Une description algébrique des jeux

Samuel Mimram

Équipe PPS, CNRS / Université Paris 7

30 octobre 2006

On veut une *définition par générateurs et équations* des jeux.

- Pourquoi les critères d'acyclicité composent-ils ?
- Quelles sont les briques de base des stratégies causales ?

Théoriser les jeux : formulation externe

Un monoïde $(M, +, e)$ est un ensemble M avec

- $+ : M \times M \to M$,
- $e \in M$,

tels que

- $\forall a, b, c \in M, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$,
- $\forall a \in M, \qquad e + a = a = a + e$.

Théoriser les jeux : formulation interne

Un monoïde (M, μ, η) est un objet M avec

- $\mu : M \otimes M \to M$,
- $\eta : 1 \to M$,

tels que

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \otimes M \arrow[r, "\mu\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes\mu"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta\otimes M"] \arrow[dr, "M"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[l, "M\otimes\eta"'] \arrow[dl, "M"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Peut-on définir une théorie algébrique des stratégies causales ?}}$

Plan

1. Une sémantique de jeux pour FOMLL
2. La théorie algébrique des monoïdes
3. Une théorie algébrique des jeux

Première partie I

Une sémantique de jeux pour FOMLL

Jeux

Formules : $\quad A \quad = \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \otimes A \quad | \quad A \parr A$

$$\forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)$$

Jeux

Formules : $\quad A \quad = \quad \exists x.A \quad | \quad \forall x.A \quad | \quad A \otimes A \quad | \quad A \parr A$

$$\boxed{\text{jeu} = \text{formule} = \text{arbre de coups (Joueur / Opposant)}}$$

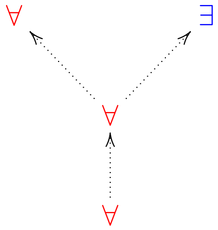
$\forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)$

Jeux

Formules : $\quad A \; = \; \exists x.A \;\mid\; \forall x.A \;\mid\; A \otimes A \;\mid\; A \parr A$

$\boxed{\text{jeu} = \text{formule} = \text{arbre de coups (Joueur / Opposant)}}$

$\forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q) \quad \rightsquigarrow$



Règles correspondant aux coups :

$$\frac{\Gamma \vdash P[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.P.\Delta}(\exists) \qquad \frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.P, \Delta}(\forall)$$

Stratégies

Règles correspondant aux coups :

$$\frac{\Gamma \vdash P[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.P.\Delta}(\exists) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.P, \Delta}(\forall)$$

Quand un coup dépend-il d'un autre ?

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash P[\mathbf{t}/y], \Delta}{\Gamma \vdash \exists y.P, \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \forall x.\exists y.P, \Delta}(\forall)$$

Stratégies

Règles correspondant aux coups :

$$\frac{\Gamma \vdash P[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.P.\Delta}(\exists) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.P, \Delta}(\forall)$$

Quand un coup dépend-il d'un autre ?

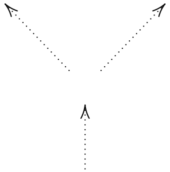
$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash P[\mathbf{t}/y], \Delta}{\Gamma \vdash \exists y.P, \Delta}(\exists)}{\Gamma \vdash \forall x.\exists y.P, \Delta}(\forall)$$

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation de dépendence}}$$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

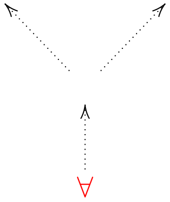
$$\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q) \quad \rightsquigarrow$$



Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

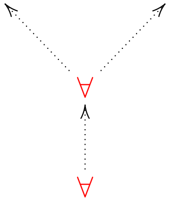
$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall) \quad \rightsquigarrow$$



Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

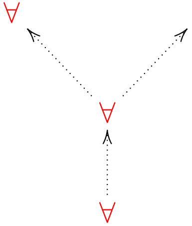
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}}{}}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}}{\vdash \forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall) \quad \rightsquigarrow$$



Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}}{\vdash P, {\color{blue}\exists z'}.Q}}{\vdash {\color{red}\forall z}.P, {\color{blue}\exists z'}.Q}({\color{red}\forall})}{\vdash {\color{red}\forall y}.({\color{red}\forall z}.P \parr {\color{blue}\exists z'}.Q)}({\color{red}\forall})}{\vdash {\color{red}\forall x}.{\color{red}\forall y}.({\color{red}\forall z}.P \parr {\color{blue}\exists z'}.Q)}({\color{red}\forall}) \quad \rightsquigarrow$$



Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

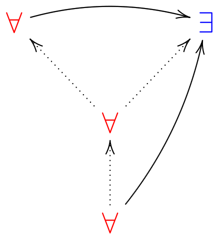
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall) \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd}
\forall & & \exists \\
& \forall \arrow[ul, dotted] \arrow[ur, dotted] & \\
& \forall \arrow[u, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Stratégies

$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$

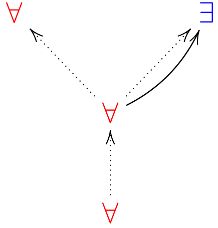


Variables libres de t : $\{x, z\}$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall) \quad \rightsquigarrow$$

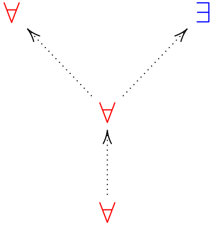


Variables libres de t : $\{y\}$

Stratégies

$$\boxed{\text{stratégie} \quad = \quad \text{relation sur les coups de l'arène}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash P, Q[t/z']}}{\vdash P, \exists z'.Q}(\exists)}{\vdash \forall z.P, \exists z'.Q}(\forall)}{\vdash \forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall)}{\vdash \forall x.\forall y.(\forall z.P \parr \exists z'.Q)}(\forall) \qquad \rightsquigarrow$$



Variables libres de t : $\emptyset$

Stratégies causales

$$\begin{array}{rcll} \text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} & (\leq_A) \\ \text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} & (\sigma) \end{array}$$

Stratégies causales

$$\begin{array}{rcll} \text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} & (\leq_A) \\ \text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} & (\sigma) \end{array}$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

1. si $m \ \sigma \ n$ alors m opposant et n joueur
2. la relation $\leq_A \ \cup \sigma$ est acyclique

Stratégies causales

$$\begin{array}{rcll} \text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} & (\leq_A) \\ \text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} & (\sigma) \end{array}$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

1. si $m \ \sigma \ n$ alors m opposant et n joueur

Interdit :

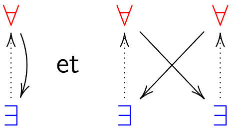
Stratégies causales

$$
\begin{array}{rcll}
\text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} & (\leq_A) \\
\text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} & (\sigma)
\end{array}
$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

2. la relation $\leq_A \cup \sigma$ est acyclique

Interdit :



Stratégies causales

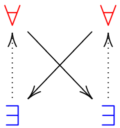
$$\begin{array}{rcll} \text{jeu } A & = & \text{ordre partiel sur les coups} & (\leq_A) \\ \text{stratégie } \sigma & = & \text{relation sur les coups} & (\sigma) \end{array}$$

Une stratégie $\sigma : A$ est *causale* lorsque

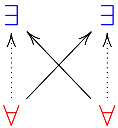
2. la relation $\leq_A \cup \sigma$ est acyclique

Interdit :

et



mais pas



Une première étape

On traitera ici le cas des formules sans connecteurs multiplicatifs :

$$\forall x_1.\forall x_2.\exists x_3.\forall x_4.\exists x_5.\exists x_6.\forall x_7 \dots P(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

Deuxième partie II

La théorie simpliciale des monoïdes

Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

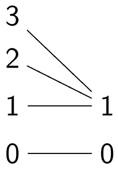
La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.



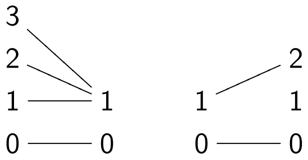
$: [4] \to [2]$

Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

C'est une catégorie : composition horizontale ($\circ$)

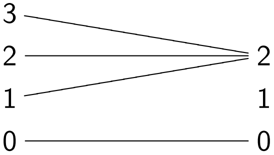


Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

C'est une catégorie : composition horizontale ($\circ$)

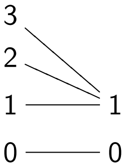


Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Cette catégorie est monoïdale : composition verticale ($\otimes$)



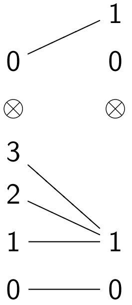
$: [4] \to [2]$

Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Cette catégorie est monoïdale : composition verticale ($\otimes$)



$: [1] \to [2]$

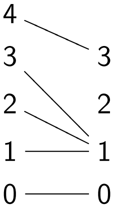
$: [4] \to [2]$

Pendant ce temps là, du côté des monoïdes

La catégorie simpliciale Δ a pour :

- objets : les ensembles $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$,
- morphismes : les fonctions croissantes.

Cette catégorie est monoïdale : composition verticale ($\otimes$)

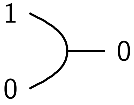


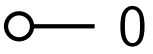
$: [5] \to [4]$

Δ, théorie des monoïdes

La catégorie Δ contient deux flèches génératrices :

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$

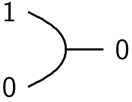


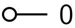


Δ, théorie des monoïdes

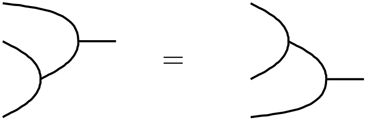
La catégorie Δ contient deux flèches génératrices :

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$

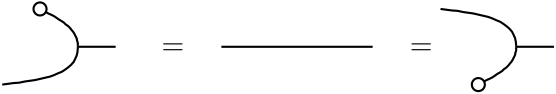




qui vérifient :



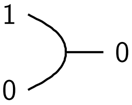
et

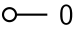


Δ, théorie des monoïdes

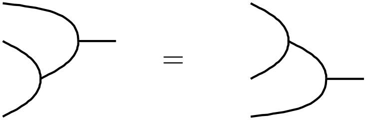
La catégorie Δ contient deux flèches génératrices :

$$\mu : [2] \to [1] \qquad \text{et} \qquad \eta : [0] \to [1]$$

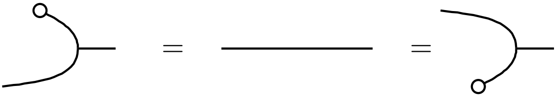




qui vérifient :



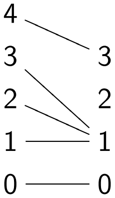
et



$\boxed{\mu \text{ et } \eta \text{ engendrent } \Delta}$

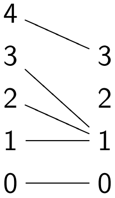
Δ, théorie des monoïdes

$\boxed{\mu \text{ et } \eta \text{ engendrent } \Delta}$

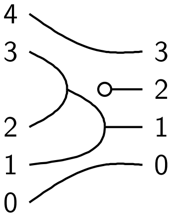


Δ, théorie des monoïdes

$\boxed{\mu \text{ et } \eta \text{ engendrent } \Delta}$



$\rightsquigarrow$



Δ, théorie des monoïdes

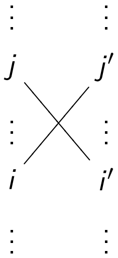
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{foncteur monoïdal } \Delta \to \mathcal{C} \\ = \\ \text{monoïde dans } \mathcal{C}\end{array}}$$

$$\mathbf{Monodes}(\mathcal{C}) \quad \cong \quad \mathbf{MonCat}(\Delta, \mathcal{C})$$

Δ, théorie des monoïdes

Deux formulations équivalentes des monoïdes :

- formulation *globale* : critère d'acyclicité (croissance)



$$i \leq j \quad \Rightarrow \quad f(i) \leq f(j)$$

- formulation *locale* : générateurs + relations

Troisième partie III

La théorie des jeux

La théorie des jeux

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{foncteur monoïdal } \Delta \to \mathcal{C} \\ = \\ \text{monoïde dans } \mathcal{C}\end{array}}$$

La théorie des jeux

foncteur monoïdal **Jeux** $\longrightarrow \mathcal{C}$

$=$

? ? ? ? ?

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

- les objets sont les entiers

  $$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$$

  avec une fonction de polarisation

  $$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

$$\begin{tikzcd} 3 \\ 2 \arrow[u, dotted] \\ 1 \arrow[u, dotted] \\ 0 \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

- les objets sont les entiers

$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

  avec une fonction de polarisation

$$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

$$\forall$$

$$\exists$$

$$\forall$$

$$\exists$$

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

- les objets sont les entiers

  $$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

  avec une fonction de polarisation

  $$\lambda : [n] \longrightarrow \{\exists, \forall\}$$

$$\begin{array}{cc} \forall & \forall \\ \exists & \exists \\ \forall & \exists \\ \exists & \forall \end{array}$$

La catégorie **Jeux**

La catégorie **Jeux** est la catégorie dont

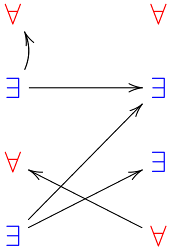
- les objets sont les entiers

$$[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

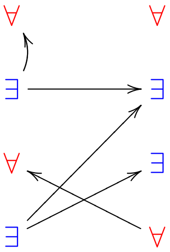
  avec une fonction de polarisation

$$\lambda : [n] \to \{\exists, \forall\}$$

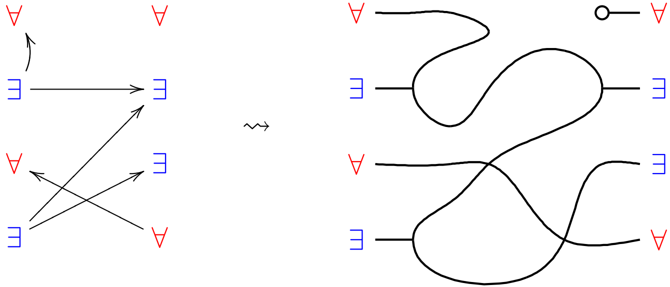
- les morphismes sont les stratégies causales.



Du reverse-engineering sur les fils



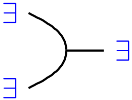
Du reverse-engineering sur les fils

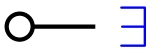


Les ingrédients

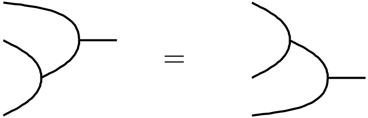
Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un monoïde

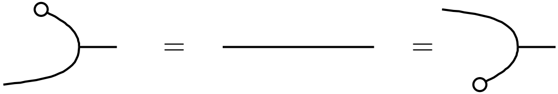




i.e. vérifie



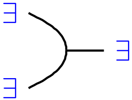
et

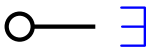


Les ingrédients

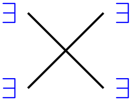
Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un monoïde commutatif

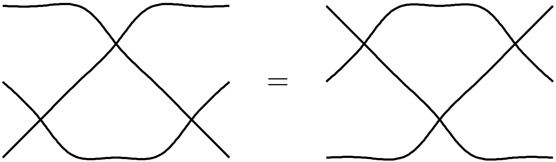




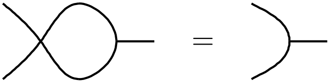
et



i.e. vérifie



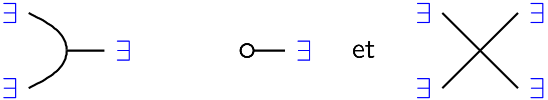
et



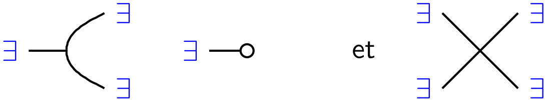
Les ingrédients

Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un monoïde commutatif



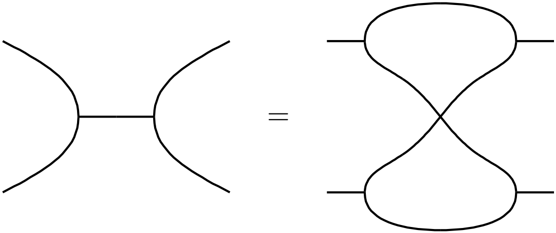
- $\exists$ est un comonoïde commutatif



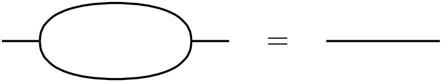
Les ingrédients

Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un bimonoïde commutatif



relationnel



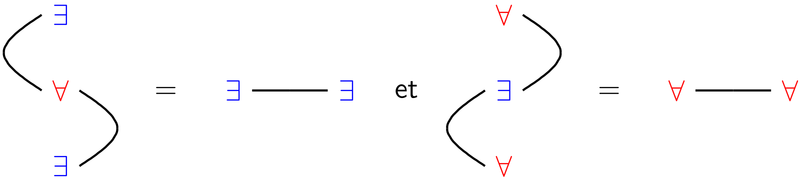
$\boxed{\text{relations entre les suites de } \exists}$

Les ingrédients

Deux objets $\exists$ et $\forall$ tels que

- $\exists$ est un bimonoïde commutatif
- $\exists \dashv \forall$

tels que



(dualité = adjonction)

Les ingrédients

C'est suffisant !

- En particulier, la dualité $\exists \dashv \forall$ induit une structure de bimonoïde commutatif relationnel sur $\forall$.

La théorie **Jeux**

foncteur monoidal **Jeux** $\to \mathcal{C}$

$=$

paire duale de bimonoïde commuatifs relationnels

$$\mathbf{JeuxMonoidaux}(\mathcal{C}) \quad \cong \quad \mathbf{MonCat}(\mathbf{Jeux}, \mathcal{C})$$

La suite

Théorie algébriques de jeux arborescents.

Il faut monter d'une dimension par suspension :

- coups = foncteurs adjoints

$$\exists : * \longrightarrow * \quad \text{et} \quad \forall : * \longrightarrow *$$

- morphismes = transformations naturelles

$$\begin{tikzcd}
\forall & & \exists \\
& \forall \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \forall \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\qquad \rightsquigarrow \qquad (\forall \otimes \exists) \circ \forall \circ \forall$$