \text{monoïde dans } \mathcal{C}\end{array}}$$

$$\mathbf{Mon}(\mathcal{C}) \quad \cong \quad \mathbf{StrMonCat}(\Delta, \mathcal{C})$$

Définition externe / interne

Deux formulations équivalentes des monoïdes :

- formulation *externe* : critère d'acyclicité (croissance)



$$i \leq j \quad \Rightarrow \quad f(i) \leq f(j)$$

- formulation *interne* : générateurs + relations

La théorie des jeux

foncteur monoïdal $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$

$=$

monoïde dans $\mathcal{C}$

La théorie des jeux

foncteur monoïdal **Jeux** $\to \mathcal{C}$

$=$

? ? ? ? ?

La théorie des jeux

foncteur monoïdal **Jeux** $\to \mathcal{C}$

$=$

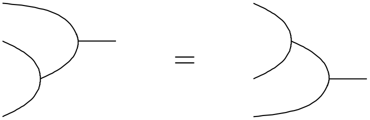
? ? ? ? ?

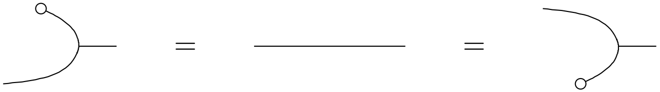
La théorie correspondante est une variante polarisée des relations.

Catégorie simpliciale Δ : entiers et fonctions croissantes.

- Générateurs :

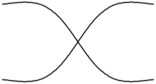
- Relations :



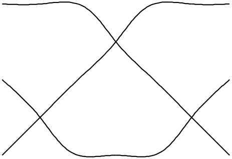


Catégorie **Bij** : entiers et bijections.

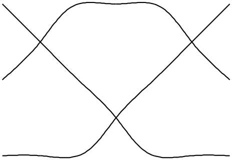
- Générateurs :

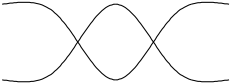


- Relations :



=

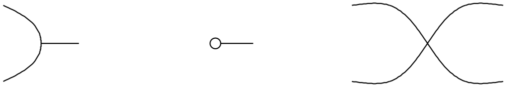




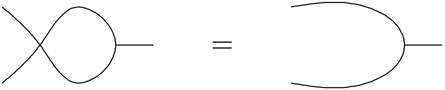
=

Catégorie **F** : entiers et fonctions.

- Générateurs :



- Relations : monoïde + symétrie +



$\dots$

Catégorie $\mathbf{F}^{\mathrm{op}}$: entiers et fonctions.

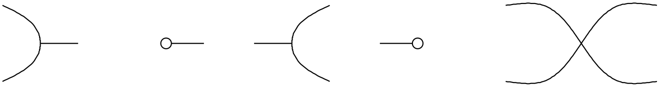
- Générateurs :

- Relations :

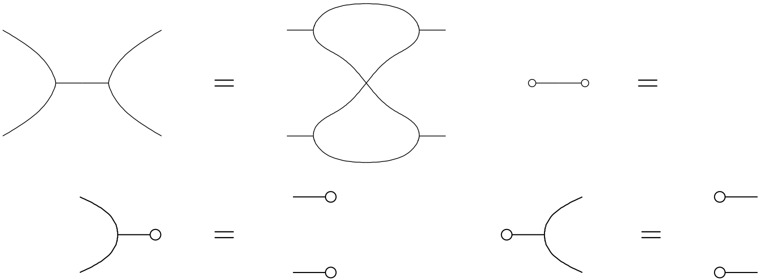
$$\ldots$$

Catégorie **Mat**($\mathbb{N}$) : entiers et matrices à coefficients dans $\mathbb{N}$.

- Générateurs :

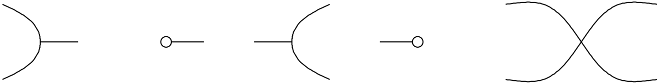


- Relations : monoïde commutatif + comonoïde commutatif +



Catégorie **FRel** : entiers et relations.

- Générateurs :



- Relations : bigèbre bicommutative +

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

- les objets sont les entiers
$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$
munis d'une fonction de polarisation
$$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

$$\begin{tikzcd}
3 \\
2 \arrow[u, dotted] \\
1 \arrow[u, dotted] \\
0 \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

- les objets sont les entiers

  $$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

  munis d'une fonction de polarisation

  $$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

$$\forall$$

$$\exists$$

$$\forall$$

$$\exists$$

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

- les objets sont les entiers

  $$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

  munis d'une fonction de polarisation

  $$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

$$\begin{array}{cc} \forall & \forall \\ \exists & \exists \\ \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{array}$$

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

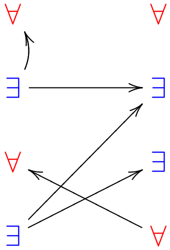
- les objets sont les entiers

$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

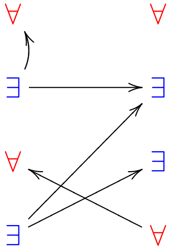
  munis d'une fonction de polarisation

$$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

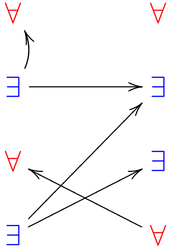
- les morphismes sont les stratégies causales.



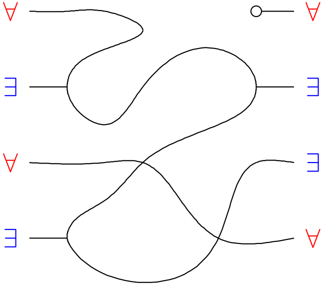
La structure des fils



La structure des fils



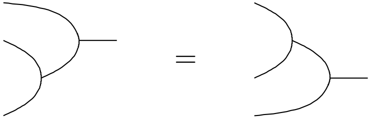
$\rightsquigarrow$



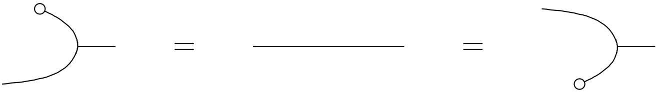
Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un monoïde

i.e. vérifie



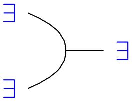
et

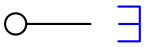


Les ingrédients

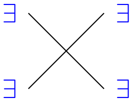
Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un monoïde commutatif

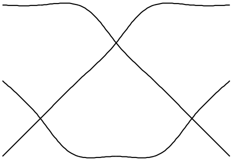




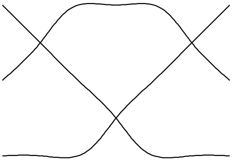
et



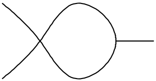
i.e. vérifie



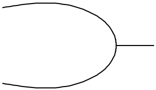
$=$



et



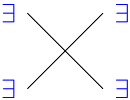
$=$



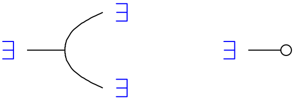
Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un monoïde commutatif

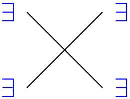
et



- $\exists$ est un comonoïde commutatif



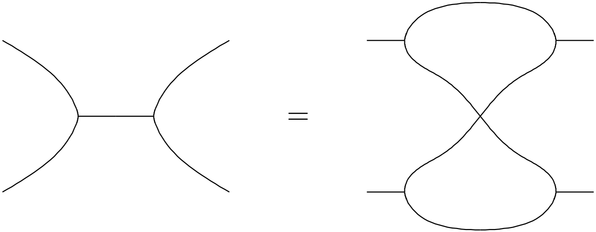
et



Les ingrédients

Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

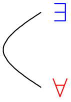
- $\exists$ est une bigèbre bicommutative



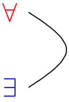
qualitative

Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

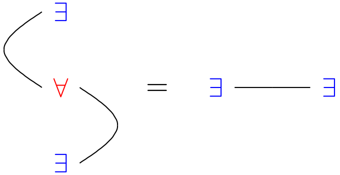
- $\exists$ est une bigèbre bicommutative
- $\exists \dashv \forall$



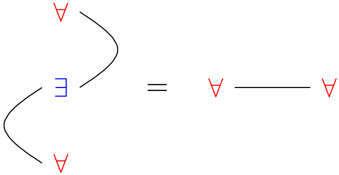
et



tels que



et



(dualité = adjonction)

Les ingrédients

C'est suffisant !

- En particulier, la dualité $\exists \dashv \forall$ induit une structure de bigèbre bicommutative qualitative sur $\forall$.

La théorie **Jeux**

foncteur monoidal **Jeux** $\to \mathcal{C}$

$=$

paire duale de bimonoïde commuatifs relationnels

$$\mathbf{Jeux}(\mathcal{C}) \quad \cong \quad \mathbf{StrMonCat}(\mathbf{Jeux}, \mathcal{C})$$

On obtient ainsi facilement :

- la définissabilité des stratégies
- la composition des stratégies

Troisième partie III

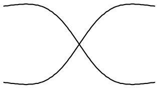
Vers une présentation convergente

Orientation des relations

Il est naturel d'orienter les relations des présentations afin de tenter d'obtenir des systèmes de réécriture convergents
($=$ **localement confluents** $+$ terminants).

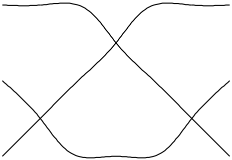
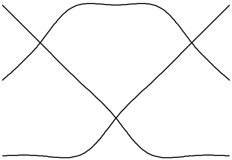
Orientation de la théorie de symétries

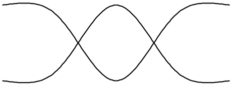
Un générateur :



Orientation de la théorie de symétries

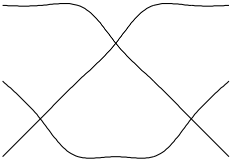
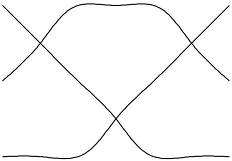
Deux relations :

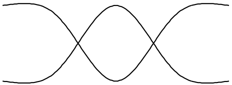
 $=$ 

 $=$ 

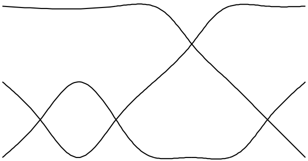
Orientation de la théorie de symétries

Deux règles de réécriture :

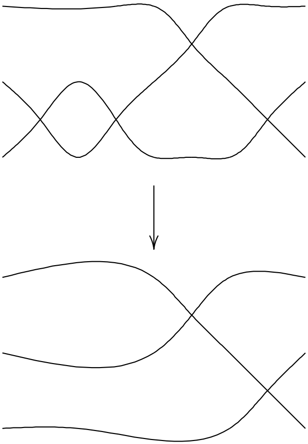
 $\longrightarrow$ 

 $\longrightarrow$ 

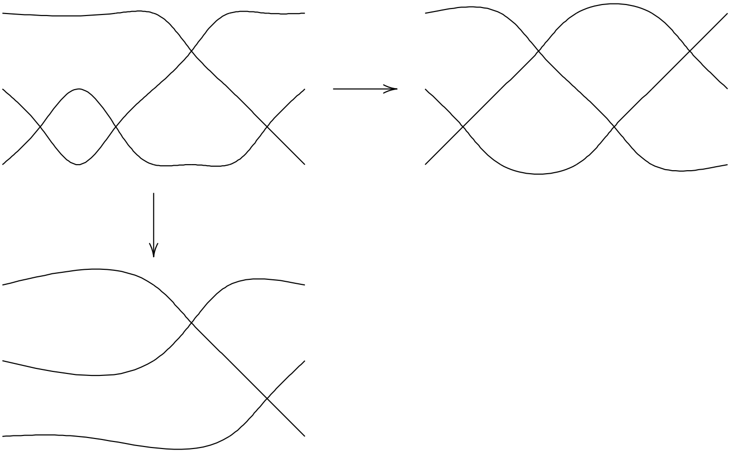
Une paire critique



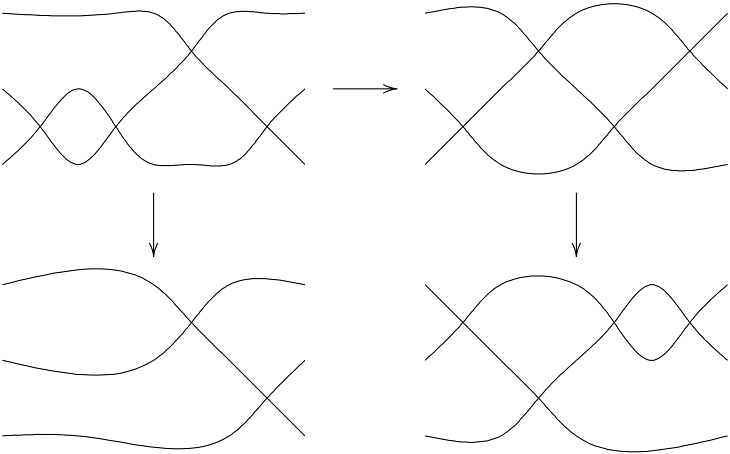
Une paire critique



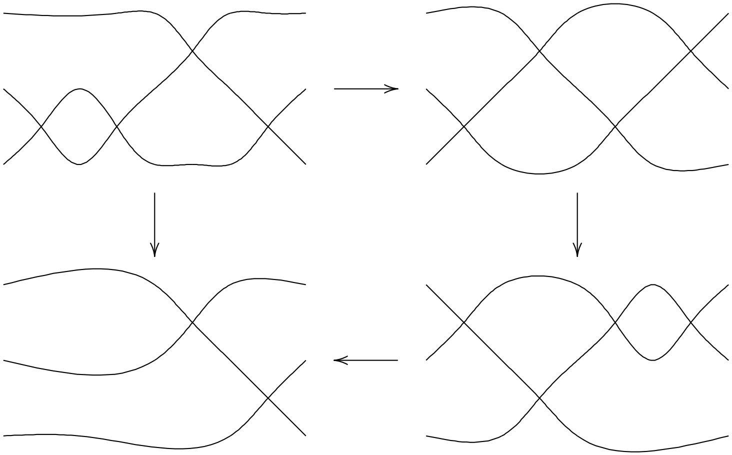
Une paire critique



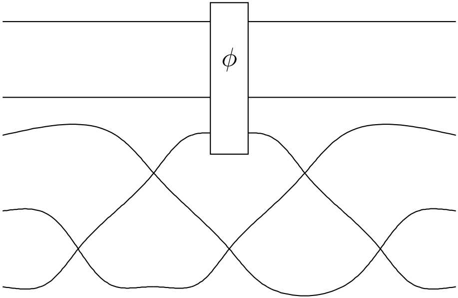
Une paire critique



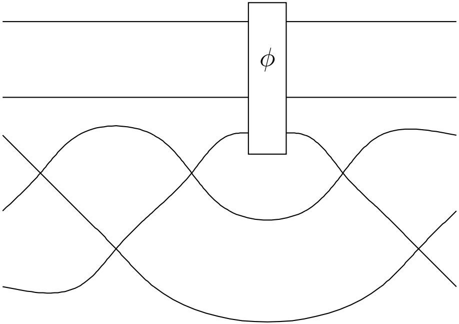
Une paire critique



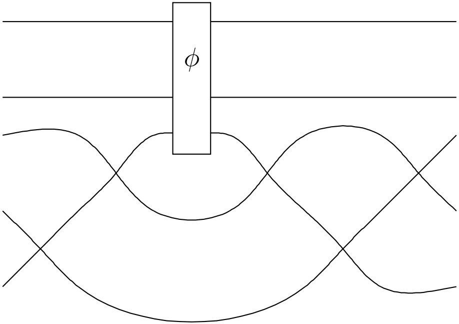
Une famille de paires critiques



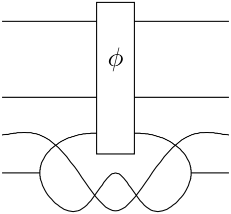
Une famille de paires critiques



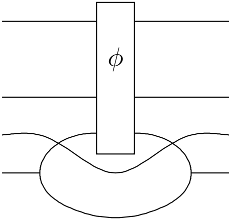
Une famille de paires critiques



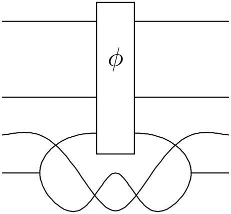
Le cas des bigèbres



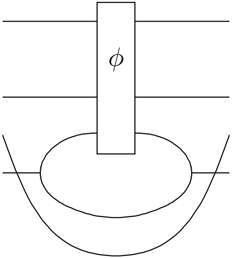
Le cas des bigèbres



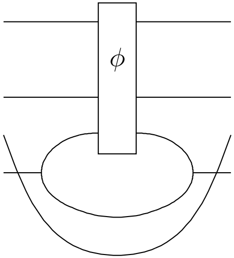
Le cas des bigèbres



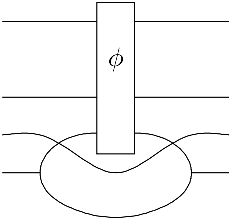
Le cas des bigèbres



Le cas des bigèbres



$\longrightarrow$



Le cas des bigèbres