Une sémantique de jeux asynchrone pour la logique linéaire

Samuel Mimram

Laboratoire PPS, CNRS / Université Denis Diderot

EJCIM
1er avril 2008

Sémantique

sémantique	$=$	interprétation mathématique abstraite des programmes / des preuves

Sémantique dénotationnelle

$$\boxed{\text{sémantique} \quad = \quad \begin{array}{c}\text{interprétation mathématique abstraite}\\ \text{des programmes / des preuves}\end{array}}$$

$$\boxed{\text{sémantique dénotationnelle} \quad = \quad \text{invariants du calcul}}$$

Modèle

Modèle d'un langage de programmation :

- un type A est interprété par un « espace de calcul » $\llbracket A \rrbracket$,
- un programme $f : A \to B$ est interprété par une « fonction » $\llbracket f \rrbracket : \llbracket A \rrbracket \to \llbracket B \rrbracket$.

Modèle dénotationnel

Modèle d'un langage de programmation :

- un type A est interprété par un « espace de calcul » $[\![A]\!]$,
- un programme $f : A \to B$ est interprété par une « fonction » $[\![f]\!] : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\beta"'] & {[\![f]\!]} \arrow[d, equal] \\
f' \arrow[r, rightsquigarrow] & {[\![f']\!]}
\end{tikzcd}
$$

Modèle dénotationnel

Modèle d'un langage de programmation :

- un type A est interprété par un « espace de calcul » $[\![A]\!]$,
- un programme $f : A \to B$ est interprété par une « fonction » $[\![f]\!] : [\![A]\!] \to [\![B]\!]$.

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "\beta"'] & {[\![f]\!]} \arrow[d, equal] \\ f' \arrow[r, rightsquigarrow] & {[\![f']\!]} \end{tikzcd}$$

Sémantiques de jeux :

- les types sont interprétés par des **jeux**,
- les programmes sont interprétés par des **stratégies**.

Le langage PCF

PCF est un langage

- fonctionnel,
- avec des valeurs de base : booléens et entiers,
- avec des constructions pour manipuler ces valeurs :
  `if then else`, `+`, etc.
- avec une construction de point fixe,
- simplement typé.

Un modèle dénotationnel de PCF

Deux termes f et g sont **extensionnellement équivalents** ($f \approx g$) lorsque pour tout contexte $C[-]$,

$$C[f] \Downarrow v \qquad \text{ssi} \qquad C[g] \Downarrow v$$

Un modèle dénotationnel de PCF

Deux termes f et g sont **extensionnellement équivalents** ($f \approx g$) lorsque pour tout contexte $C[-]$,

$$C[f] \Downarrow v \qquad \text{ssi} \qquad C[g] \Downarrow v$$

Modèle **pleinement abstrait** de PCF :

$$f \approx g \qquad \text{ssi} \qquad [\![f]\!] = [\![g]\!]$$

Sémantiques de jeux pleinement abstraites pour PCF

Hyland + Ong / Abramsky + Jagadeesan + Malacaria

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{comportement interactif d'un programme}}$$

Sémantiques de jeux HO

Les jeux

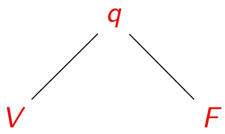
Un jeu

$$(M, \vdash, \lambda, \lambda')$$

est constitué

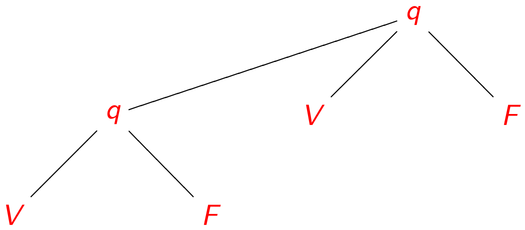
- d'un ensemble de **coups** M
- d'une relation binaire $\vdash$ exprimant les **dépendances causales**
- d'une **polarisation** des coups $\lambda : M \to \{O, P\}$
- d'une fonction $\lambda' : M \to \{Q, A\}$

$\mathbb{B} \quad =$



Le jeu $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$:

Le jeu $\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$:



Une **partie** s dans un jeu A est une suite de coups

$$s \quad = \quad m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$$

- alternée,
- de longueur paire,
- qui respecte l'ordre du jeu.

Une **partie** s dans un jeu A est une suite de coups

$$s \quad = \quad m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$$

- alternée,
- de longueur paire,
- qui respecte l'ordre du jeu.

Une **stratégie** est un ensemble non vide de parties, clos par préfixe de longueur paire.

Sémantiques de jeux HO

La stratégie `not` :

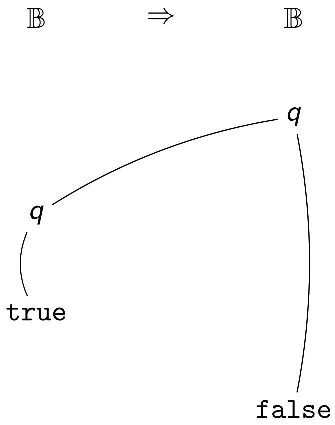
$$\mathbb{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{B}$$

La stratégie `not` :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B} \\ & & q \\ q & & \end{array}$$

Sémantiques de jeux HO

La stratégie `not` :



Sémantiques de jeux HO

La stratégie `not` :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B} \\ & & q \\ q & & \\ \texttt{false} & & \\ & & \texttt{true} \end{array}$$

Comment caractériser les stratégies définissables par des termes de PCF ?

Déterminisme

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **déterministe** lorsque

$$s \cdot m \in \sigma \quad \text{et} \quad s \cdot m' \in \sigma \quad \text{implique} \quad m = m'$$

Innocence

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **innocente** lorsqu'elle joue en n'ayant qu'une mémoire partielle de son passé : sa *vue*.

$$s \cdot m \in \sigma \quad \text{et} \quad \ulcorner s \urcorner = \ulcorner t \urcorner \quad \text{implique} \quad t \cdot m \in \sigma$$

Innocence

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\mathbb{B} & \times & \mathbb{B} & \mathbb{B} & \times & \mathbb{B} \\
q & & & & & q \\
\texttt{true} & & & & & \texttt{false} \\
& & q & q & & \\
& & \texttt{false} & \texttt{false} & &
\end{array}
$$

Bon parenthésage

Definition

Une stratégie est **bien parenthésée** lorsqu'elle répond à la dernière question posée qui n'a pas eu de réponse.

Pleine abstraction pour PCF

Théorème (HON 94)

Le modèle des stratégies déterministes, innocentes et bien parenthésées est pleinement abstrait pour PCF.

Peut-on de même caractériser le comportement interactif des preuves en
logique linéaire ?

Il faut rendre compte des phénomènes de concurrence !

$$A \parr B \qquad \text{vs.} \qquad A \otimes B$$

Il faut rendre compte des phénomènes de concurrence !

$$A \parr B \qquad \text{vs.} \qquad A \otimes B$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \parr B} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \otimes B}$$

Il faut rendre compte des phénomènes de concurrence !

$$A \parr B \qquad \text{vs.} \qquad A \otimes B$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \parr B} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \otimes B}$$

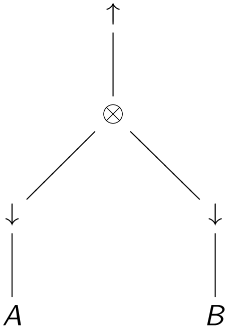
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \uparrow A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \downarrow A}$$

Un exemple

Considérons la formule $\uparrow(\downarrow A \otimes \downarrow B)$:

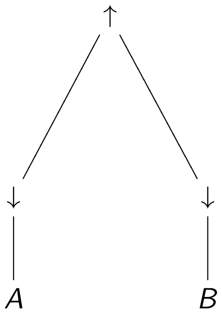
Un exemple

Considérons la formule $\uparrow(\downarrow A \otimes \downarrow B)$:



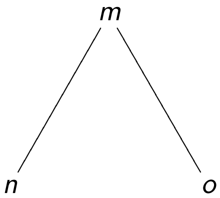
Un exemple

Considérons la formule $\uparrow(\downarrow A \otimes \downarrow B)$:

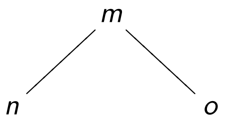


Un exemple

Considérons la formule $\uparrow(\downarrow A \otimes \downarrow B)$:



jeu = ordre partiel sur les coups



Traces asynchrones

jeu = ordre partiel sur les coups

$$\begin{tikzcd} & m \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ n & & o \end{tikzcd}$$

jeu = ensemble de traces

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "m"'] & \\ & {} \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "o"] & \\ {} \arrow[dr, "o"'] & & {} \arrow[dl, "n"] \\ & {} & \end{tikzcd}$$

Traces asynchrones

jeu = ordre partiel sur les coups

$$\begin{tikzcd} & m \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ n & & o \end{tikzcd}$$

jeu = ensemble de traces modulo homotopie

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "m"'] & \\ & {} \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "o"] & \\ {} \arrow[dr, "o"'] & \sim & {} \arrow[dl, "n"] \\ & {} & \end{tikzcd}$$

On peut reformuler et étendre les conditions habituelles dans ce cadre.

Definition

Une stratégie σ est **déterministe** lorsque

$$\sigma \ni \begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "s"'] & \\ & {} \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] & \\ {} & & {} \end{tikzcd} \in \sigma \quad \text{implique} \quad \sigma \ni \begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "s"'] & \\ & {} \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] \arrow[dd, phantom, "\sim"] & \\ {} \arrow[dr, "n"'] & & {} \arrow[dl, "m"] \\ & {} & \end{tikzcd} \in \sigma$$

où m est un coup du Joueur.

$$\boxed{\text{jeu} \quad = \quad \text{formule} \quad = \quad \text{ordre partiel sur les coups}}$$

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{preuve} \quad = \quad \text{façon d'explorer le jeu}}$$

$$\boxed{\text{jeu} \quad = \quad \text{formule} \quad = \quad \text{ordre partiel sur les coups}}$$

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{preuve} \quad = \quad \begin{array}{c}\text{façon d'explorer le jeu} \\ \textit{qui respecte les règles du jeu !}\end{array}}$$