

Une théorie algébrique de la sémantique des jeux

Notes pour la présentation

Samuel Mimram

Lyon, 30 octobre 2006

La sémantique des jeux s'est révélé être un outil très efficace pour donner des modèles de langages de programmation en s'attachant à leur aspect interactif. Dans ces sémantiques, on s'attache en effet à décrire quelles sont les interactions – c'est-à-dire les échanges d'information – qu'un programme peut avoir avec son environnement – les autres programmes, l'utilisateur. Dans ces modèles, les types sont décrits par des *jeux*, qui indiquent dans quel ordre les coups peuvent être joués (ce sont les règles du jeu), et les programmes sont interprétés par des *stratégies* qui décrivent comment le Joueur (le programme) va réagir suivant ce que joue l'Opposant (l'environnement). Toute la difficulté est de trouver les *invariants* que doivent respecter les stratégies pour décrire au plus près le comportement des programmes. Par exemple l'innocence et le bon parenthésage sont deux tels invariants, et les stratégies qui les respectent décrivent les termes de PCF.

La construction de ces modèles est parfois technique. En particulier, il peut se révéler difficile de montrer que les invariants que l'on impose aux stratégies sont préservés par composition. De plus, les conditions imposées peuvent sembler être ad hoc. Le présent travail tente de progresser dans la direction d'une définition abstraite des sémantiques de jeux, qui puisse à la fois révéler les principes fondamentaux qui les sous-tendent, et fournir un cadre mathématique satisfaisant pour l'étude de ces sémantiques. Nous voudrions donner une définition de ces sémantiques dans le langage de la théorie des catégories, c'est-à-dire décrire une *théorie algébrique* des sémantiques de jeux. Le défi principal qui s'offre à nous est de s'affranchir des critères de corrections globaux. Le critère d'acyclicité de Danos-Reigner impose par exemple de considérer les réseaux dans leur totalité. Ceux-ci vont être remplacés par des lois de cohérence entre opérateurs atomiques qui définissent comment ces opérateurs distribuent les uns par rapport aux autres. Une autre difficulté sera donc de définir quelles sont ces opérateurs, que l'on peut voir comme les briques de base à partir desquelles on peut construire des stratégies.

Commençons par expliquer ce que nous entendons exactement par théorie algébrique en prenant l'exemple de la théorie des monoïdes. Ici les deux briques atomiques sont l'opération binaire « + » et l'unité « e ». Leurs lois de cohérence sont les lois bien connues d'associativité et d'unité. Celles-ci sont algébriques car

définies comme des égalités qui quotientent l'espace « engendré librement » par les opérateurs. Cette théorie est importante pour nous car elle va nous servir de point de départ : nous allons progressivement l'enrichir jusqu'à capturer exactement certaines stratégies.

Mon exposé se fera en trois parties. Je commencerai par décrire quelles sont les jeux et stratégies que nous allons considérer, puis j'étudierai en détail la théorie des monoïdes pour enfin expliquer comment étendre cette étude jusqu'à capturer les stratégies.

1 Une sémantique de jeux pour FOMLL

Nous nous placerons dans la partie multiplicative de la logique linéaire avec les quantifications du premier ordre.

$$\forall x. \forall y. (\forall z. P \wp \forall z'. Q)$$

est par exemple une formule dans ce cadre. Nous nous intéressons particulièrement aux quantifications du premier ordre : ce sont elles que nous allons interpréter par des coups. Les quantifications existentielles seront les coups du Joueur et les quantifications universelles ceux de l'Opposant. L'intuition derrière cette sémantique est la suivante. Lorsque le Joueur joue un coup c'est qu'il doit fournir un témoin pour prouver la formule. L'Opposant essaye quant à lui de contredire la formule en donnant des valeurs avec lesquelles il « espère » que le joueur n'arrivera pas à montrer la formule. La formule peut être naturellement vue comme un arbre de coups, le *jeu*. C'est l'ordre dans lequel les coups peuvent être joués par une stratégie. Il est à noter que les arbres ne sont pas nécessairement alternés.

Les stratégies vont nous permettre d'interpréter les preuves de cette formule. Jouer un coup correspondra à appliquer une règle. Puisque nous nous intéressons aux quantificateurs du premier ordre, il y aura deux règles possibles : celle de \exists et celle de \forall . La stratégie va être une relation de dépendance sur les coups du jeu : « pour pouvoir jouer tel coup, j'ai besoin que l'Opposant ait joué tel et tel coups ». Quand un coup dépend-t-il véritablement d'un autre dans une preuve ? Pour répondre à cette question, considérons une preuve de la formule $\forall x. \exists y. P$. La règle d'introduction de la quantification existentielle remplace un y par un terme t (lorsqu'on lit la preuve de bas en haut). Cette règle dépend donc de la règle d'introduction du $\forall x$ lorsque le terme t a x comme variable libre. Sinon, on aurait presque pu faire directement l'introduction du $\exists y$, le fait qu'elle doive être faite après l'introduction du $\forall x$ est simplement une contingence due à la structure de la formule et non une dépendance essentielle de la preuve. Puisque nos stratégies décrivent ces dépendances, nous appelons *stratégies causales* les stratégies qui sont l'interprétation de telles preuves.

Une stratégie décrit une exploration de l'arbre du jeu. *[exemple]*

Résumons la situation : une formule est un ordre partiel sur un ensemble de coups (on généralise ici un peu l'arbre), et une stratégie sur un jeu est une relation sur les coups de ce jeu. On est naturellement amené à se demander quelles

sont les stratégies causales, c'est-à-dire les stratégies qui sont l'interprétation de preuves. Il est assez simple de voir que les stratégies causales sont caractérisées par deux conditions. La première dit que la stratégie ne peut rien imposer à son environnement, elle ne peut qu'en dépendre. La seconde est un critère d'acyclicité : une stratégie doit respecter l'ordre imposé par le jeu sur lequel elle joue. Il n'est pas évident que la composée de deux stratégies causales est elle-même causale. Une preuve directe de la compositionnalité de ces critères risque de se révéler être combinatoire et complexe.

Dans cet exposé, je traiterai principalement du cas simple où les formules ne contiennent pas de connecteurs multiplicatifs : ces formules sont des suites de quantifications du premier ordre terminées par un atome. Ce cas, bien qu'à première vue dégénéré, est déjà suffisamment riche pour me permettre d'exposer les principales techniques employées dans ce travail.

2 Δ et les monoïdes

Passons maintenant à quelque chose en apparence complètement différent : le rapport entre la catégorie simpliciale Δ et la notion de monoïde.

La *catégorie simpliciale*, habituellement notée Δ , a pour objet les ensembles finis totalement ordonnés : un objet \underline{n} , avec $n \in \mathbb{N}$, est un ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Les morphismes sont les fonctions croissantes entre ces ensembles. [exemple]. Cette catégorie est monoidale : si j'ai un morphisme $g : \underline{4} \rightarrow \underline{2}$ et un morphisme $f : \underline{1} \rightarrow \underline{2}$, je peux construire un morphisme $f \otimes g : \underline{5} \rightarrow \underline{4}$ en « mettant f au dessus de g ». Cette opération permet de munir Δ d'une structure de catégorie monoidale stricte (l'unité étant l'objet $\underline{0}$). Une telle catégorie monoidale dont les objets sont les entiers naturels est appelée *PRO*.

Les morphismes sont des fonctions que l'on impose croissantes. Ici la croissance peut être vue comme un critère global de correction :

$$\forall x, \forall y, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Il faut a priori regarder toutes les paires (x, y) pour vérifier qu'une fonction est bien croissante ! Je vais montrer comment avoir une description algébrique de ces fonctions croissantes, c'est-à-dire un moyen d'engendrer les fonctions croissantes, et uniquement celles-ci, en décrivant ces fonctions croissantes avec deux générateurs qui vérifient des lois de cohérence.

La catégorie Δ contient deux morphismes importants. La fonction $\mu : \underline{2} \rightarrow \underline{1}$ et la fonction $\eta : \underline{0} \rightarrow \underline{1}$. [les décrire, parler de la notation graphique en diagrammes de corde]. Il est aisé de vérifier que ces morphismes vérifient les lois d'associativité et d'unité : l'objet $\underline{1}$ est un monoïde dans cette catégorie. Les deux morphismes μ et η engendrent les autres morphismes dans le sens où tout morphisme f peut s'écrire comme composée et tenseur de μ , id et η . Mieux, deux morphismes $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ et $g : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$ sont égaux si et seulement si on peut prouver qu'ils sont égaux en utilisant les égalités engendrées par les lois de monoïde sur $(1, \mu, \eta)$.

La catégorie Δ est donc d'une certaine façon la catégorie monoïdale contenant un objet monoïde la plus générale : si \mathcal{C} est une catégorie qui contient un objet monoïde M alors la sous-catégorie ayant pour objets les M^n et pour morphismes les morphismes de monoïdes est isomorphe à Δ dont on a quotienté les morphismes par une relation d'équivalence. Cela peut être énoncé formellement : la catégorie des monoïdes (et morphismes de monoïdes) d'une catégorie monoïdale stricte \mathcal{C} est équivalente à la catégorie des foncteurs monoïdaux stricts de Δ dans \mathcal{C} . Dans ce sens, un monoïde dans \mathcal{C} , c'est la « même chose » qu'un foncteur monoïdal strict de Δ dans \mathcal{C} .

3 La théorie des jeux

Nous venons de voir qu'un foncteur monoïdal strict de Δ dans une catégorie monoïdale stricte \mathcal{C} pouvait être vu comme un monoïde dans \mathcal{C} . La question initiale de notre travail peut donc être reformulée de la sorte : à quelle structure algébrique les foncteurs monoïdaux de **Caus** dans \mathcal{C} correspondent-ils ? Nous notons ici **Caus** la catégorie des jeux et stratégies causales.

Décrivons plus en détails cette catégorie **Caus**. Ses objets sont les ensembles totalement ordonnés à $n \in \mathbb{N}$ éléments, dont chaque élément porte une *polarité* (Joueur / Opposant). Ils correspondent aux jeux interprétant les formules de FOMLL sans connecteurs multiplicatifs. Les morphismes sont les stratégies causales entre ces jeux. Attention, il faut lire les jeux à gauche d'une flèche avec des polarités inversées.

Nous avons vu précédemment comment décomposer toute fonction croissante à l'aide de deux morphismes de base, μ et η . Montrons sur un exemple comment faire de même avec ces stratégies. [*exemple*]. On comprend alors bien que ce travail consiste à faire du « reverse engineering » sur des fils : il faut trouver quels sont les figures que l'on peut faire avec ces fils et comment on peut manipuler ces fils.

Présentons rapidement formellement les morphismes atomiques et les lois de cohérence qui correspondent aux stratégies causales, et regardons tout d'abord la structure que doit avoir l'objet \exists dans cette catégorie. Pour commencer, il doit être un monoïde. Un coup joueur peut être justifié par deux Opposants (μ) ou par aucun (η). Ces morphismes vérifient les lois de monoïde : elles imposent qu'il n'y ait essentiellement qu'une seule stratégie qui exprime qu'un coup Joueur dépend de n coups Opposants. Et ce monoïde est commutatif. C'est aussi de même un comonoïde (la structure duale d'un monoïde) : un coup de l'Opposant peut justifier plusieurs coups du Joueur. Enfin ces deux structures doivent distribuer l'une par rapport à l'autre : en particulier, une comultiplication peut « passer avant » une multiplication, ce sont les règles de *bigèbre*, et on ne compte pas le nombre de fils qui vont d'un \exists à un autre. Cette structure de *bigèbre relationnelle bicommutative* dit que la sous-catégorie de **Caus** dont les objets sont ceux qui ne contiennent que des coups du Joueur, est isomorphe à **Rel**. Enfin, il nous faut un moyen de représenter les dépendances verticales $\forall \rightarrow \exists$. Pour cela il suffit de demander que l'objet \forall soit le dual à droite de l'objet \exists (formellement la

définition d'un dual à droite est semblable à celle d'un adjoint à droite). L'unité et la counité de la dualité se représentent en diagrammes de cordes comme des liens verticaux qui vérifient les lois « zig-zag ».

Ces structures suffisent pour décrire exactement les stratégies causales. Une sémantique de jeux, c'est pareil qu'une *bigèbre relationnelle bicommutative avec un dual* (à droite, mais à gauche ça va aussi). Une formule peut s'interpréter comme un tenseur des deux objets, et une stratégie causale comme un morphisme de cette bigèbre. En particulier, il faut intuitivement une structure de bigèbre relationnelle bicommutative sur \forall aussi, mais celle sur \exists est automatiquement transportée sur \forall par dualité.

Pour modéliser tout FOMLL, il faut monter en dimension. Un arbre a en effet besoin de deux structures tensorielles pour les décrire. On va donc interpréter les coups comme des foncteurs monoïdaux lâches. [*exemple*]. On obtient alors une *sémantique fonctorielle*. On a en effet intuitivement besoin d'avoir deux structures de bigèbres relationnelle bicommutatives : une verticale et une horizontale.

Nous avons ainsi montré comment révéler la structure catégorique derrière la sémantique des jeux en en donnant une théorie algébrique. Nous pensons que ce processus est très général et pourra être étendu à d'autres sémantiques.