Innocence
dans les sémantiques de jeux asynchrones

Samuel Mimram

Laboratoire PPS, CNRS – Université Paris 7

Séminaire CHOCO
20 décembre 2007

Innocence asynchrone

1. Innocence pour PCF
2. Innocence pour la logique linéaire
3. Innocence pour PCF+ `por`

Première partie I

Bref rappel historique

Termes :

$$M ::= \quad x \quad | \quad \lambda x.M \quad | \quad MN \quad | \quad \texttt{fixpt}\ M \quad |$$

Types : $\quad A \quad ::= \quad A \Rightarrow B$

Termes :

$$
\begin{array}{rlllll}
M ::= & x & \mid \ \lambda x.M & \mid \ MN & \mid \ \mathtt{fixpt}\ M & \mid \\
& n & \mid \ \mathtt{pred}\ M & \mid \ \mathtt{succ}\ M & \mid &
\end{array}
$$

Types : $A \quad ::= \quad \mathbb{N} \mid A \Rightarrow B$

Termes :

$$
\begin{array}{rcccccccc}
M ::= & x & \mid & \lambda x.M & \mid & MN & \mid & \texttt{fixpt}\ M & \mid \\
& n & \mid & \texttt{pred}\ M & \mid & \texttt{succ}\ M & \mid & \texttt{iszero}\ M & \mid \\
& \texttt{true} & \mid & \texttt{false} & \mid & \multicolumn{3}{l}{\texttt{if}\ M\ \texttt{then}\ M\ \texttt{else}\ M} &
\end{array}
$$

Types : $A \quad ::= \quad \mathbb{B} \quad \mid \quad \mathbb{N} \quad \mid \quad A \Rightarrow B$

PCF

Réduction en appel par nom

$$(\lambda x.M)N \to_\beta M[N/x] \qquad \texttt{fixpt}\ M \to_\beta M(\texttt{fixpt}\ M)$$

$$\texttt{if true then}\ M_1\ \texttt{else}\ M_2 \to_\beta M_1 \quad \texttt{if true then}\ M_1\ \texttt{else}\ M_2 \to_\beta M_1$$

$$\ldots$$

Sémantiques dénotationnelles

Un **modèle** est un foncteur $[\![-]\!]$ de la catégorie des programmes dans une catégorie $\mathcal{M}$ qui est compatible avec la réduction :

$$M \quad \to_\beta \quad M'$$

$$[\![M]\!] \quad = \quad [\![M']\!]$$

$$\boxed{\text{interprétation} \quad = \quad \text{invariant du calcul}}$$

Deux termes M et N de PCF sont **extensionnellement équivalents** ($M \approx N$) lorsque pour tout contexte $C[-]$,

$$C[M] \Downarrow c \qquad \text{iff} \qquad C[N] \Downarrow c$$

Deux termes M et N de PCF sont **extensionnellement équivalents** ($M \approx N$) lorsque pour tout contexte $C[-]$,

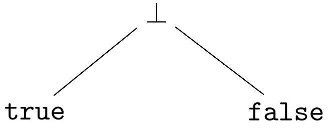
$$C[M] \Downarrow c \qquad \text{iff} \qquad C[N] \Downarrow c$$

Modèle **pleinement abstrait** de PCF : pour tous termes M et N,

$$M \approx N \qquad \text{iff} \qquad [\![M]\!] = [\![N]\!]$$

Les domaines de Scott

Un **domaine de Scott** est un ensemble partiellement ordonné complet, consistamment complet et algébrique.



Les domaines de Scott

Un **domaine de Scott** est un ensemble partiellement ordonné complet, consistamment complet et algébrique.

Une fonction $f : A \to B$ est *Scott-continue* lorsque

$$f\left(\bigvee_{x \in D} x\right) \quad = \quad \bigvee_{x \in D} f(x)$$

Les domaines de Scott

Un élément $f : \llbracket A \rrbracket$ est **définissable** lorsqu'il existe $M : A$ tel que

$$f \quad = \quad \llbracket M \rrbracket$$

Les domaines de Scott

Un élément $f : \llbracket A \rrbracket$ est **définissable** lorsqu'il existe $M : A$ tel que

$$f \quad = \quad \llbracket M \rrbracket$$

La fonction $p : \llbracket \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \rrbracket$ suivante n'est pas définissable

x/y	$\perp$	`false`	`true`
$\perp$	$\perp$	$\perp$	`true`
`false`	$\perp$	`false`	`true`
`true`	`true`	`true`	`true`

PCF + $\mathtt{por}$

La fonction p est l'interprétation du connecteur $\mathtt{por}$

$$\frac{M \to_\beta M'}{M \ \mathtt{por}\ N \to_\beta M' \ \mathtt{por}\ N} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{M \ \mathtt{por}\ N \to_\beta M \ \mathtt{por}\ N'}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{true}\ \mathtt{por}\ M &\to_\beta \mathtt{true} \\ M\ \mathtt{por}\ \mathtt{true} &\to_\beta \mathtt{true} \\ \mathtt{false}\ \mathtt{por}\ \mathtt{false} &\to_\beta \mathtt{false} \end{aligned}$$

PCF + $\texttt{por}$

La fonction p est l'interprétation du connecteur $\texttt{por}$

$$\frac{M \to_\beta M'}{M \;\texttt{por}\; N \to_\beta M' \;\texttt{por}\; N} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{M \;\texttt{por}\; N \to_\beta M \;\texttt{por}\; N'}$$

$$\begin{array}{rcl} \texttt{true}\;\texttt{por}\; M & \to_\beta & \texttt{true} \\ M \;\texttt{por}\;\texttt{true} & \to_\beta & \texttt{true} \\ \texttt{false}\;\texttt{por}\;\texttt{false} & \to_\beta & \texttt{false} \end{array}$$

Théorème (Plotkin 77)

Le modèle de Scott est pleinement abstrait pour PCF+$\texttt{por}$.

La question reste ouverte...

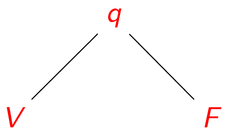
Une arène

$$(M, \vdash, \lambda, \lambda')$$

est constituée

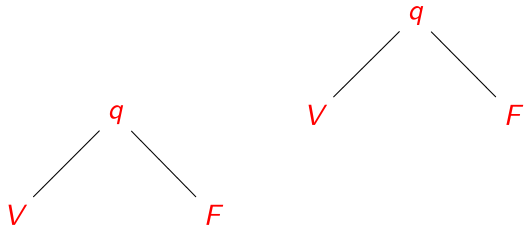
- d'un ensemble de **coups** M
- d'une relation binaire $\vdash$ exprimant les **dépendances causales**
- d'une **polarisation** des coups $\lambda : M \to \{O, P\}$
- d'une fonction $\lambda' : M \to \{Q, A\}$

$\mathbb{B} \quad =$

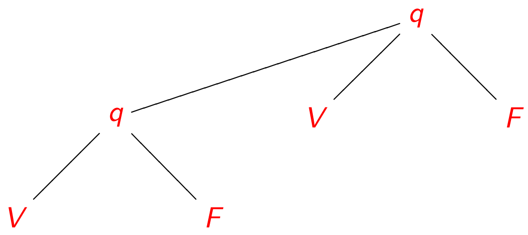


Le jeu $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$:

Le jeu $\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$:



Le jeu $\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}$:



Une **partie** s dans une arène A est une suite pointée de coups

$$s \quad = \quad m_1 \quad \cdots \quad m_i \quad \cdots \quad m_j \quad \cdots \quad m_{2n}$$

- alternée,
- de longueur paire,
- telle que si m_j pointe sur m_i alors $m_i \vdash_A m_j$.

Une **partie** s dans une arène A est une suite pointée de coups

$$s \quad = \quad m_1 \quad \cdots \quad m_i \quad \cdots \quad m_j \quad \cdots \quad m_{2n}$$

- alternée,
- de longueur paire,
- telle que si m_j pointe sur m_i alors $m_i \vdash_A m_j$.

Une **stratégie** est un ensemble non vide de parties, clos par préfixe de longueur paire.

Sémantiques de jeux HO

La stratégie `not` :

$$\mathbb{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{B}$$

La stratégie `not` :

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B} \\
 & & q \\
q & &
\end{array}
$$

Sémantiques de jeux HO

La stratégie `not` :

$\mathbb{B}$	$\Rightarrow$	$\mathbb{B}$
		q
q		
`true`		
		`false`

Sémantiques de jeux HO

La stratégie `not` :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B} \\ & & q \\ q & & \\ \texttt{false} & & \\ & & \texttt{true} \end{array}$$

Comment caractériser les stratégies définissables
par des termes de PCF ?

Déterminisme

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **déterministe** lorsque

$$s \cdot m \in \sigma \quad \text{et} \quad s \cdot m' \in \sigma \quad \text{implique} \quad m = m'$$

Innocence

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **innocente** lorsqu'elle joue en n'ayant qu'une mémoire partielle de son passé : sa *vue*.

$$s \cdot m \in \sigma \quad \text{et} \quad \ulcorner s \urcorner = \ulcorner t \urcorner \quad \text{implique} \quad t \cdot m \in \sigma$$

$$
\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B}) & \Rightarrow & \mathbb{B} \\
 & & & & q \\
 & & q & &
\end{array}
$$

Innocence

1er contre-exemple

$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$

q

q

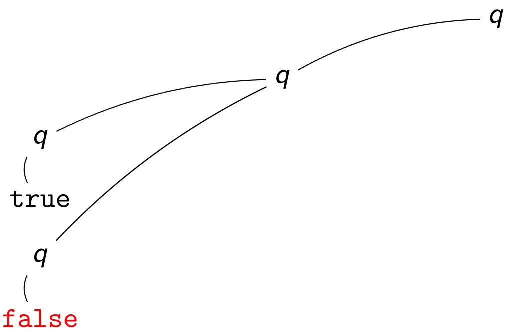
q

`true`

Innocence

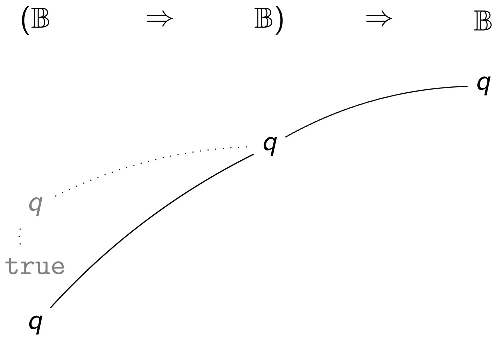
1er contre-exemple

$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$



Innocence

1$^{\text{er}}$ contre-exemple



Innocence

2^e contre-exemple

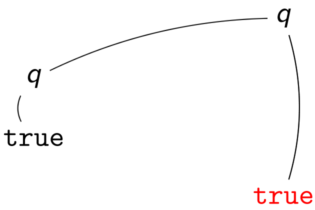
$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$

q q

Innocence

2e contre-exemple

$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$



$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{B} & \Rightarrow & \mathbb{B}) & \Rightarrow & \mathbb{B} \\
 & & & & q \\
 & & q & &
\end{array}$$

Innocence

2^{e} contre-exemple

$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$

q

q

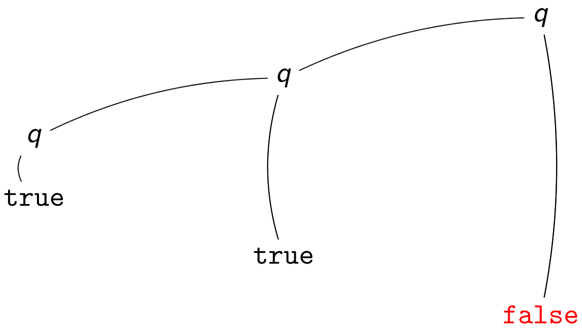
q

`true`

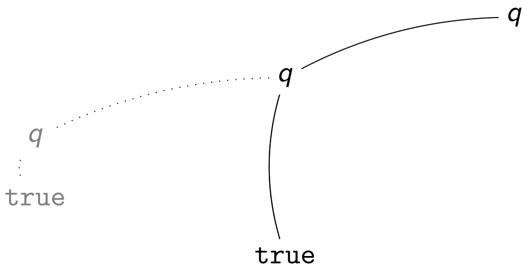
Innocence

2^e contre-exemple

$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$



$$(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{B}$$



Innocence

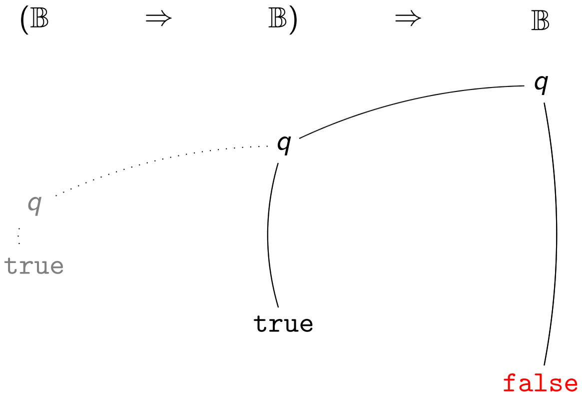
Définition

Pour toute partie s, la **vue** $\ulcorner s \urcorner$ de s est définie inductivement par

$$\begin{array}{rcll} \ulcorner s \cdot m \urcorner & = & \ulcorner s \urcorner \cdot m & \text{si } m \text{ est un coup joueur} \\ \ulcorner s \cdot m \cdot t \cdot n \urcorner & = & \ulcorner s \cdot m \urcorner \cdot n & \text{si } n \text{ est un coup opposant pointant sur } m \\ \ulcorner s \cdot m \urcorner & = & m & \text{si } m \text{ est un coup opposant initial} \end{array}$$

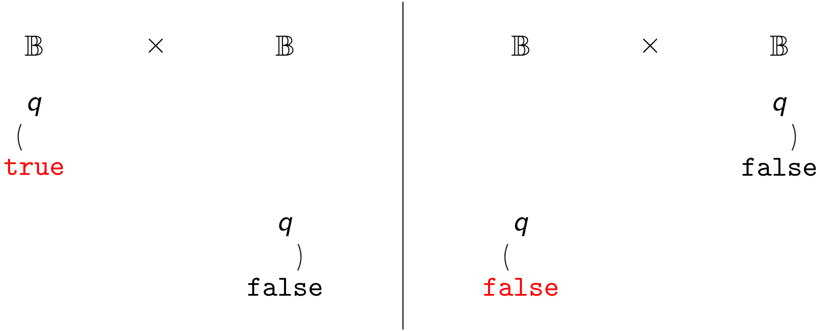
Innocence

2e contre-exemple

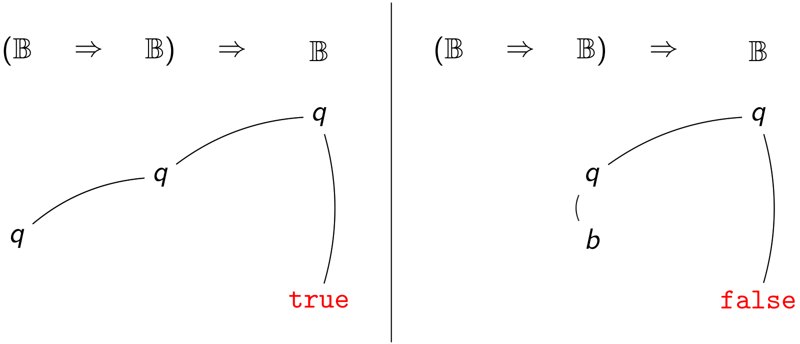


Innocence

3e contre-exemple



La stratégie `catch` :



Bon parenthésage

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **bien parenthésée** si toute réponse m du joueur dans une partie $s \cdot m$ pointe vers la question pendante de $\ulcorner s \urcorner$.

Théorème (HON 94)

Le modèle des stratégies déterministes, innocentes et bien parenthésées est pleinement abstrait pour PCF.

Théorème (HON 94)

Le modèle des stratégies déterministes, innocentes et bien parenthésées est pleinement abstrait pour PCF.

Théorème (Laird 97)

Le modèle des stratégies déterministes et innocentes est pleinement abstrait pour PCF+$\mathtt{catch}$.

$$\boxed{\text{innocence} \quad = \quad \text{comportement interactif d'une preuve}}$$

Deuxième partie II

Une reformulation asynchrone de l'innocence

Les sémantiques de jeux sont des *sémantiques de traces*.

Un programme P émet et reçoit des coups

$$P \xrightarrow{m_0} P_1 \xrightarrow{m_1} P_2 \xrightarrow{m_2} \cdots$$

qui sont joués dans le jeu.

Les sémantiques de jeux sont des *sémantiques de traces*.

Un programme P émet et reçoit des coups

$$P \xrightarrow{m_0} P_1 \xrightarrow{m_1} P_2 \xrightarrow{m_2} \cdots$$

qui sont joués dans le jeu.

Nous raffinons ici cette approche en une

$\boxed{\text{sémantique de traces de Mazurkiewicz pour les preuves}}$

fondée sur les structures d'événements.

Commençons par traiter les stratégies *linéaires*.

Jeux

Étape 1 : jeu = structure d'événements

Une arène

$$(M, \vdash, \lambda, \lambda')$$

est constituée

- d'un ensemble de **coups** M
- d'une relation binaire $\vdash$ exprimant les **dépendances causales**

- d'une **polarisation** des coups $\lambda : M \to \{O, P\}$
- d'une fonction $\lambda' : M \to \{Q, A\}$

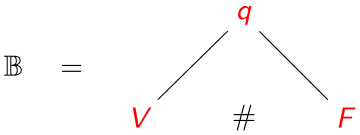
$$\mathbb{B} \quad = \quad \begin{tikzcd} & q \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ V & & F \end{tikzcd}$$

Un jeu

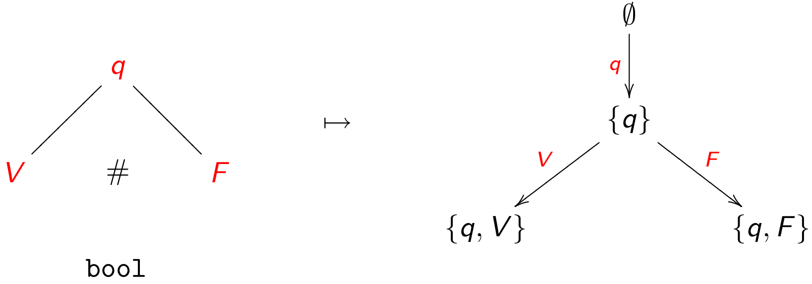
$$(M, \leq, \#, \lambda, \lambda')$$

est constitué

- d'un ensemble de **coups** M
- d'un ordre partiel $\leq$ exprimant les **dépendances causales**
- d'un relation symétrique $\#$ exprimant les **incompatibilités**
- d'une **polarisation** des coups $\lambda : M \to \{O, P\}$
- d'une fonction $\lambda' : M \to \{Q, A\}$



- **position** : ensemble de coups clos par dépendance
- **partie** : chemin alterné de longueur paire entre les positions à partir de $\emptyset$



- **position** : ensemble de coups clos par dépendance
- **partie** : chemin alterné de longueur paire entre les positions à partir de $\emptyset$

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \emptyset \\
\color{red}{q} & & \big\downarrow {\scriptstyle \color{red}{q}} \\
 & \mapsto & \{q\} \\
 & & \\
o & &
\end{array}
$$

Parties

Étape 2 : partie = chemin du graphe asynchrone

- **position** : ensemble de coups clos par dépendance
- **partie** : chemin alterné de longueur paire entre les positions à partir de $\emptyset$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \emptyset \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & \\
q_L & q_R & \mapsto & \{q_L\} \arrow[dr, "q_R"'] & & \{q_R\} \arrow[dl, "q_L"] \\
 & & & & \{q_L, q_R\} & \\
\multicolumn{2}{c}{o \otimes o} & & & &
\end{tikzcd}$$

Parties

Étape 2 : partie = chemin du graphe asynchrone

- **position** : ensemble de coups clos par dépendance
- **partie** : chemin alterné de longueur paire entre les positions à partir de $\emptyset$

$$
\begin{array}{ccc}
q_L & & q_R \\
 & & \\
 & o \otimes o &
\end{array}
\quad \mapsto \quad
\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & \\
\{q_L\} \arrow[dr, "q_R"'] & \sim & \{q_R\} \arrow[dl, "q_L"] \\
 & \{q_L, q_R\} &
\end{tikzcd}
$$

Une sémantique *vraiment concurrente*.

$a \| b$ vs. $a \cdot b + b \cdot a$

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
{} \arrow[dr, "b"'] & \sim & {} \arrow[dl, "a"] \\
& {} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
{} \arrow[dr, "b"'] & & {} \arrow[dl, "a"] \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

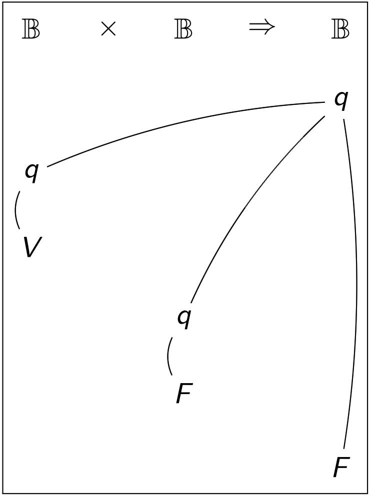
$x := 4 \| y := 5$ $\qquad$ $x := 4 \| x := 5$

multiplicatifs $\qquad$ additifs

Une **stratégie** est un ensemble non vide de parties, clos par préfixe de longueur paire.

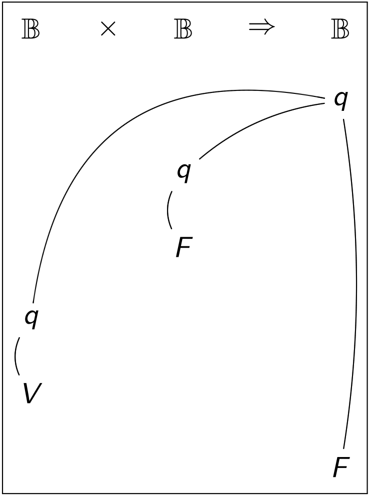
Implémentations de la conjonction

Et gauche



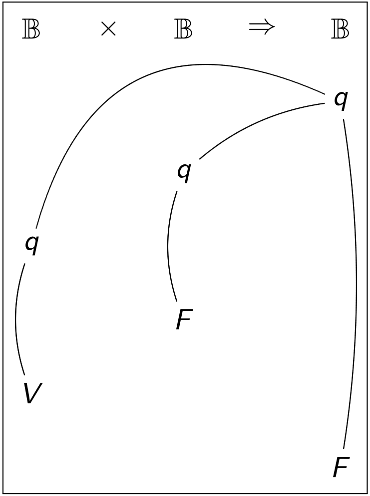
Implémentations de la conjonction

Et droit



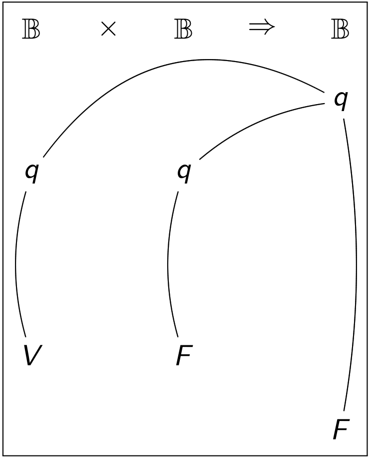
Implémentations de la conjonction

Et parallèle



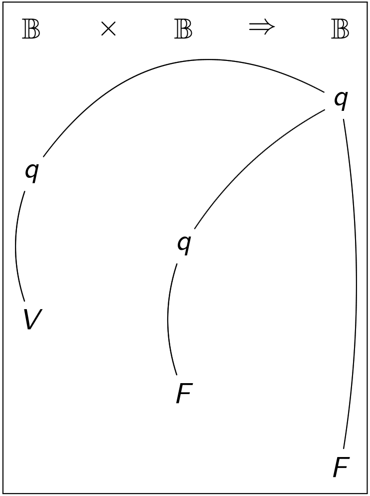
Implémentations de la conjonction

Et parallèle



Implémentations de la conjonction

Et parallèle



Jeux asynchrones

Et parallèle appliqué au couple (V, F)

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[d, "q"'] & & \\
 & & * \otimes * \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & & \\
 & q \otimes * \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & \sim & * \otimes q \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "F_R"] & \\
V \otimes * \arrow[dr, "q_R"'] & \sim & q \otimes q \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "F_R"] & \sim & * \otimes F \arrow[dl, "q_L"] \\
 & V \otimes q \arrow[dr, "F_R"'] & \sim & q \otimes F \arrow[dl, "V_L"] & \\
 & & V \otimes F \arrow[d, "q"'] & & \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

Jeux asynchrones

Et gauche appliqué au couple (V, F)

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[d, "q"'] & & \\
 & & * \otimes * \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, dotted, "q_R"] & & \\
 & q \otimes * \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, dotted, "q_R"] & \sim & * \otimes q \arrow[dl, dotted, "q_L"'] \arrow[dr, dotted, "F_R"] & \\
V \otimes * \arrow[dr, "q_R"'] & \sim & q \otimes q \arrow[dl, dotted, "V_L"'] \arrow[dr, dotted, "F_R"] & \sim & * \otimes F \arrow[dl, dotted, "q_L"] \\
 & V \otimes q \arrow[dr, "F_R"'] & \sim & q \otimes F \arrow[dl, dotted, "V_L"] & \\
 & & V \otimes F \arrow[d, "q"'] & & \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

Consistance en arrière

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[d, "s"'] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, dotted, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & & \\
\cdot \arrow[dr, dotted] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \cdot \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, "n_2"] & \\
 & \cdot \arrow[dr, dotted] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \cdot \arrow[dl, "m_1"] \\
 & & \cdot \arrow[dl, "n_1"] & \\
 & \cdot \arrow[d, "t"'] & & \\
 & \cdot & &
\end{tikzcd}
$$

implique

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[d, "s"'] & & \\
 & & \cdot \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, "n_1"'] \arrow[dr, dotted] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \cdot \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, "n_2"] & \\
\cdot \arrow[dr, "m_2"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \cdot \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \cdot \arrow[dl, "m_1"] \\
 & \cdot \arrow[dr, "n_2"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \cdot \arrow[dl, "n_1"] & \\
 & & \cdot \arrow[d, "t"'] & & \\
 & & \cdot & &
\end{tikzcd}
$$

Consistance en avant

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[d, "s"'] & & \\
 & & {} \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & & \\
 & {} \arrow[dl, "n_1"'] \arrow[dr, dotted] & \sim & {} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, "n_2"] & \\
{} & & {} \arrow[dr, dotted] & \sim & {} \arrow[dl, dotted, "m_1"] \\
 & & & {} &
\end{tikzcd}
$$

implique

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[d, "s"'] & & \\
 & & {} \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dr, "m_2"] & & \\
 & {} \arrow[dl, "n_1"'] \arrow[dr, dotted] & \sim & {} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, "n_2"] & \\
{} \arrow[dr, "m_2"'] & \sim & {} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \sim & {} \arrow[dl, "m_1"] \\
 & {} \arrow[dr, "n_2"'] & \sim & {} \arrow[dl, "n_1"] & \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

Théorème (Melliès 04)

Une stratégie est innocente si et seulement si elle est consistante en arrière et en avant.

En ajoutant les exponentielles on retrouve la définition habituelle de l'innocence.

Troisième partie III

Innocence asynchrone et non alternée

Peut-on étendre ces techniques pour donner
un modèle de *logique linéaire* ?

Peut-on étendre ces techniques pour donner
un modèle **non alterné** de *logique linéaire* ?

Peut-on étendre ces techniques pour donner
un modèle **non alterné** de *logique linéaire* ?

Il nous faut caractériser

$\boxed{\text{le comportement interactif des preuves en logique linéaire}}$

Unification des sémantiques de LL

Jeux séquentiels
Hyland,Ong 1994
Abramsky,Jagadeesan,
Malacaria 1994

Jeux asynchrones
Melliès 2004
Melliès,Mimram 2007

Modèle relationnel
Girard 1987

Jeux concurrents
Abramsky,Melliès 1999

Structures d'év.
Curien,Faggian 2005
Varraca,Yoshida 2006

Une logique pour les jeux

- On considère ici des formules de MALL :

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}(\parr) \qquad \frac{\vdash \Gamma_1, A \qquad \vdash \Gamma_2, B}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B}(\otimes)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}(\&) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}(\oplus)$$

Une logique pour les jeux

- On considère ici des formules de MALL :

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}(\parr) \qquad \frac{\vdash \Gamma_1, A \qquad \vdash \Gamma_2, B}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B}(\otimes)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}(\&) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}(\oplus)$$

- avec des coups explicites :

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \uparrow A}(\uparrow) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \downarrow A}(\downarrow)$$

Des formules aux jeux

La formule correspondant aux booléens est

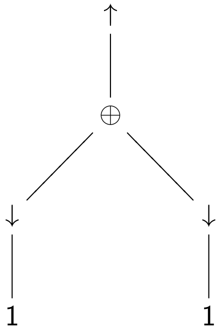
$$\texttt{bool} \quad = \quad \uparrow(\downarrow 1 \oplus \downarrow 1)$$

qui est comme $1 \oplus 1$ avec des changements explicites de polarité.

Des formules aux jeux

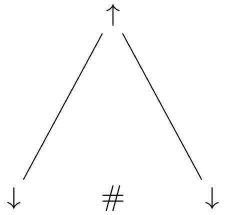
La formule correspondant aux booléens est

$$\texttt{bool} \quad = \quad {\uparrow}({\downarrow}1 \oplus {\downarrow}1)$$



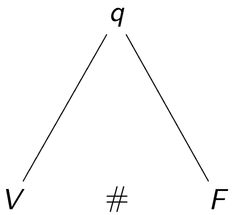
La formule correspondant aux booléens est

$$\texttt{bool} \quad = \quad \uparrow(\downarrow 1 \oplus \downarrow 1)$$



La formule correspondant aux booléens est

$$\texttt{bool} \quad = \quad \uparrow(\downarrow 1 \oplus \downarrow 1)$$



Des formules aux jeux

La formule correspondant aux booléens est

$$\texttt{bool} \quad = \quad \uparrow(\downarrow 1 \oplus \downarrow 1)$$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[d, "q"'] & \\ & q \arrow[dl, "V"'] \arrow[dr, "F"] & \\ V & & F \end{tikzcd}$$

Des preuves aux stratégies

Le jeu associé à $\uparrow A$ est de la forme

$$\begin{array}{c}\uparrow\\ |\\ A\end{array}$$

Des preuves aux stratégies

Le jeu associé à $\uparrow A \otimes \uparrow B = \uparrow A \parr \uparrow B$ est de la forme

$$\begin{tikzcd} \uparrow & \uparrow \\ A \arrow[u, no head] & B \arrow[u, no head] \end{tikzcd}$$

Des preuves aux stratégies

Le jeu associé à $\uparrow A \otimes \uparrow B = \uparrow A \parr \uparrow B$ est de la forme

$$
\begin{array}{ccc}
\uparrow & & \uparrow \\
| & & | \\
A & & B
\end{array}
$$

Le graphe asynchrone correspondant contient

$$
\begin{tikzcd}
& *,* \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \arrow[dr, "\uparrow_B"] & \\
\uparrow *,* \arrow[dr, "\uparrow_B"'] & & *,\uparrow * \arrow[dl, "\uparrow_A"] \\
& \uparrow *,\uparrow * & \\
& \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Des preuves aux stratégies

Le jeu associé à $\uparrow A \otimes \uparrow B = \uparrow A \parr \uparrow B$ est de la forme

$$\begin{tikzcd}
\uparrow & & \uparrow \\
A \arrow[u, dash] & & B \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

Le graphe asynchrone correspondant contient

$$\begin{tikzcd}
& *, * \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \arrow[dr, "\uparrow_B"] & \\
\uparrow *, * \arrow[dr, "\uparrow_B"'] & \sim & *, \uparrow * \arrow[dl, "\uparrow_A"] \\
& \uparrow *, \uparrow * & \\
& \vdots &
\end{tikzcd}$$

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$*, *$$

$$\frac{}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}$$

Des preuves aux stratégies

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\overline{\vdash A, \uparrow B}}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}\,(\uparrow)$$

$$\begin{tikzcd} & *, * \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \\ \uparrow *, * & \end{tikzcd}$$

Des preuves aux stratégies

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash A, B}}{\vdash A, \uparrow B}(\uparrow)}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
 & *, * \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \\
\uparrow *, * \arrow[dr, "\uparrow_B"'] & \\
 & \uparrow *, \uparrow *
\end{tikzcd}$$

Des preuves aux stratégies

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash A, \uparrow B}(\uparrow)}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
 & *, * \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \\
\uparrow *, * \arrow[dr, "\uparrow_B"'] & \\
 & \uparrow *, \uparrow * \\
 & \vdots
\end{tikzcd}$$

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$*, *$$

$$\overline{\vdash \uparrow A, \uparrow B}$$

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\overline{\vdash \uparrow A, B}}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)$$

$$\begin{array}{ccc} *, * & & \\ & \searrow^{\uparrow_B} & \\ & & *, \uparrow * \end{array}$$

Des preuves aux stratégies

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, B}}{\vdash \uparrow A, B}(\uparrow)}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
*, * \arrow[dr, "\uparrow_B"] & \\
& *, \uparrow * \arrow[dl, "\uparrow_A"] \\
\uparrow *, \uparrow * &
\end{tikzcd}$$

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash \uparrow A, B}(\uparrow)}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)
$$

$$
\begin{tikzcd}
*, * \arrow[dr, "\uparrow_B"] & \\
& *, \uparrow * \arrow[dl, "\uparrow_A"] \\
\uparrow *, \uparrow * & \\
\vdots &
\end{tikzcd}
$$

Des preuves aux stratégies

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow, \uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
 & *, * \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \arrow[dr, "\uparrow_B"] & \\
\uparrow *, * \arrow[dr, "\uparrow_B"'] & & *, \uparrow * \arrow[dl, "\uparrow_A"] \\
 & \uparrow *, \uparrow * & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Des preuves aux stratégies

Trois preuves de $\uparrow A \parr \uparrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow, \uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
 & *, * \arrow[dl, "\uparrow_A"'] \arrow[dr, "\uparrow_B"] & \\
\uparrow *, * \arrow[dr, "\uparrow_B"'] & \sim & *, \uparrow * \arrow[dl, "\uparrow_A"] \\
 & \uparrow *, \uparrow * & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Les preuves explorent les formules

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{partie} & = & \text{exploration de la formule} \\ \text{preuve} & = & \text{stratégie d'exploration} \end{array}}$$

Une preuve est un ordre partiel sur les coups...

Les preuves explorent les formules

partie	=	exploration de la formule
preuve	=	stratégie d'exploration

Une preuve est un ordre partiel sur les coups
qui raffine l'ordre du jeu...

Les preuves explorent les formules

partie	$=$	exploration de la formule
preuve	$=$	stratégie d'exploration

Une preuve est un ordre partiel sur les coups
qui raffine l'ordre du jeu
en ajoutant des dépendances $O \dashrightarrow P$.

Les preuves explorent les formules

partie	$=$	exploration de la formule
preuve	$=$	stratégie d'exploration

Une preuve est un ordre partiel sur les coups
qui raffine l'ordre du jeu
en ajoutant des dépendances $O \dashrightarrow P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash A, \uparrow B}(\uparrow)}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
\uparrow \arrow[r, dotted] & \uparrow \\
A \arrow[u, no head] & B \arrow[u, no head]
\end{tikzcd}$$

Les preuves explorent les formules

partie	=	exploration de la formule
preuve	=	stratégie d'exploration

Une preuve est un ordre partiel sur les coups
qui raffine l'ordre du jeu
en ajoutant des dépendances $O \dashrightarrow P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash \uparrow A, B}(\uparrow)}{\vdash \uparrow A, \uparrow B}(\uparrow)$$

$$\begin{tikzcd}
\uparrow & \uparrow \arrow[l, dotted] \\
A \arrow[u, dash] & B \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

Les preuves explorent les formules

partie	=	exploration de la formule
preuve	=	stratégie d'exploration

Une preuve est un ordre partiel sur les coups
qui raffine l'ordre du jeu
en ajoutant des dépendances $O \dashrightarrow P$.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A, B}}{\vdash {\uparrow}A, {\uparrow}B}(\uparrow, \uparrow) \qquad\qquad \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ | & | \\ A & B \end{array}$$

De la causalité à la séquentialité

Une structure d'événements définit un graphe asynchrone.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, dash] & & b \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& c & & d
\end{tikzcd}
\qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
& \emptyset \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
\{a\} \arrow[dr, "b"'] & \sim & \{b\} \arrow[dl, "a"] \arrow[d, "d"] \\
& \{a, b\} \arrow[dl, "c"'] \arrow[d, "d"'] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \{b, d\} \arrow[dl, "a"] \\
\{a, b, c\} \arrow[d, "d"'] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \{a, b, d\} \arrow[dl, "c"'] & \\
\{a, b, c, d\} & &
\end{tikzcd}
$$

De la séquentialité à la causalité

...il faut la Propriété du Cube.

La Propriété du Cube

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, "o"] \arrow[dl, "m"'] \arrow[dd] \arrow[ddrr, phantom, "\sim"] & & x_2 \arrow[dd, "n"] \\
x_1 \arrow[dd, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & & \\
 & x_3 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & y_1 \arrow[dl, "m"] \\
y_2 \arrow[rr, "o"'] & & y &
\end{tikzcd}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, "o"] \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & x_2 \arrow[dl] \arrow[dd, "n"] \\
x_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "n"'] \arrow[ddrr, phantom, "\sim"] & & y_3 \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & \\
 & & & y_1 \arrow[dl, "m"] \\
y_2 \arrow[rr, "o"'] & & y &
\end{tikzcd}
$$

Théorème

Les classes d'homotopie des chemins sont données par un ordre partiel sur les coups.

Jeux asynchrones

Définition

Un **jeu asynchrone** est un graphe asynchrone pointé satisfaisant la Propriété du Cube.

Stratégies positionnelles

Définition
Une **stratégie** est un ensemble de parties clos par préfixe.

Définition
Une stratégie est **positionnelle** lorsque ses parties forment un sous-graphe du jeu.

Stratégies causales

On considère dorénavant des *stratégies causales* qui

1. sont positionnelles,
2. satisfont des propriétés impliquant la Propriété du Cube.

Composition

Malheureusement les stratégies causales ne composent pas...

Une catégorie des jeux et stratégies

$$A \multimap B \quad = \quad A^* \parr B \quad = \quad A^* \otimes B$$

La stratégie **not** :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{B} & \xrightarrow{\texttt{not}} & \mathbb{B} \\
 & & q \\
q & & \\
V & & \\
 & & F
\end{array}$$

Une catégorie des jeux et stratégies

$$A \multimap B \quad = \quad A^* \parr B \quad = \quad A^* \otimes B$$

La stratégie **not** :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \xrightarrow{\texttt{not}} & \mathbb{B} \\ & & q \\ q & & \\ F & & \\ & & V \end{array}$$

Composition

Les traces composent par *composition parallèle*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} & \qquad & \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\
 & & & & & & q \\
 & & & & q & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & F & & \\
 & & & & & & V
\end{array}$$

Composition

Les traces composent par *composition parallèle*

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbb{B} \longrightarrow & \mathbb{B} & \mathbb{B} \longrightarrow & \mathbb{B} \\
 & & & \\
 & q & & \\
q & & & \\
V & & & \\
 & F & & \\
\end{array}
$$

Composition

Les traces composent par *composition parallèle*

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} & \qquad & \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\
 & & & & & & q \\
 & & q & & q & & \\
q & & & & & & \\
V & & & & & & \\
 & & F & & F & & \\
 & & & & & & V
\end{array}
$$

Composition

Les traces composent par *composition parallèle* + *masquage.*

$\mathbb{B} \longrightarrow \qquad\qquad \longrightarrow \mathbb{B}$

q

q

V

V

Déterminisme

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **déterministe** lorsque

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "\sigma\ni m"'] \arrow[dr, "n\in\sigma"] & \\
y_1 & & y_2
\end{tikzcd}
\quad \text{implique} \quad
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "\sigma\ni m"'] \arrow[dr, "n\in\sigma"] & \\
y_1 \arrow[dr, "\sigma\ni n"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & y_2 \arrow[dl, "m\in\sigma"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

où m est un coup joueur.

Les stratégies déterministes composent !

Elles forment une catégorie monoïdale.

Définition

Une position d'une stratégie σ est une **position d'arrêt** lorsqu'il n'y a aucun coup joueur $m : x \longrightarrow y$ que σ peut jouer.

On note σ° l'ensemble des positions d'arrêt de σ.

Positions d'arrêt

Le jeu $\texttt{true} \otimes \texttt{false}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & * \otimes * \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & & \\
 & q \otimes * \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & \sim & * \otimes q \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "F_R"] & \\
V \otimes * \arrow[dr, "q_R"'] & \sim & q \otimes q \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "F_R"] & \sim & * \otimes F \arrow[dl, "q_L"] \\
 & V \otimes q \arrow[dr, "F_R"'] & \sim & q \otimes F \arrow[dl, "V_L"] & \\
 & & V \otimes F & &
\end{tikzcd}
$$

Positions d'arrêt

L'implémentation *parallèle* de $(\mathtt{true}, \mathtt{false})$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{* \otimes *} \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & & \\
 & q \otimes * \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & \sim & * \otimes q \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "F_R"] & \\
\boxed{V \otimes *} \arrow[dr, "q_R"'] & \sim & q \otimes q \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "F_R"] & \sim & \boxed{* \otimes F} \arrow[dl, "q_L"] \\
 & V \otimes q \arrow[dr, "F_R"'] & \sim & q \otimes F \arrow[dl, "V_L"] & \\
 & & \boxed{V \otimes F} & &
\end{tikzcd}
$$

Positions d'arrêt

L'implémentation *gauche* de $(\texttt{true}, \texttt{false})$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{* \otimes *} \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, "q_R"] & & \\
 & q \otimes * \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "q_R"] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & \boxed{* \otimes q} \arrow[dl, "q_L"'] \arrow[dr, dotted, "F_R"] & \\
\boxed{V \otimes *} \arrow[dr, "q_R"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & q \otimes q \arrow[dl, "V_L"'] \arrow[dr, "F_R"] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & * \otimes F \arrow[dl, dotted, "q_L"] \\
 & V \otimes q \arrow[dr, "F_R"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & q \otimes F \arrow[dl, "V_L"] & \\
 & & \boxed{V \otimes F} & &
\end{tikzcd}$$

Positions d'arrêt

L'implémentation *droite* de $(\texttt{true}, \texttt{false})$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{* \otimes *} \arrow[dl, swap, "q_L"] \arrow[dr, "q_R"] & & \\
 & \boxed{q \otimes *} \arrow[dl, dotted, swap, "V_L"] \arrow[dr, "q_R"] & \sim & * \otimes q \arrow[dl, swap, "q_L"] \arrow[dr, "F_R"] & \\
V \otimes * \arrow[dr, dotted, swap, "q_R"] & \sim & q \otimes q \arrow[dl, swap, "V_L"] \arrow[dr, "F_R"] & \sim & \boxed{* \otimes F} \arrow[dl, "q_L"] \\
 & V \otimes q \arrow[dr, swap, "F_R"] & \sim & q \otimes F \arrow[dl, "V_L"] & \\
 & & \boxed{V \otimes F} & &
\end{tikzcd}
$$

Stratégies ingénues

Dans l'esprit des jeux concurrents et du modèle relationnel, les stratégies devraient être caractérisées par leurs *positions d'arrêt*.

Définition

Une stratégie σ est **ingénue** lorsqu'elle est

1. causale,
2. déterministe,
3. *courtoise* :

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "\sigma\ni m"'] \arrow[dr, dotted, "n"] & \\
y_1 \arrow[dr, "\sigma\ni n"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & y_2 \arrow[dl, dotted, "m"] \\
& z &
\end{tikzcd}$$

implique

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "\sigma\ni m"'] \arrow[dr, "n\in\sigma"] & \\
y_1 \arrow[dr, "\sigma\ni n"'] \arrow[rr, phantom, "\sim"] & & y_2 \arrow[dl, "m\in\sigma"] \\
& z &
\end{tikzcd}$$

où m est un coup joueur.

Stratégies ingénues et relations

Théorème

Toute stratégie ingénue σ *est caractérisée par son ensemble* σ° *de positions d'arrêt.*

Stratégies séquentielles

Lorsque la stratégie vérifie

$$
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] \arrow[dd, phantom, "\sim"] & \\
{} \arrow[dr, "n"'] & & {} \arrow[dl, "m"] \\
& {} \arrow[d, "o"'] & \\
& {} &
\end{tikzcd}
\quad \text{implique} \quad
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] \arrow[dd, phantom, "\sim"] & \\
{} \arrow[d, "o"'] \arrow[dr] & & {} \arrow[dl, "m"] \\
{} \arrow[dr, "n"'] \arrow[r, phantom, "\sim"] & {} \arrow[d, "o"] & \\
& {} &
\end{tikzcd}
\quad \text{ou} \quad
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] \arrow[dd, phantom, "\sim"] & \\
{} \arrow[dr, "n"'] & & {} \arrow[dl] \arrow[d, "o"] \\
& {} \arrow[d, "o"'] \arrow[r, phantom, "\sim"] & {} \arrow[dl, "m"] \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

où m, n sont opposants et o joueur (et une condition duale),

$\boxed{\text{on retrouve la définition alternée de l'innocence}}$

Stratégies ingénues et relations

Théorème

Toute stratégie ingénue σ est caractérisée par son ensemble σ° de positions d'arrêt.

Une position x de $A \otimes B$ est de la forme (x_A, x_B).

Stratégies ingénues et relations

Théorème

Toute stratégie ingénue σ est caractérisée par son ensemble σ° de positions d'arrêt.

Une position x de $A \otimes B$ est de la forme (x_A, x_B).

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{stratégie ingénue} & \Longleftrightarrow & \text{ensemble de couples de positions} \\ & \Longleftrightarrow & \text{relation} \end{array}}$$

Stratégies ingénues et relations

Théorème
Toute stratégie ingénue σ est caractérisée par son ensemble σ° de positions d'arrêt.

Une position x de $A \otimes B$ est de la forme (x_A, x_B).

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{stratégie ingénue} & \Longleftrightarrow & \text{ensemble de couples de positions} \\ & \Longleftrightarrow & \text{relation} \end{array}}$$

$$\text{stratégie ingénue} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{opérateur de clôture}$$

Préservation de la composition

Il y a une inconsistance entre les compositions séquentielles et relationnelles : on voudrait

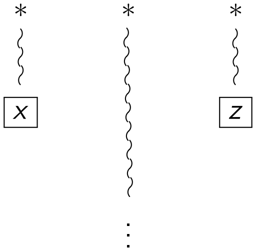
$$(\sigma;\tau)^\circ \quad = \quad \sigma^\circ;\tau^\circ$$

Préservation de la composition

Le *livelock* :

$$(\sigma;\tau)^\circ \subseteq \sigma^\circ;\tau^\circ$$

$$A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} C$$

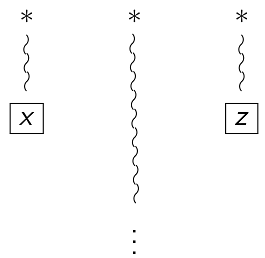


Préservation de la composition

Le *livelock* :

$$(\sigma;\tau)^\circ \subseteq \sigma^\circ;\tau^\circ$$

$$A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} C$$



Solution : gérer les positions infinies

Préservation de la composition

Le *deadlock* :

$$(\sigma;\tau)^\circ \supseteq \sigma^\circ;\tau^\circ$$

$$A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} C$$

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[d, squiggly, no head] & * \arrow[d, squiggly, no head] & * \arrow[d, squiggly, no head] \\
\boxed{x} & y & \boxed{z}
\end{tikzcd}$$

Préservation de la composition

Le *deadlock* :

$$(\sigma;\tau)^\circ \supseteq \sigma^\circ;\tau^\circ$$

$$A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} C$$

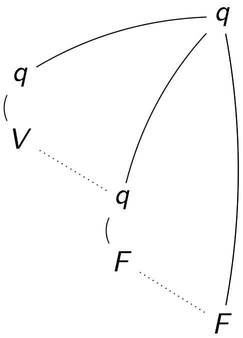
$$\begin{tikzcd}
* \arrow[d, squiggly, no head] & * \arrow[d, squiggly, no head] & * \arrow[d, squiggly, no head] \\
\boxed{x} & y & \boxed{z}
\end{tikzcd}$$

Solution : ajouter un critère d'ordonnancement

Le critère d'ordonnancement

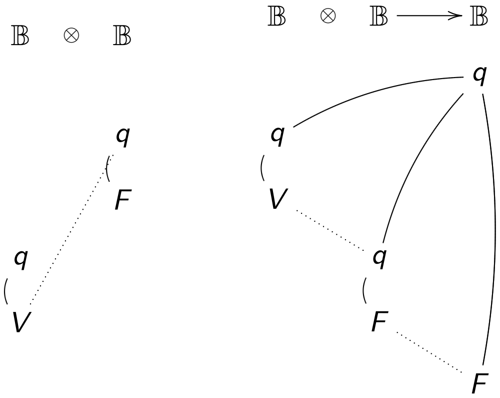
le conjonction gauche :

$$\mathbb{B} \otimes \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$



Le critère d'ordonnancement

Le booléen droit composé avec le conjonction gauche :



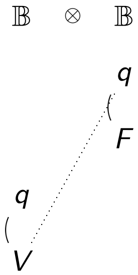
Le critère d'ordonnancement

Deux sortes de tenseurs : $\otimes$ et $\parr$.

$$\mathbb{B} \otimes \mathbb{B} \multimap \mathbb{B} \quad = \quad \mathbb{B}^* \parr \mathbb{B}^* \parr \mathbb{B}$$

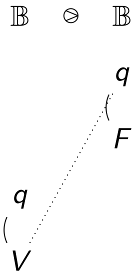
Le critère d'ordonnancement

Deux sortes de tenseurs : $\otimes$ et $\parr$.



Le critère d'ordonnancement

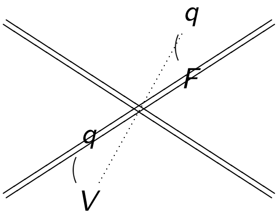
Deux sortes de tenseurs : $\otimes$ et $⅋$.



Le critère d'ordonnancement

Deux sortes de tenseurs : $\otimes$ et $\parr$.

$$\mathbb{B} \quad \olessthan \quad \mathbb{B}$$



Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **réceptive** lorsque pour chaque partie $s : * \twoheadrightarrow x$ de σ et chaque coup opposant $m : x \longrightarrow y$,le chemin $s \cdot m : * \twoheadrightarrow y$ est aussi dans σ.

Fonctorialité

Définition

Une stratégie $\sigma : A$ est **réceptive** lorsque pour chaque partie $s : * \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow x$ de σ et chaque coup opposant $m : x \longrightarrow y$,le chemin $s \cdot m : * \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow y$ est aussi dans σ.

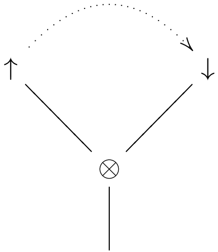
Théorème

Les stratégies réceptives ingénues qui satisfont le critère d'ordonnancement composent et satisfont

$$(\sigma ; \tau)^\circ \quad = \quad \sigma^\circ ; \tau^\circ$$

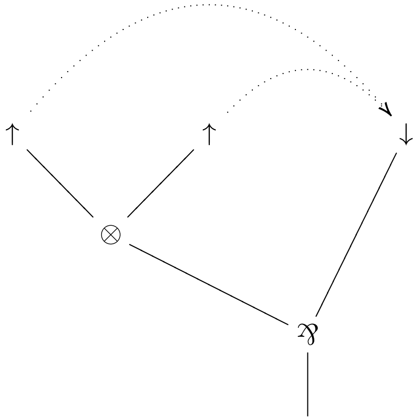
Vers la pleine complétude

Le critère d'ordonnancement détecte les cycles orientés.



Vers la pleine complétude

Le critère d'ordonnancement ne détecte pas les cycles non-orientés.



On a besoin d'un critère d'ordonnancement plus élaboré.

Quatrième partie IV

Remarques sur l'innocence pour PCF+$\texttt{por}$

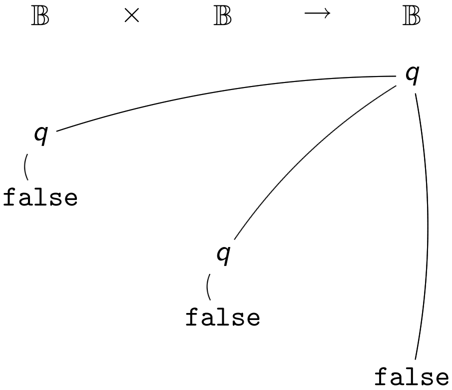
Pourquoi ?

- comprendre le comportement interactif des programmes de PCF+`por`
- obtenir des résultats de pleine abstraction pour les calculs de processus typés (cf. Berger, Honda, Yoshida)
- clarifier les relations entre sémantiques de jeux et domaines
- premier pas vers des sémantiques de jeux non déterministes

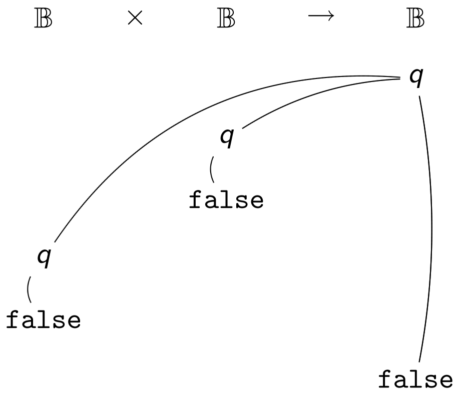
Avertissement

Travaux en cours !

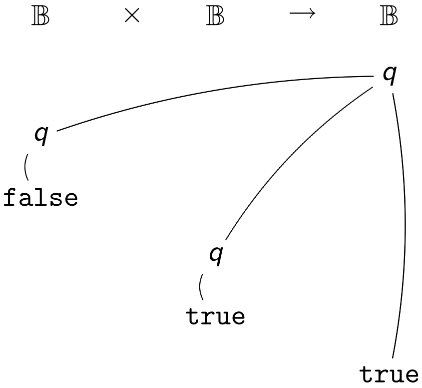
La stratégie por



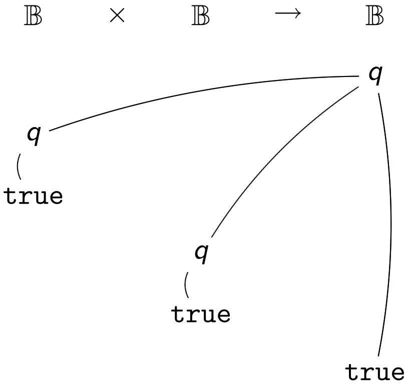
La stratégie por



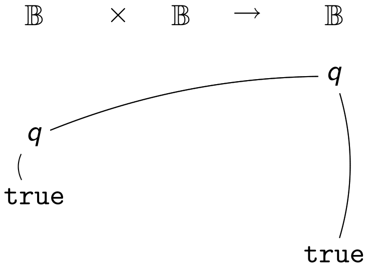
La stratégie por



La stratégie por



La stratégie por



La stratégie por

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{B} & \times & \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & & & & q \\ & & q & & \\ & & \mathtt{true} & & \\ & & & & \mathtt{true} \end{array}$$

Le graphe asynchrone correspondant contient donc

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, "\mathtt{true}_R"] \arrow[dl, "\mathtt{true}_L"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & x_2 \arrow[dl] \arrow[dd, "\mathtt{true}"] \\
x_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "\mathtt{true}"'] \arrow[ddrr, phantom, "\sim"] & & y_3 \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & \\
 & & & y_1 \arrow[dl, "\mathtt{true}_L"] \\
y_2 \arrow[rr, "\mathtt{true}_R"'] & & y &
\end{tikzcd}$$

La stratégie `por`

- n'est pas déterministe (mais PCF+`por` est confluent)
- ne satisfait pas la Propriété du Cube

La Propriété du Cube revisitée

Un graphe asynchrone est **causal** lorsque

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, "o"] \arrow[dl, "m"'] \arrow[dd] & \sim & x_2 \arrow[dd, "n"] \\
x_1 \arrow[dd, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & & \\
 & x_3 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & y_1 \arrow[dl, "m"] \\
y_2 \arrow[rr, "o"'] & & y &
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, "o"] \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & x_2 \arrow[dl] \arrow[dd, "n"] \\
x_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "n"'] \arrow[ddrr, phantom, "\sim"] & & y_3 \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & \\
 & & & y_1 \arrow[dl, "m"] \\
y_2 \arrow[rr, "o"'] & & y &
\end{tikzcd}
$$

graphe	classe d'homotopie
cubique	ordre partiel
causal	?

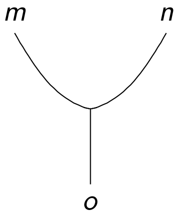
De la séquentialité à la causalité

classe d'homotopie d'un graphe vérifiant la propriété du Cube

$\Updownarrow$

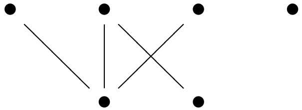
ordre partiel sur les coups

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] \arrow[dd, phantom, "\sim"] & \\ {} \arrow[dr, "n"'] & & {} \arrow[dl, "m"] \\ & {} \arrow[d, "o"'] & \\ & {} & \end{tikzcd} \qquad \mapsto$$



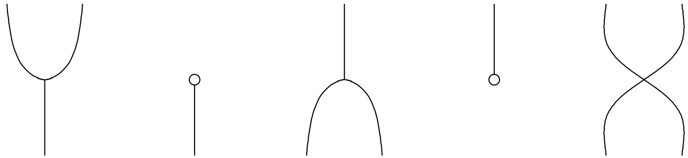
Une description de la causalité

causalité $\quad = \quad$ relation



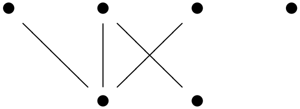
Générateurs

On veut engendrer ces dépendances par un nombre fini de générateurs.

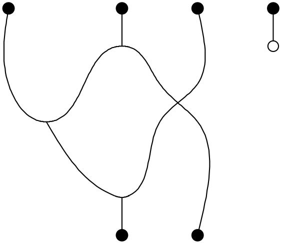


μ $\qquad$ η $\qquad$ δ $\qquad$ ε $\qquad$ γ

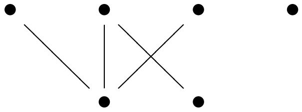
Une description de la causalité



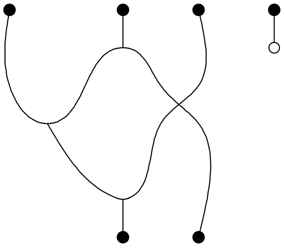
devient



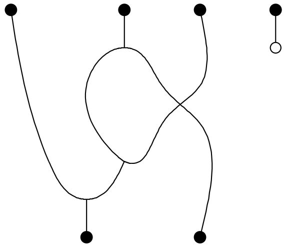
Une description de la causalité



devient



ou

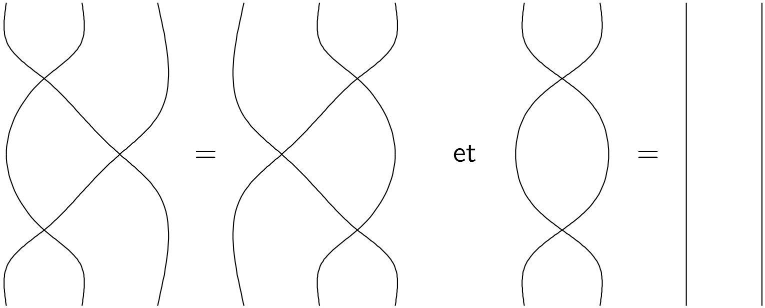


Une bigèbre relationnelle bicommutative

Ces générateurs satisfont les lois de
bigèbre relationnelle bicommutative
(sans unités).

Une bigèbre relationnelle bicommutative

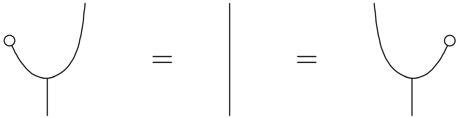
γ est une symétrie :



Une bigèbre relationnelle bicommutative

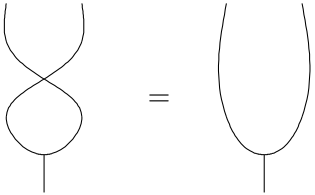
μ est associative :

admet η comme unité :



Une bigèbre relationnelle bicommutative

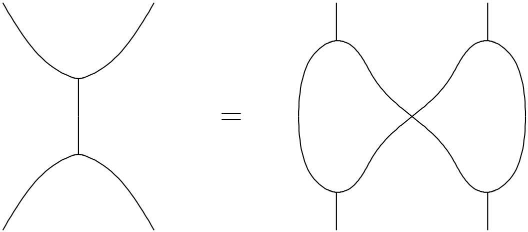
μ est commutative :



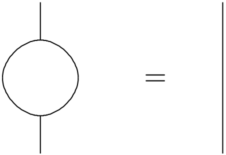
et dualement pour δ et ε.

Une bigèbre relationnelle bicommutative

μ et δ satisfont la loi de bigèbre :



relationnelle :



On peut générer la catégorie monoïdale libre contenant ces générateurs et quotienter les morphismes par ces égalités.

Une axiomatisation de la causalité

Ces lois ($+$ quelques autres) axiomatisent la causalité.

1. *correction* :
   deux morphismes égaux correspondent à la même causalité
2. *plénitude* :
   toute causalité peut être représentée par un morphisme
3. *fidélité* :
   deux morphismes représentant la même causalité sont égaux

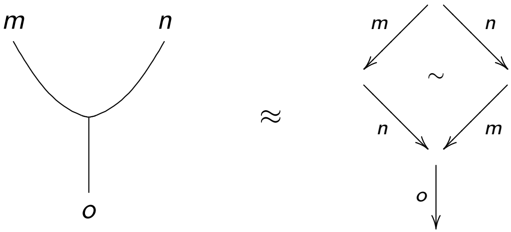
dépendance dans graphe asynchrone cubique

$=$

morphisme

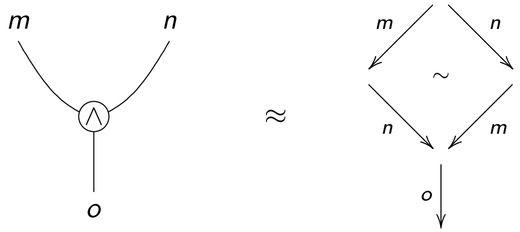
À quels réseaux les classes d'homotopie des graphes asynchrones cohérents correspondent-elles ?

Les graphes cubiques permettent d'exprimer des *dépendances conjonctives* :



Dépendances conjonctives

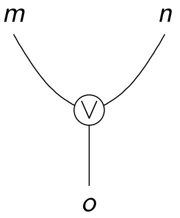
Les graphes cubiques permettent d'exprimer des *dépendances conjonctives* :



On le note maintenant $\hat{\mu}$.

Dépendances disjonctives

Les graphes cohérents permettent aussi d'exprimer des *dépendances disjonctives* :



$$\approx$$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, "n"] \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & & x_2 \arrow[dl] \arrow[dd, "o"] \\
x_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "o"'] \arrow[ddrr, phantom, "\sim"] & & y_3 \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\sim"] & \\
 & & & y_1 \arrow[dl, "m"] \\
y_2 \arrow[rr, "n"'] & & y &
\end{tikzcd}$$

On note $\check{\mu}$ ce générateur.

Quelles sont les lois satisfaites par le nouvel opérateur ?

δ et $\check{\mu}$ satisfont aussi les lois de
bigèbre relationnelle bicommutative.

$\hat{\mu}$ et $\check{\mu}$ satisfont les lois des treillis distributifs.

Definition

Un **treillis** $(L, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné tel que toute paire d'éléments x, y admet

- une borne sup $x \vee y$,
- une borne inf $x \wedge y$.

Il est **distributif** lorsque pour tous x, y, z,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Definition

Un **treillis** est un triplet $(L, \vee, \wedge)$ où L est un ensemble muni de deux lois

$$\vee, \wedge : L \times L \to L$$

tels que :

- *associativité* :

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad \text{et} \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

- *commutativité* :

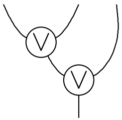
$$a \vee b = b \vee a \qquad \text{et} \qquad a \wedge b = b \wedge a$$

- *absorption* :

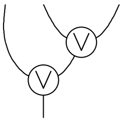
$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad \text{et} \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

associativité :

$$a \vee (b \vee c) \quad = \quad (a \vee b) \vee c$$

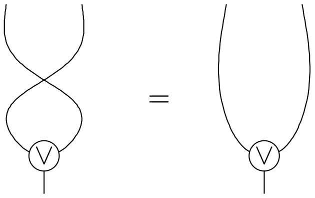


$$=$$



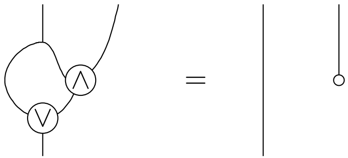
commutativité :

$$a \vee b \quad = \quad b \vee a$$



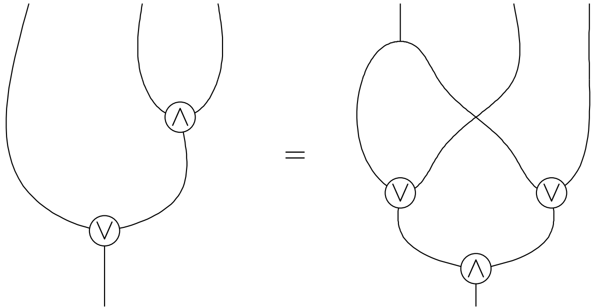
absorption :

$$a \vee (a \wedge b) \quad = \quad a$$



distributivité :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$



Conjecture

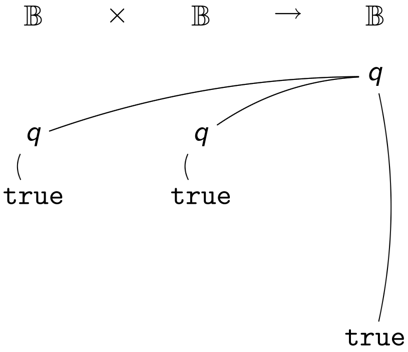
dépendance dans graphe asynchrone cohérent

$$=$$

morphisme

Implémentations de la conjonction

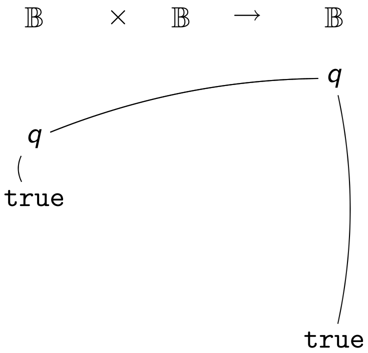
Voir au tableau.



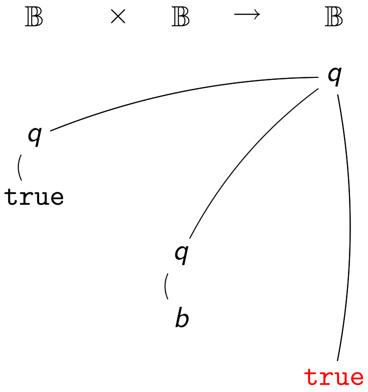
Innocence alternée pour PCF+ `por` (1)

Une stratégie doit être innocente au sens habituel.

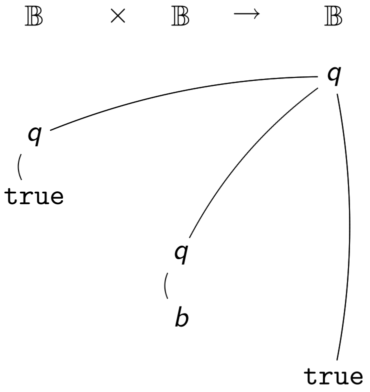
Innocence alternée pour PCF+ por (2)



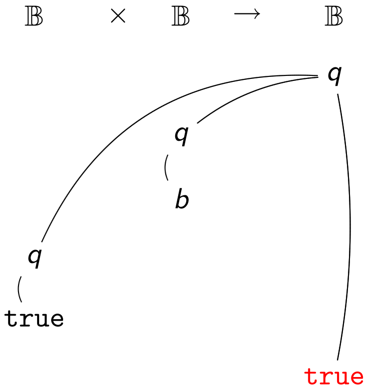
Innocence alternée pour PCF+ `por` (2)



Innocence alternée pour PCF+ $\texttt{por}$ (3)



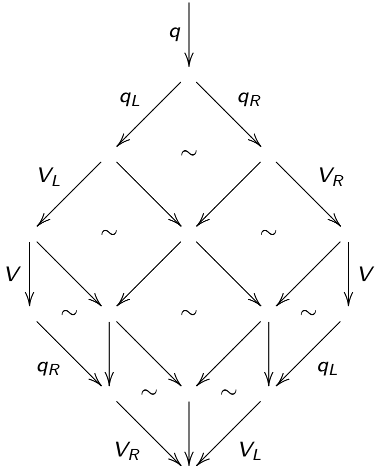
Innocence alternée pour PCF+ `por` (3)



Les stratégies doivent être bien parenthésées.

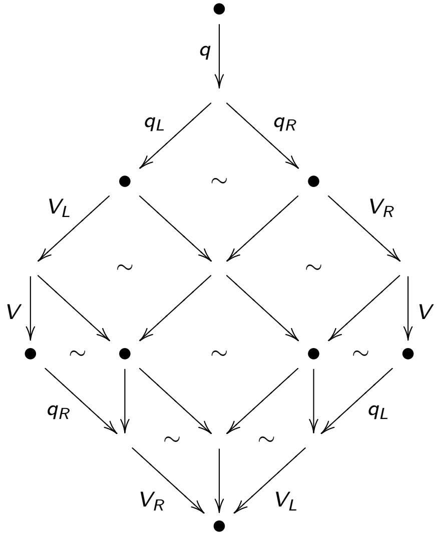
Retrouver le modèle de Scott

`por`



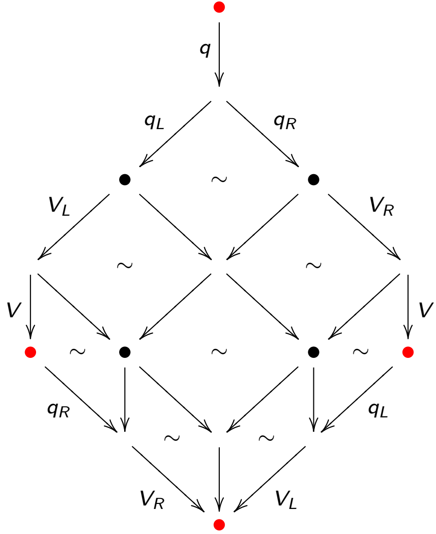
Retrouver le modèle de Scott

`por` : positions d'arrêt



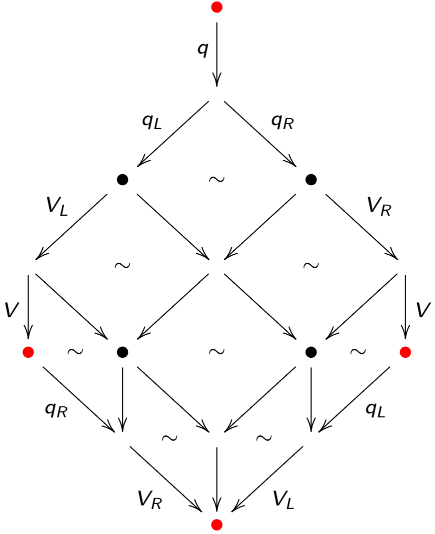
Retrouver le modèle de Scott

`por` : positions d'arrêt complètes



Retrouver le modèle de Scott

`por` : positions d'arrêt complètes



$$\begin{array}{lcl} \texttt{por}(\bot,\bot) & = & \bot \\ \texttt{por}(V,\bot) & = & V \\ \texttt{por}(\bot,V) & = & V \\ \texttt{por}(V,V) & = & V \end{array}$$

stratégies innocentes bien parenthésées

$\Updownarrow$

positions d'arrêt

$\Downarrow$

positions d'arrêt complètes

$\Updownarrow$

fonctions Scott-continues

Questions ?