Moyenne arithmético-géométrique, suites de Borchardt et applications

École polytechnique, 7 avril 2006

Régis Dupont

http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Regis.Dupont

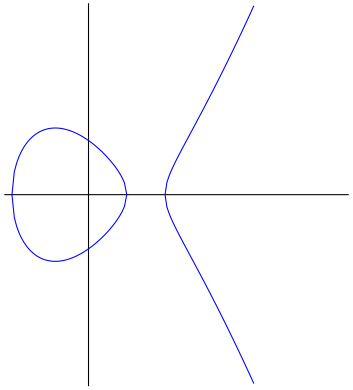
Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

Objectif



En cryptologie à clé publique :

courbe elliptique $\longrightarrow$ groupe fini

$$\left(E : y^2 = x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)$$

construction d'un cryptosystème : cardinal du groupe ?

Deux solutions :

- comptage de points sur les courbes
  algorithme SEA (par ex.)
- construction de courbes dont le nombre de points est connu
  (preuves de primalité, calcul de couplages [DEM05],. . .)
  multiplication complexe effective

La fonction j

Sur les complexes :

paramétrage des courbes elliptiques par des fonctions modulaires

ex. : $j(1.279\ldots\, i) = \frac{32152}{9}$

Sur un corps fini $\mathbb{F}_p$:

$\overline{j}$ caractérise la courbe réduite $\overline{E}$ (invariant)

la valeur de j contient beaucoup d'information sur la courbe !

Multiplication complexe :

calcul d'un polynôme de classes

$\longrightarrow$ ses racines sont les j-invariants des courbes qui nous intéressent

Polynômes de classes

Définition :

$$H_{-D}(X) = \prod_{\tau_n = \frac{-b_n + i\sqrt{D}}{2a_n}} (X - j(\tau_n)) \in \mathbb{Z}[X]$$

$[a_n, b_n, c_n]$ forme quadratique réduite de discriminant $-D$

Calcul :

évaluation des $j(\tau_n) \in \mathbb{C}$, reconstruction de $H_{-D}(X)$

Record (A. Enge) : $D = 2\,093\,236\,031$, $\deg = 100\,000$

précision nécessaire $\simeq 250\,000$ bits, 3 Go compressé !

Exemple :

$$H_{-56}(X) = X^4 - 16220384512\,X^3 + 2059647197077504\,X^2 + 2257767342088912896\,X + 100640860443215638036 48$$

Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

Moyenne arithmético-géométrique

Legendre

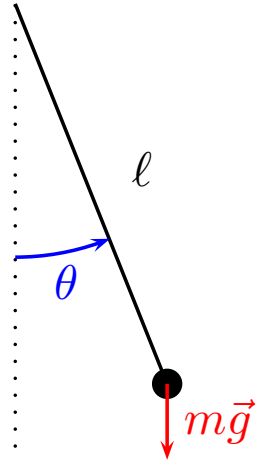
Lagrange

Gauss

Intégrales elliptiques (calculs liés à la mécanique) :

$$I(a_0, b_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_0^2 \sin^2 t + b_0^2 \cos^2 t}}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} & = & \sqrt{a_n b_n} \end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{AGM}(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2\, I(a_0, b_0)}$$

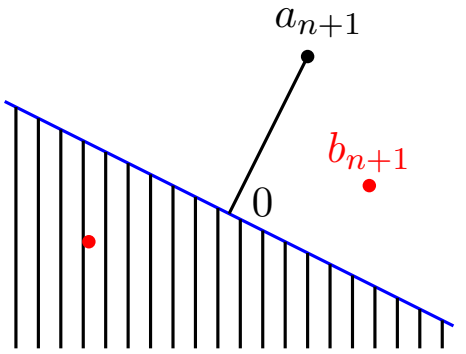


AGM sur $\mathbb{C}$

$a_0, b_0 \in \mathbb{C}$ [Gauss] : problème de choix de racine pour $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

Définition : b_{n+1} est le bon choix si

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| < |a_{n+1} + b_{n+1}|$$



Propriétés :

- définit un ensemble de suites (choix de racines)
- (a_n) et (b_n) ont toujours une limite commune
- convergence *quadratique* si la limite est non nulle
- limite nulle ssi nombre infini de mauvais choix

Une fonction AGM

Propriété (homogénéité) : pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite AGM } \Rightarrow (\lambda a_n, \lambda b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite AGM}$$

Définition : pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $a_0 = 1$, $b_0 = z$,

$(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite AGM n'ayant que des bons choix de racines

$\rightarrow \mathrm{M}(z)$ est alors la limite de cette suite

Complexité de l'évaluation :

$$O\left(\mathcal{M}(N)\left(\log N + \log\left|\log|z|\right|\right)\right)$$

$O\left(\mathcal{M}(N)\log N\right)$ si z est dans un compact ne contenant pas 0

Intérêt algorithmique

XVIII et XIX$^{\text{èmes}}$ siècles :

- Calculs à la main (intégrales elliptiques)
- Quelques dizaines de bits

Depuis les années 1970 :

- Utilisation d'ordinateurs, regain d'intérêt
- [Salamin, Borwein & Borwein] : calcul de π et du logarithme
- Dizaines de milliards de bits
  (la seule limite est la mémoire des machines utilisées !)
- [Mestre] : comptage de points sur des courbes elliptiques

Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

$\mathcal{H}$ et le groupe modulaire Γ

Demi-plan de Poincaré : $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(\tau) > 0\}$

Groupe modulaire elliptique : $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

engendré par $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Action de groupe : $\Gamma \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$S\tau = \frac{-1}{\tau}, T\tau = \tau + 1$

Fonctions modulaires

$\Gamma' \subset \Gamma$ (d'indice fini)

Définition : $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est une fonction modulaire pour Γ' si

- f est méromorphe sur $\mathcal{H}$
- pour tous $\gamma \in \Gamma'$ et $\tau \in \mathcal{H}$,

$$f(\gamma\tau) = f(\tau)$$

- f est méromorphe aux pointes

Proposition :

une fonction modulaire a toujours une période entière

(donc une série de Fourier)

Theta constantes

Définition :

$\tau \in \mathcal{H}$, $q = e^{\pi i \tau}$,

$$\theta_0(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} q^{n^2},$$

$$\theta_1(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n q^{n^2},$$

$$\theta_2(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2q^{\frac{1}{4}}\left(1 + \sum_{n\geqslant 1} q^{n^2+n}\right)$$

Propriétés des theta constantes

Formules de duplication :

$$\left.\begin{aligned} \theta_0^2(2\tau) &= \frac{\theta_0^2(\tau)+\theta_1^2(\tau)}{2} \\ \theta_1^2(2\tau) &= \theta_0(\tau)\cdot\theta_1(\tau) \\ \theta_2^2(2\tau) &= \frac{\theta_0^2(\tau)-\theta_1^2(\tau)}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{pour tout } \tau\in\mathcal{H}, \\ \left(\theta_0^2(2^n\tau),\theta_1^2(2^n\tau)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{est une suite AGM de limite 1} \end{array}$$

Égalité de Jacobi :

$$\theta_0^4 = \theta_1^4 + \theta_2^4$$

Propriétés des theta constantes

Formules de transformation :

$$\begin{aligned}
\theta_0^2(T\tau) &= \theta_1^2(\tau) & \qquad \theta_0^2(S\tau) &= -i\tau\theta_0^2(\tau) \\
\theta_1^2(T\tau) &= \theta_0^2(\tau) & \qquad \theta_1^2(S\tau) &= -i\tau\theta_2^2(\tau) \\
\theta_2^2(T\tau) &= i\theta_2^2(\tau) & \qquad \theta_2^2(S\tau) &= -i\tau\theta_1^2(\tau)
\end{aligned}$$

plus généralement, si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$:

$$\theta_s^2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \omega(\gamma,s)(c\tau+d)\theta_{\sigma(\gamma,s)}^2(\tau)$$

$\Rightarrow$ passer aux quotients !

Fonctions k et k'

Définition :

$$k'(\tau) = \frac{\theta_1^2}{\theta_0^2}(\tau) \qquad k(\tau) = \frac{\theta_2^2}{\theta_0^2}(\tau)$$

Égalité de Jacobi :

$$k'^2 + k^2 = 1$$

Formules de transformation :

$$k'(T\tau) = \frac{1}{k'(\tau)}, \quad k'(S\tau) = k(\tau), \quad k(T\tau) = i\frac{k(\tau)}{k'(\tau)}, \quad k(S\tau) = k'(\tau)$$

k' est une fonction modulaire pour

$$\Gamma_{k'} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : b \equiv 0 \bmod 2, c \equiv 0 \bmod 4 \right\}$$

La fonction j

Définition :

$$j(\tau) = 256 \frac{\left(1 - k'^2(\tau) + k'^4(\tau)\right)^3}{k'^4(\tau)\left(1 - k'^2(\tau)\right)^2}$$

$\Rightarrow j$ est une fonction modulaire pour Γ

$$j(\tau) = \frac{1}{q^2} + 744 + 196884q^2 + 21493760q^4 + \ldots$$

Théorème :

deux fonctions modulaires sont liées algébriquement

(polynôme modulaire)

Exemple : $k^2 + k'^2 = 1$, k' et j,...

Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

Évaluation de fonctions modulaires

Objectif : étant donné $\tau \in \mathcal{H}$, évaluer $k', j, \ldots$ en τ

On peut se restreindre à θ_0 et θ_1 ou à k'

Utilisation de polynômes modulaires connus :

$$f(\tau) \text{ est racine de } \Phi_{f,k'}\left(X, k'(\tau)\right)$$

Un premier type d'algorithmes

Utilisation des séries en q :

$$\theta_0(\tau) = 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} q^{n^2} \qquad \theta_1(\tau) = 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n q^{n^2}$$

Intérêt :

- ces séries sont creuses
- les coefficients valent ± 1
- $q \mapsto \{q, q^4, \ldots, q^{n^2}\}$: $2n-1$ multiplications
  $(q^{(n+1)^2} = q^{n^2} q^{2n+1})$
- partage des calculs

Complexité : $O(\mathcal{M}(N)\sqrt{N})$ pour une précision de N bits

Utilisation des suites AGM

- pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, on a la suite AGM

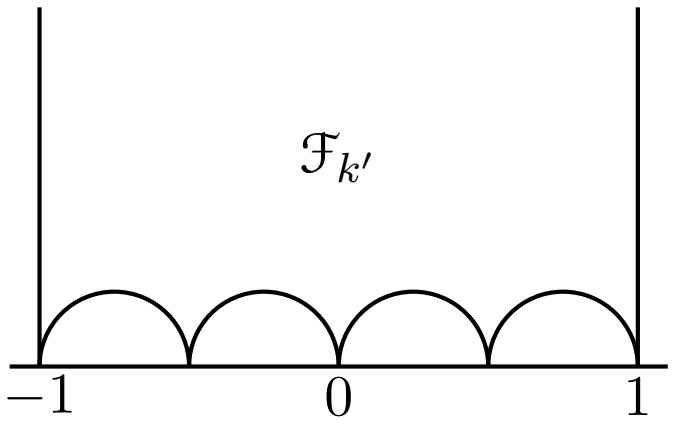
$$\left(\theta_0^2(2^n\tau), \theta_1^2(2^n\tau)\right) \to 1$$

- donc il existe une suite AGM partant de $(1, k'(\tau))$ et convergeant vers $\frac{1}{\theta_0^2(\tau)}$

Problème : quels sont les choix de racines correspondant à ces suites ?

Théorème [Gauss] : pour tout $\tau \in \mathcal{F}_{k'}$,
M est analytique en τ et

$$M\left(k'(\tau)\right) = \frac{1}{\theta_0^2(\tau)}$$



AGM : calcul de τ à partir de $k'(\tau)$

si τ et $S\tau \in \mathcal{F}_{k'}$,

$$M\left(k(\tau)\right) = M\left(k'(S\tau)\right) = \frac{1}{\theta_0^2(S\tau)} = \frac{i}{\tau\theta_0^2(\tau)}$$

de plus

$$M\left(k'(\tau)\right) = \frac{1}{\theta_0^2(\tau)}$$

on a donc

$$\tau = \frac{iM\left(k'(\tau)\right)}{M\left(k(\tau)\right)} = \frac{iM\left(k'(\tau)\right)}{M\left(\sqrt{1-k'^2(\tau)}\right)}$$

car $k^2(\tau) + k'^2(\tau) = 1$

Évaluation de k' : le principe

$\Rightarrow$ on pose

$$f_\tau(z) = iM(z) - \tau M\left(\sqrt{1-z^2}\right)$$

pour tout $\tau \in \mathcal{F}$,

- $f_\tau\left(k'(\tau)\right) = 0$
- f_τ est analytique
- $$\frac{df_\tau}{dz}\left(k'(\tau)\right) = \frac{-2}{\pi\tau\theta_1^2(\tau)\theta_2^4(\tau)} \neq 0$$

$\Rightarrow$ k' peut être évaluée par des itérations de Newton sur f_τ

Une suite convergeant vers $k'(\tau)$

z_0 approximation "assez précise" de $k'(\tau)$ (séries en q)

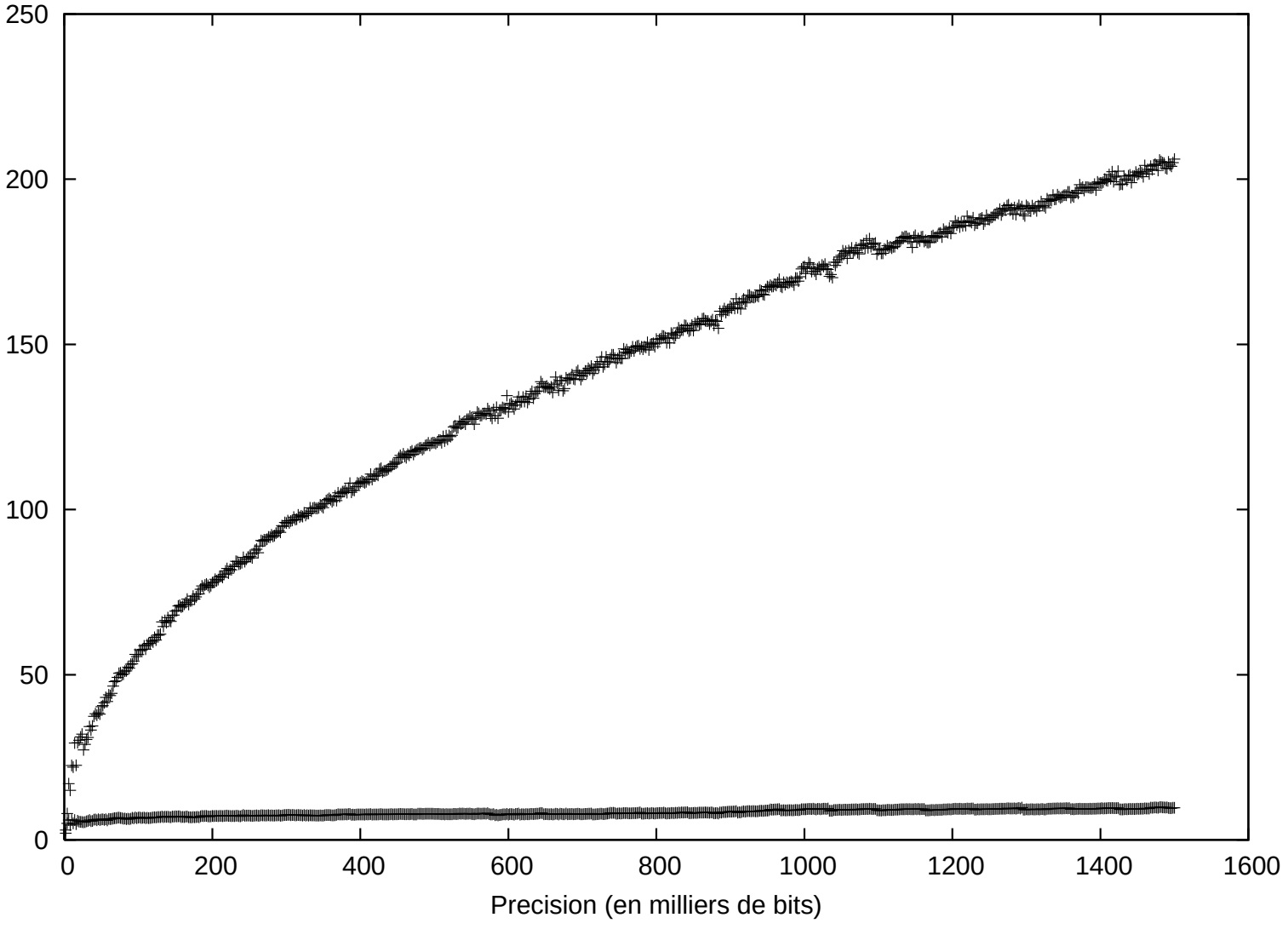
$$z_{n+1} = z_n + \frac{\pi\tau z_n(1-z_n^2)\left(iM(z_n) - \tau M\left(\sqrt{1-z_n^2}\right)\right)}{2M(z_n)^3}$$

$\Rightarrow (z_n)$ converge *quadratiquement* vers $k'(\tau)$

Complexité de l'évaluation de k' :

$$O\left(\mathcal{M}(N)\log N\right)$$

. . . et ça marche !


250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Precision (en milliers de bits)

Évaluation du logarithme

Cas réel : Salamin, Borwein

Idée : lorsque $\mathrm{Im}\,(\tau) \gg 0$,

$$\log k(\tau) \simeq \log 4q^{\frac{1}{2}} = 2\log 2 + \frac{i\pi\tau}{2} \qquad \mathrm{M}\,(k(\tau)) = \frac{i}{\tau\theta_0(\tau)} \simeq \frac{i}{\tau}$$

Propriété : soit $z \in \mathbb{C}^\times$ tel que $|z| \leqslant 2^{-12}$ et $|\mathrm{Arg}(z)| \leqslant \frac{\pi}{4}$, alors

$$\left|\log z + \frac{\pi}{2\mathrm{M}(4z)}\right| \leqslant 4.16\,|z|^2\,(1 + |\log z|)$$

Complexité (évaluation du log) :

$$O\,(\mathcal{M}(N)\log N)$$

Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

Généralisation

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}_g \quad (\text{matrices } g \times g \text{ symétriques, } \mathrm{Im}\,(\tau) > 0)$$

$$\Gamma \to \Gamma_g \quad (\text{certaines matrices entières } 2g \times 2g)$$

Action de groupe : $\Gamma_g \times \mathcal{H}_g \to \mathcal{H}_g$

$$\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

Lien avec les courbes de genre g ($y^2 = x^{2g+1} + \ldots$ par ex.)

Theta constantes

$\vec{a}, \vec{b} \in \{0,1\}^g$

Définition générale :

$$\theta_{\vec{a},\vec{b}}(\tau) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i\, {}^t\left(\vec{n}+\frac{\vec{a}}{2}\right)\tau\left(\vec{n}+\frac{\vec{a}}{2}\right) + {}^t\left(\vec{n}+\frac{\vec{a}}{2}\right)\vec{b}\right)$$

si $\vec{a} = \vec{0}$, on a 2^g fonctions de la forme

$$\theta_{\vec{0},\vec{b}}(\tau) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} (-1)^{{}^t\vec{n}\vec{b}} \exp\left(\pi i {}^t\vec{n}\tau\vec{n}\right)$$

Évaluation par sommation :

$$O\left(\mathcal{M}(N) N^{\frac{g}{2}}\right)$$

Résumé de l'épisode précédent

Ingrédients :

- formules de duplication
- équation modulaire (Jacobi)
- formules de transformation (action de Γ)
- lien avec l'AGM
- algorithme $k'(\tau) \longrightarrow \tau$
- itérations de Newton : $\tau \longrightarrow k'(\tau)$

Formules de duplication

Dans le cas $g = 2$:

$$\begin{aligned}
\theta_0^2(2\tau) &= \frac{\theta_0^2(\tau)+\theta_1^2(\tau)+\theta_2^2(\tau)+\theta_3^2(\tau)}{4} \\
\theta_1^2(2\tau) &= \frac{\theta_0(\tau)\theta_1(\tau)+\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)}{2} \\
\theta_2^2(2\tau) &= \frac{\theta_0(\tau)\theta_2(\tau)+\theta_1(\tau)\theta_3(\tau)}{2} \\
\theta_3^2(2\tau) &= \frac{\theta_0(\tau)\theta_3(\tau)+\theta_1(\tau)\theta_2(\tau)}{2}
\end{aligned}$$

. . . et des formules similaires pour les autres theta constantes

$\Rightarrow$ équations modulaires (toutes les theta constantes sont liées algébriquement aux 4 premières), par ex. :

$$\theta_4^8 - (\theta_0^4 - \theta_1^4 + \theta_2^4 - \theta_3^4)\theta_4^4 + (\theta_0^2\theta_2^2 - \theta_1^2\theta_3^2)^2 = 0$$

Formules de duplication

Dans le cas $g = 2$:

$$\begin{aligned}
\theta_0^2(2\tau) &= \frac{\theta_0^2(\tau) + \theta_1^2(\tau) + \theta_2^2(\tau) + \theta_3^2(\tau)}{4} \\
\theta_1^2(2\tau) &= \frac{\theta_0(\tau)\theta_1(\tau) + \theta_2(\tau)\theta_3(\tau)}{2} \\
\theta_2^2(2\tau) &= \frac{\theta_0(\tau)\theta_2(\tau) + \theta_1(\tau)\theta_3(\tau)}{2} \\
\theta_3^2(2\tau) &= \frac{\theta_0(\tau)\theta_3(\tau) + \theta_1(\tau)\theta_2(\tau)}{2}
\end{aligned}$$

. . . et des formules similaires pour les autres theta constantes

$\Rightarrow$ équations modulaires (toutes les theta constantes sont liées algébriquement aux 4 premières), par ex. :

$$\theta_4^8 - (\theta_0^4 - \theta_1^4 + \theta_2^4 - \theta_3^4)\theta_4^4 + (\theta_0^2\theta_2^2 - \theta_1^2\theta_3^2)^2 = 0$$

Formules de transformation

si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_g$,

$$\theta_s^2(\gamma\tau) = \omega(\gamma, s)\mathrm{Det}(C\tau + D)\theta^2_{\sigma(\gamma,s)}(\tau)$$

$\Rightarrow$ on considère les quotients des theta constantes

$\Rightarrow$ notion de fonctions modulaires de Siegel

$T_{a,b}(\tau) := \frac{\theta^2_{a,b}(\tau)}{\theta^2_{0,0}(\tau)}$ est une telle fonction (généralise k et k')

Moyenne de Borchardt

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n+c_n+d_n}{4} \\
b_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}+\sqrt{c_n}\sqrt{d_n}}{2} \\
c_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{c_n}+\sqrt{b_n}\sqrt{d_n}}{2} \\
d_{n+1} &= \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{d_n}+\sqrt{b_n}\sqrt{c_n}}{2}
\end{aligned}
$$

(formules similaires pour 2^g éléments)

Théorème (Dupont) :

- il y a toujours une limite unique
- notion de bon/mauvais choix ($\sqrt{b_n}, \sqrt{c_n}, \sqrt{d_n}$ "proches" de $\sqrt{a_n}$)
- caractérisation des suites ayant une limite nulle
- convergence quadratique si la limite est non nulle

Remarque sur les suites de Borchardt

- pour tout $\tau \in \mathcal{H}_g$, on a une suite de Borchardt

$$\left(\theta_{0,b}^2(2^n\tau)\right)_{b\in\{0,1\}^g, n\in\mathbb{N}} \to 1$$

- donc il existe une suite de Borchardt partant de

$$\left(T_{0,b}(\tau)\right)_{b\in\{0,1\}^g, n\in\mathbb{N}}$$

convergeant vers $\frac{1}{\theta_{0,0}^2(\tau)}$

(Gros) problème : quels sont les choix de racines correspondants ?

Conjectures, méthodes numériques mais pas de résultat satisfaisant !

Conjecture ($g = 2$)

Conjecture : pour tous $\tau \in \mathcal{F}_2$ et

$$\gamma \in \left\{ I, \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

la suite $\left(\theta^2_{0,b}(2^n \gamma \tau)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient que des bons choix de racines

La brique de base

Objectif : étant donnés les $T_{0,b}(\tau)$, déterminer τ

Algorithme :

- déterminer les $T_{a,b}(\tau)$ (équations modulaires)
- pour certaines matrices $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_g$ bien choisies
  - déterminer les $T_{0,b}(\gamma\tau)$ (formules de transformation)
  - déterminer les $\theta^2_{0,0}(\gamma\tau)$ (moyennes de Borchardt)
    $\longrightarrow$ choix de racines ?
  - en déduire $\mathrm{Det}(C\tau + D)$, *via*

$$\theta^2_{0,0}(\gamma\tau) = \omega(\gamma)\mathrm{Det}(C\tau + D)\theta^2_{\sigma(\gamma)}(\tau)$$

- en déduire τ

En pratique...

Complexité :

$$O\left(g^2 2^g \mathcal{M}(N) \log N\right)$$

Dans le cas du genre 2 :

- on se ramène au cas où $\tau \in \mathcal{F}_2$
- utilisation de la conjecture pour le choix des racines
- variante prouvée : plus difficile à implanter

En genre $g \geqslant 3$:

- domaines fondamentaux moins bien connus
- pas de conjectures pour les choix de racines
- possible en théorie mais sans doute très lent

Utilisations

Tel quel : détermination de matrices de Riemann

- courbe hyperelliptique $\longrightarrow \tau$ sous-jacent
  (utilisation des formules de Thomae)
- implanté en genre 2
- complexité : $O\left(g^2 2^g \mathcal{M}(N) \log N\right)$

Évaluation rapide des theta constantes en genre 2

- $\tau \in \mathcal{F}_2 \longrightarrow \theta_{a,b}(\tau)$
  inversion de l'algorithme *via* des itérations de Newton trivariées
- méthode heuristique (pas de preuve de convergence)
- complexité (heuristique) : $O\left(\mathcal{M}(N) \log N\right)$

Applications

L'évaluation rapide des theta constantes en genre 2 permet

- le calcul de polynômes de classe en genre 2 (multiplication complexe, travail en cours avec T. Houtmann)
- le calcul de polynômes modulaires en genre 2
  - méthode d'évaluation/interpolation
  - utilise aussi l'évaluation rapide de matrices de Riemann
  - encore très expérimental

Polynômes modulaires ($g = 2$)

$\Phi_{p,1}, \Phi_{p,2}, \Phi_{p,3}$ 3 polynômes de $\mathbb{Z}(j_1, j_2, j_3)[X]$

Calcul :

évaluation/interpolation

$p = 2$:

30 Mo compressé

Dénominateur =

$$236196j_1^5 - 972j_1^4j_2^2 + 5832j_1^4j_2j_3 + 19245600j_1^4j_2 - 8748j_1^4j_3^2 - 104976000j_1^4j_3 + 125971200000j_1^4 + j_1^3j_2^4$$
$$-12j_1^3j_2^3j_3 - 77436j_1^3j_2^3 + 54j_1^3j_2^2j_3^2 + 870912j_1^3j_2^2j_3 - 507384000j_1^3j_2^2 - 108j_1^3j_2j_3^3 - 3090960j_1^3j_2j_3^2$$
$$+2099520000j_1^3j_2j_3 + 81j_1^3j_3^4 + 3499200j_1^3j_3^3 + 78j_1^2j_2^5 - 1332j_1^2j_2^4j_3 + 592272j_1^2j_2^4 + 8910j_1^2j_2^3j_3^2$$
$$-4743360j_1^2j_2^3j_3 - 29376j_1^2j_2^2j_3^3 + 9331200j_1^2j_2^2j_3^2 + 47952j_1^2j_2j_3^4 - 31104j_1^2j_3^5 - 159j_1j_2^6 + 1728j_1j_2^5j_3$$
$$-41472j_1j_2^5 - 6048j_1j_2^4j_3^2 + 6912j_1j_2^3j_3^3 + 80j_2^7 - 384j_2^6j_3$$

Dénominateur de Φ_3

$$2^4 \times 3^{31} \times 5^5 \times 19^{10} \times 29^5 j_1^{12} - 2^4 \times 3^{32} \times 19^5 \times 47 \times 17064586291\, j_1^{13} + 2^6 \times 3^{31} \times 5^3 \times 13 \times 19^7 \times 29^2 \times 131 \times 1949\, j_1^{12} j_3 - 2^4 \times 3^{30} \times 5^2 \times 7 \times 19^6 \times 29 \times 4701082031\, j_1^{12} j_2 + 2^{11} \times 3^{28} \times 5^4 \times 19^8 \times 29^3 \times 5557\, j_1^{11} j_2 j_3$$

$$-2^9 \times 3^{27} \times 5^3 \times 19^9 \times 23 \times 29^2 \times 37 \times 149\, j_1^{11} j_2^2 - 2^2 \times 3^{30} \times 11^{12} j_1^{14} + 2^{12} \times 3^{29} \times 5 \times 11^5 \times 19^2 \times 41 \times 1399\, j_1^{13} j_3 - 2^5 \times 3^{27} \times 19^4 \times 59 \times 109 \times 6570848059\, j_1^{12} j_3^2 + 2^9 \times 3^{24} \times 5^2 \times 19^6 \times 29 \times 449 \times 160827643\, j_1^{11} j_3^3$$

$$-2^3 \times 3^{28} \times 7 \times 11^5 \times 19 \times 305677787\, j_1^{13} j_2 + 2^8 \times 3^{26} \times 11 \times 19^3 \times 12997844123599\, j_1^{12} j_2 j_3 - 2^5 \times 3^{24} \times 5 \times 11 \times 19^5 \times 3517 \times 53807008819\, j_1^{11} j_2 j_3^2 - 2^2 \times 3^{25} \times 19^2 \times 163 \times 368477994090277\, j_1^{12} j_2^2$$

$$+2^7 \times 3^{23} \times 19^4 \times 64634951 \times 486375839\, j_1^{11} j_2^2 j_3 + 2^9 \times 3^{24} \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 19^6 \times 29 \times 61 \times 241 \times 59051\, j_1^{10} j_2^2 j_3^2 - 2^3 \times 3^{21} \times 19^3 \times 225900161 \times 27135844457\, j_1^{11} j_2^3 - 2^9 \times 3^{23} \times 5 \times 11 \times 19^5 \times 23413242718669\, j_1^{10} j_2^3 j_3$$

$$+2^5 \times 3^{22} \times 19^4 \times 83 \times 349813 \times 4414606477\, j_1^{10} j_2^4 - 2^9 \times 3^{24} \times 13 \times 19^5 \times 41 \times 7849496341\, j_1^9 j_2^5 - 2^4 \times 3^{28} \times 11^{10} j_1^{13} j_3^2 + 2^7 \times 3^{26} \times 5^2 \times 11^3 \times 19 \times 239 \times 592133\, j_1^{12} j_3^3 - 2^6 \times 3^{24} \times 13 \times 19^3 \times 53 \times 953 \times 289296559\, j_1^{11} j_3^4$$

$$-2^{12} \times 3^{27} \times 19^5 \times 7943431\, j_1^{10} j_3^5 + 2^5 \times 3^{27} \times 11^{10} j_1^{13} j_2 j_3 - 2^6 \times 3^{26} \times 11^3 \times 30977 \times 3469639\, j_1^{12} j_2 j_3^2 + 2^9 \times 3^{23} \times 13 \times 19^2 \times 557 \times 62927 \times 2729633\, j_1^{11} j_2 j_3^3 + 2^{11} \times 3^{23} \times 19^4 \times 36533154133859\, j_1^{10} j_2 j_3^4 - 2^4 \times 3^{26} \times 11^{10} j_1^{13} j_2^2$$

$$+2^4 \times 3^{25} \times 11^3 \times 149 \times 263 \times 277 \times 32099\, j_1^{12} j_2^2 j_3 - 2^4 \times 3^{23} \times 19 \times 251 \times 433 \times 2039 \times 1155491891\, j_1^{11} j_2^2 j_3^2 - 2^{10} \times 3^{22} \times 19^3 \times 73 \times 518831 \times 107124221\, j_1^{10} j_2^2 j_3^3 - 2^2 \times 3^{23} \times 5 \times 11^3 \times 23 \times 59 \times 71 \times 2390879\, j_1^{12} j_2^3$$

$$+2^8 \times 3^{21} \times 5 \times 7 \times 19 \times 607819187655293\, j_1^{11} j_2^3 j_3 + 2^7 \times 3^{23} \times 11 \times 19^2 \times 2909 \times 2301281960303\, j_1^{10} j_3^3 j_3^2 + 2^{13} \times 3^{23} \times 19^4 \times 858883 \times 6258697\, j_1^9 j_2^3 j_3^3 - 2^2 \times 3^{20} \times 11 \times 29221 \times 13097683362521\, j_1^{11} j_2^4$$

$$-2^{12} \times 3^{20} \times 13 \times 19 \times 853 \times 49417 \times 334911601\, j_1^{10} j_2^4 j_3 - 2^{12} \times 3^{21} \times 19^3 \times 1136567 \times 1232464019\, j_1^9 j_2^4 j_3^2 + 2^4 \times 3^{19} \times 5 \times 7^2 \times 17 \times 103 \times 353583879893971\, j_1^{10} j_2^5 + 2^{10} \times 3^{20} \times 5^3 \times 19^2 \times 2879 \times 10457 \times 21317083\, j_1^9 j_2^5 j_3$$

$$-2^6 \times 3^{19} \times 19 \times 29 \times 449 \times 51131 \times 9269294087\, j_1^9 j_2^6 - 2^{12} \times 3^{21} \times 19^3 \times 157 \times 19307756176 7\, j_1^8 j_2^6 j_3 + 2^{11} \times 3^{21} \times 5 \times 7 \times 13 \times 19^2 \times 47 \times 9019003787\, j_1^8 j_2^7 - 2^4 \times 3^{25} \times 5 \times 11^8 j_1^{12} j_3^4 - 2^8 \times 3^{24} \times 11 \times 23 \times 359 \times 5363887\, j_1^{11} j_3^5$$

$$\times 3^{21} \times 5 \times 7 \times 19^2 \times 5241332618339\, j_1^{10} j_3^6 + 2^6 \times 3^{24} \times 5 \times 11^8 j_1^{12} j_2 j_3^3 + 2^6 \times 3^{23} \times 11 \times 13^2 \times 4084495637\, j_1^{11} j_2 j_3^4 - 2^{14} \times 3^{21} \times 19 \times 46021575357193\, j_1^{10} j_2 j_3^5 - 2^{11} \times 3^{26} \times 5 \times 19^3 \times 2251 \times 22807\, j_1^9 j_2 j_3^6 - 2^5 \times 3^{24} \times 5 \times 11^8 j_1^{12} j_2^2 j_3^2$$

$$-2^6 \times 3^{22} \times 7 \times 11 \times 145580724439\, j_1^{11} j_2^2 j_3^3 + 2^4 \times 3^{20} \times 7 \times 233 \times 81899 \times 13955891671\, j_1^{10} j_2^2 j_3^4 + 2^{13} \times 3^{20} \times 7 \times 19^2 \times 51787 \times 163788913\, j_1^9 j_2^2 j_3^5 + 2^6 \times 3^{22} \times 5 \times 11^8 j_1^{12} j_2^3 j_3 + 2^3 \times 3^{21} \times 11 \times 23 \times 59 \times 24749 \times 164011\, j_1^{11} j_2^3 j_3^2$$

$$-2^6 \times 3^{18} \times 1527894629629140391\, j_1^{10} j_2^3 j_3^3 - 2^7 \times 3^{19} \times 19 \times 289629349486378333\, j_1^9 j_2^3 j_3^4 - 2^4 \times 3^{21} \times 5 \times 11^8 j_1^{12} j_2^4 - 2^4 \times 3^{20} \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 24509 \times 182029\, j_1^{11} j_2^4 j_3 + 2^3 \times 3^{18} \times 110246267 \times 22315765057\, j_1^{10} j_2^4 j_3^2$$

$$\times 3^{19} \times 367 \times 501746471342317\, j_1^9 j_2^4 j_3^3 + 2^{11} \times 3^{20} \times 19^2 \times 331691 \times 332432941\, j_1^8 j_2^4 j_3^4 + 2^3 \times 3^{19} \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13^2 \times 317 \times 10753\, j_1^{11} j_2^5 - 2^9 \times 3^{17} \times 104067191 \times 116556229\, j_1^{10} j_2^5 j_3 - 2^5 \times 3^{17} \times 281 \times 701 \times 143110201279489\, j_1^9 j_2^5 j_3^2$$

$$3^{18} \times 19^2 \times 71 \times 1373 \times 87398407\, j_1^8 j_2^5 j_3^3 + 3^{15} \times 13 \times 104543 \times 1759532749063\, j_1^{10} j_2^6 + 2^6 \times 3^{16} \times 3785393 \times 1469365755259\, j_1^9 j_2^6 j_3 + 2^7 \times 3^{17} \times 11 \times 1279 \times 530730870516383\, j_1^8 j_2^6 j_3^2 - 2^3 \times 3^{16} \times 67 \times 251 \times 541 \times 254161305991\, j_1^9 j_2^7$$

$$-2^{11} \times 3^{16} \times 5^2 \times 17 \times 109 \times 28909 \times 176172169\, j_1^8 j_2^7 j_3 - 2^{11} \times 3^{18} \times 5^2 \times 19 \times 179 \times 4003 \times 14631839\, j_1^7 j_2^7 j_3^2 + 2^4 \times 3^{16} \times 1829155862631992107\, j_1^8 j_2^8 + 2^{13} \times 3^{16} \times 11 \times 127 \times 47387 \times 24532093\, j_1^7 j_2^8 j_3$$

$$\times 3^{15} \times 7 \times 127 \times 683 \times 17981 \times 1014557\, j_1^7 j_2^9 + 2^{11} \times 3^{16} \times 5 \times 15121 \times 24071 \times 39419\, j_1^6 j_2^{10} - 2^7 \times 3^{21} \times 5 \times 11^6 j_1^{11} j_3^6 + 2^9 \times 3^{20} \times 139 \times 9439 \times 23357\, j_1^{10} j_3^7 - 2^{15} \times 3^{20} \times 5 \times 7 \times 19 \times 739425329\, j_1^9 j_3^8 + 2^8 \times 3^{21} \times 5 \times 11^6 j_1^{11} j_2 j_3^5$$

$$^9 \times 5 \times 31 \times 2837900633\, j_1^{10} j_2 j_3^6 + 2^{12} \times 3^{21} \times 11549 \times 309353347\, j_1^9 j_2 j_3^7 - 2^7 \times 3^{20} \times 5^2 \times 11^6 j_1^{11} j_2^2 j_3^4 + 2^6 \times 3^{19} \times 5 \times 29501 \times 12118591\, j_1^{10} j_2^2 j_3^5 - 2^{10} \times 3^{18} \times 23 \times 2549 \times 3359 \times 2306753\, j_1^9 j_2^2 j_3^6 - 2^{16} \times 3^{20} \times 7 \times 19 \times 955597939\, j_1^8 j_2^2 j_3^7$$

$$^{18} \times 5^2 \times 11^6 j_1^{11} j_2^3 j_3^3 - 2^4 \times 3^{17} \times 5^2 \times 17 \times 23563 \times 3595639\, j_1^{10} j_2^3 j_3^4 + 2^9 \times 3^{17} \times 7 \times 11 \times 13 \times 80077 \times 22613431\, j_1^9 j_2^3 j_3^5 + 2^{14} \times 3^{20} \times 19 \times 128219302819\, j_1^8 j_2^3 j_3^6 - 2^7 \times 3^{18} \times 5^2 \times 11^6 j_1^{11} j_2^4 j_3^2 + 2^6 \times 3^{16} \times 5 \times 19 \times 946372397 17\, j_1^{10} j_2^4 j_3^3$$

$$-2^8 \times 3^{17} \times 1051 \times 2099 \times 675639527\, j_1^9 j_2^4 j_3^4 - 2^{12} \times 3^{18} \times 7 \times 17892676054037\, j_1^8 j_2^4 j_3^5 + 2^8 \times 3^{17} \times 5 \times 11^6 j_1^{11} j_2^5 j_3 - 2^5 \times 3^{16} \times 17 \times 1553 \times 7177 \times 18797\, j_1^{10} j_2^5 j_3^2 + 2^7 \times 3^{15} \times 7 \times 229 \times 25919 \times 168130307\, j_1^9 j_2^5 j_3^3$$

$$3^{19} \times 23^2 \times 217454967241\, j_1^8 j_2^5 j_3^4 + 2^{16} \times 3^{19} \times 7 \times 65032448497\, j_1^7 j_2^5 j_3^5 - 2^7 \times 3^{15} \times 5 \times 11^6 j_1^{11} j_2^6 + 2^7 \times 3^{14} \times 5 \times 29 \times 47 \times 2777 \times 46199\, j_1^{10} j_2^6 j_3 - 2^5 \times 3^{14} \times 613 \times 217319 \times 101345213\, j_1^9 j_2^6 j_3^2 - 2^9 \times 3^{16} \times 2372756188260637\, j_1^8 j_2^6 j_3^3$$

$$-2^{14} \times 3^{17} \times 6311 \times 5256671467\, j_1^7 j_2^6 j_3^4 - 2^4 \times 3^{13} \times 5 \times 47 \times 61091 \times 67733\, j_1^{10} j_2^7 + 2^6 \times 3^{14} \times 19 \times 877 \times 36902721601\, j_1^9 j_2^7 j_3 + 2^8 \times 3^{15} \times 29 \times 457 \times 174799 \times 1336561\, j_1^8 j_2^7 j_3^2 + 2^{12} \times 3^{16} \times 17 \times 41 \times 409599151231\, j_1^7 j_2^7 j_3^3$$

$$-2^5 \times 3^{12} \times 507349 \times 860517659\, j_1^9 j_2^8 - 2^6 \times 3^{14} \times 11 \times 19 \times 31 \times 379 \times 1758651787\, j_1^8 j_2^8 j_3 - 2^{10} \times 3^{16} \times 19 \times 181 \times 12923 \times 8578123\, j_1^7 j_2^8 j_3^2 - 2^{16} \times 3^{17} \times 130729 \times 7167367\, j_1^6 j_2^8 j_3^3 + 2^4 \times 3^{13} \times 2502264181899431\, j_1^8 j_2^9$$

$$+2^9 \times 3^{14} \times 499 \times 2185411087481\, j_1^7 j_2^9 j_3 + 2^{14} \times 3^{14} \times 13 \times 171233 \times 29973487\, j_1^6 j_2^9 j_3^2 - 2^8 \times 3^{14} \times 5^2 \times 7 \times 23593 \times 32337101\, j_1^7 j_2^{10} - 2^{12} \times 3^{14} \times 7 \times 29 \times 43 \times 6319982881\, j_1^6 j_2^{10} j_3 + 2^{10} \times 3^{12} \times 373 \times 4789 \times 69109921\, j_1^6 j_2^{11}$$

$$\times 3^{14} \times 4969 \times 300359489\, j_1^5 j_2^{11} j_3 + 2^{14} \times 3^{13} \times 5 \times 73 \times 139 \times 163 \times 520963\, j_1^5 j_2^{12} - 2^6 \times 3^{19} \times 5 \times 11^4 j_1^{10} j_3^8 + 2^{10} \times 3^{17} \times 63092123\, j_1^9 j_3^9 + 2^{17} \times 3^{20} \times 5\, j_1^8 j_3^{10} + 2^9 \times 3^{18} \times 5 \times 11^4 j_1^{10} j_2 j_3^7 - 2^7 \times 3^{18} \times 7 \times 17 \times 71 \times 97 \times 509\, j_1^9 j_2 j_3^8$$

$$-2^{14} \times 3^{17} \times 5 \times 269 \times 2061691\, j_1^8 j_2 j_3^9 - 2^8 \times 3^{17} \times 5 \times 7 \times 11^4 j_1^{10} j_2^2 j_3^6 + 2^9 \times 3^{18} \times 108716203\, j_1^9 j_2^2 j_3^7 + 2^{15} \times 3^{16} \times 9767 \times 1276579\, j_1^8 j_2^2 j_3^8 + 2^9 \times 3^{16} \times 5 \times 7 \times 11^4 j_1^{10} j_2^3 j_3^5 - 2^5 \times 3^{15} \times 5 \times 43 \times 79 \times 1528937\, j_1^9 j_2^3 j_3^6$$

$$-2^{12} \times 3^{15} \times 71 \times 691 \times 8114567\, j_1^8 j_2^3 j_3^7 - 2^{15} \times 3^{17} \times 697542973\, j_1^7 j_2^3 j_3^8 - 2^7 \times 3^{15} \times 5^2 \times 7 \times 11^4 j_1^{10} j_2^4 j_3^4 + 2^6 \times 3^{15} \times 5 \times 2083 \times 361447\, j_1^9 j_2^4 j_3^5 + 2^{10} \times 3^{15} \times 449 \times 2748159773\, j_1^8 j_2^4 j_3^6 + 2^{16} \times 3^{15} \times 5^2 \times 11 \times 50130251\, j_1^7 j_2^4 j_3^7$$

$$+2^9 \times 3^{14} \times 5 \times 7 \times 11^4 j_1^{10} j_2^5 j_3^3 - 2^5 \times 3^{15} \times 23 \times 27616361\, j_1^9 j_2^5 j_3^4 - 2^9 \times 3^{13} \times 13 \times 4091 \times 207679247\, j_1^8 j_2^5 j_3^5 - 2^{13} \times 3^{14} \times 1181 \times 445809677\, j_1^7 j_2^5 j_3^6 - 2^8 \times 3^{13} \times 5 \times 7 \times 11^4 j_1^{10} j_2^6 j_3^2 - 2^7 \times 3^{12} \times 13 \times 73 \times 1319 \times 1549\, j_1^9 j_2^6 j_3^3$$

$$-2^5 \times 3^{12} \times 1439 \times 1531 \times 79631081\, j_1^8 j_2^6 j_3^4 + 2^{11} \times 3^{14} \times 449 \times 3900368627\, j_1^7 j_2^6 j_3^5 + 2^{21} \times 3^{15} \times 5 \times 16351469\, j_1^6 j_2^6 j_3^6 + 2^9 \times 3^{12} \times 5 \times 11^4 j_1^{10} j_2^7 j_3 + 2^5 \times 3^{12} \times 11 \times 254892401\, j_1^9 j_2^7 j_3^2 - 2^7 \times 3^{13} \times 11 \times 359 \times 19603 \times 41579\, j_1^8 j_2^7 j_3^3$$

$$3^{12} \times 47 \times 307 \times 317 \times 13596893\, j_1^7 j_2^7 j_3^4 - 2^{15} \times 3^{14} \times 7 \times 6661 \times 763381\, j_1^6 j_2^7 j_3^5 - 2^6 \times 3^{11} \times 5 \times 11^4 j_1^{10} j_2^8 - 2^6 \times 3^{13} \times 5^2 \times 139 \times 18149\, j_1^9 j_2^8 j_3 + 2^6 \times 3^{10} \times 5 \times 53 \times 1901 \times 48725627\, j_1^8 j_2^8 j_3^2 + 2^9 \times 3^{11} \times 31 \times 1297 \times 707636873\, j_1^7 j_2^8 j_3^3$$

$$+2^{13} \times 3^{14} \times 37 \times 43 \times 59 \times 1413271\, j_1^6 j_2^8 j_3^4 + 2^5 \times 3^8 \times 5 \times 47^2 \times 142981\, j_1^9 j_2^9 - 2^7 \times 3^9 \times 11 \times 17 \times 79 \times 2683 \times 76343\, j_1^8 j_2^9 j_3 - 2^5 \times 3^{12} \times 7^3 \times 61 \times 24373 \times 55351\, j_1^7 j_2^9 j_3^2 - 2^{12} \times 3^{11} \times 11 \times 53 \times 1069 \times 5642513\, j_1^6 j_2^9 j_3^3$$

$$-2^{16} \times 3^{14} \times 37 \times 59 \times 525313\, j_1^5 j_2^9 j_3^4 + 2^5 \times 3^8 \times 5^2 \times 31 \times 149 \times 11455231\, j_1^8 j_2^{10} + 2^6 \times 3^9 \times 113 \times 351911687537\, j_1^7 j_2^{10} j_3 + 2^{14} \times 3^{11} \times 13 \times 31 \times 373 \times 1597147\, j_1^6 j_2^{10} j_3^2 + 2^{16} \times 3^{11} \times 50925030661\, j_1^5 j_2^{10} j_3^3$$

$$\times 7 \times 13 \times 1181 \times 99900863\, j_1^7 j_2^{11} - 2^9 \times 3^{10} \times 53 \times 373 \times 9857 \times 17053\, j_1^6 j_2^{11} j_3 - 2^{13} \times 3^{10} \times 139 \times 5132331041\, j_1^5 j_2^{11} j_3^2 + 2^5 \times 3^8 \times 28476287051677\, j_1^6 j_2^{12} + 2^{10} \times 3^9 \times 1319 \times 3245505437\, j_1^5 j_2^{12} j_3 + 2^{17} \times 3^{11} \times 13 \times 853 \times 180007\, j_1^4 j_2^{12} j_3^2$$

$$-2^7 \times 3^8 \times 53 \times 109 \times 28493 \times 56957\, j_1^5 j_2^{13} - 2^{14} \times 3^9 \times 5 \times 18371 \times 1132141\, j_1^4 j_2^{13} j_3 + 2^{13} \times 3^8 \times 47 \times 61 \times 38025503\, j_1^4 j_2^{14} - 2^{15} \times 3^9 \times 7 \times 314130631\, j_1^3 j_2^{15} - 2^8 \times 3^{16} \times 11^2 j_1^9 j_3^{10} + 2^{14} \times 3^{17} \times 967\, j_1^8 j_3^{11}$$

$$+2^9 \times 3^{15} \times 5 \times 11^2 j_1^9 j_2 j_3^9 - 2^{12} \times 3^{15} \times 5 \times 23 \times 1091\, j_1^8 j_2 j_3^{10} + 2^{18} \times 3^{17} j_1^7 j_2 j_3^{11} - 2^8 \times 3^{16} \times 5 \times 11^2 j_1^9 j_2^2 j_3^8 + 2^{12} \times 3^{14} \times 211 \times 2939\, j_1^8 j_2^2 j_3^9 - 2^{18} \times 3^{15} \times 149 \times 197\, j_1^7 j_2^2 j_3^{10} + 2^{11} \times 3^{14} \times 5 \times 11^2 j_1^9 j_2^3 j_3^7$$

$$-2^8 \times 3^{14} \times 7 \times 53 \times 26597\, j_1^8 j_2^3 j_3^8 + 2^{14} \times 3^{14} \times 257 \times 18047\, j_1^7 j_2^3 j_3^9 - 2^9 \times 3^{13} \times 5 \times 7 \times 11^2 j_1^9 j_2^4 j_3^6 + 2^{11} \times 3^{13} \times 7 \times 113 \times 3121\, j_1^8 j_2^4 j_3^7 - 2^{12} \times 3^{13} \times 11 \times 191 \times 39239\, j_1^7 j_2^4 j_3^8 - 2^{18} \times 3^{15} \times 19^2 \times 41\, j_1^6 j_2^4 j_3^9$$

$$+2^{10} \times 3^{13} \times 7 \times 11^2 j_1^9 j_2^5 j_3^5 - 2^{10} \times 3^{13} \times 7 \times 17 \times 19501\, j_1^8 j_2^5 j_3^6 + 2^{14} \times 3^{12} \times 5 \times 41 \times 264643\, j_1^7 j_2^5 j_3^7 + 2^{19} \times 3^{13} \times 5 \times 45197\, j_1^6 j_2^5 j_3^8 - 2^9 \times 3^{11} \times 5 \times 7 \times 11^2 j_1^9 j_2^6 j_3^4 + 2^{11} \times 3^{11} \times 7 \times 61 \times 8263\, j_1^8 j_2^6 j_3^5$$

$$-2^9 \times 3^{11} \times 39791 \times 75329\, j_1^7 j_2^6 j_3^6 - 2^{15} \times 3^{12} \times 7^2 \times 328919\, j_1^6 j_2^6 j_3^7 + 2^{11} \times 3^{10} \times 5 \times 11^2 j_1^9 j_2^7 j_3^3 - 2^9 \times 3^{11} \times 29 \times 73 \times 1619\, j_1^8 j_2^7 j_3^4 + 2^{10} \times 3^{10} \times 11 \times 19 \times 2237 \times 3793\, j_1^7 j_2^7 j_3^5 + 2^{13} \times 3^{12} \times 11 \times 709 \times 7079\, j_1^6 j_2^7 j_3^6$$

$$+2^{19} \times 3^{13} \times 109 \times 113\, j_1^5 j_2^7 j_3^7 - 2^8 \times 3^{10} \times 5 \times 11^2 j_1^9 j_2^8 j_3^2 + 2^{11} \times 3^9 \times 11 \times 13 \times 23 \times 401\, j_1^8 j_2^8 j_3^3 - 2^9 \times 3^9 \times 13 \times 224037301\, j_1^7 j_2^8 j_3^4 - 2^{13} \times 3^{10} \times 270832781\, j_1^6 j_2^8 j_3^5 - 2^{19} \times 3^{11} \times 73 \times 3407\, j_1^5 j_2^8 j_3^6$$

$$+2^9 \times 3^7 \times 5 \times 11^2 j_1^9 j_2^9 j_3 - 2^{10} \times 3^8 \times 907397\, j_1^9 j_2^9 j_3^2 + 2^{11} \times 3^8 \times 19 \times 21563777\, j_1^7 j_2^9 j_3^3 + 2^9 \times 3^9 \times 401 \times 599 \times 19501\, j_1^6 j_2^9 j_3^4 + 2^{15} \times 3^{11} \times 107 \times 35983\, j_1^5 j_2^9 j_3^5 - 2^8 \times 3^6 \times 11^2 j_1^9 j_2^{10} + 2^{11} \times 3^6 \times 5 \times 7 \times 8069\, j_1^8 j_2^{10} j_3$$

Dénominateur de Φ_3 (suite)

$$
\begin{aligned}
&-2^9\times 3^7\times 5\times 23\times 83\times 63353\,j_1^7j_2^{10}j_3^2-2^{11}\times 3^9\times 7\times 39893383\,j_1^6j_2^{10}j_3^3-2^{13}\times 3^9\times 11\times 101\times 67493\,j_1^5j_2^{10}j_3^4+2^{19}\times 3^{11}\times 11\times 677\,j_1^4j_2^{10}j_3^5-2^8\times 3^5\times 7\times 73\times 419\,j_1^8j_2^{11}+2^{10}\times 3^6\times 331\times 199559\,j_1^7j_2^{11}j_3\\
&\times 765685001\,j_1^6j_2^{11}j_3^2+2^{14}\times 3^9\times 3319\times 3691\,j_1^5j_2^{11}j_3^3-2^{21}\times 3^9\times 37993\,j_1^4j_2^{11}j_3^4-2^9\times 3^6\times 7\times 43\times 14369\,j_1^7j_2^{12}-2^{11}\times 3^6\times 5\times 11\times 67\times 27539\,j_1^6j_2^{12}j_3-2^8\times 3^8\times 47\times 53\times 157\times 1187\,j_1^5j_2^{12}j_3^2+2^{14}\times 3^8\times 17\times 593\times 1193\,j_1^4j_2^{12}j_3^3\\
&+2^9\times 3^6\times 15860233\,j_1^6j_2^{13}+2^9\times 3^6\times 230601383\,j_1^5j_2^{13}j_3-2^{12}\times 3^7\times 56208829\,j_1^4j_2^{13}j_3^2-2^{18}\times 3^9\times 44491\,j_1^3j_2^{13}j_3^3-2^8\times 3^5\times 5\times 13179643\,j_1^5j_2^{14}+2^{12}\times 3^6\times 5\times 7\times 902987\,j_1^4j_2^{14}j_3+2^{18}\times 3^7\times 127\times 3457\,j_1^3j_2^{14}j_3^2\\
&-2^8\times 3^6\times 5\times 47\times 233\times 673\,j_1^4j_2^{15}-2^{14}\times 3^6\times 11\times 421\times 1627\,j_1^3j_2^{15}j_3+2^{12}\times 3^6\times 1423\times 2477\,j_1^3j_2^{16}+2^{18}\times 3^7\times 19763\,j_1^2j_2^{16}j_3-2^{19}\times 3^5\times 5\times 6029\,j_1^2j_2^{17}-2^8\times 3^{12}j_1^8j_3^{12}+2^{17}\times 3^{13}j_1^7j_3^{13}+2^{10}\times 3^{12}j_1^8j_2j_3^{11}\\
&-2^{13}\times 3^{12}\times 5\times 41\,j_1^7j_2j_3^{12}-2^9\times 3^{11}\times 11\,j_1^8j_2^2j_3^{10}+2^{15}\times 3^{12}\times 101\,j_1^7j_2^2j_3^{11}+2^{16}\times 3^{13}j_1^6j_2^2j_3^{12}+2^{10}\times 3^9\times 5\times 11\,j_1^8j_2^3j_3^9-2^9\times 3^{10}\times 5\times 14009\,j_1^7j_2^3j_3^{10}-2^{20}\times 3^{12}j_1^6j_2^3j_3^{11}-2^8\times 3^{10}\times 5\times 11\,j_1^8j_2^4j_3^8\\
&+2^{10}\times 3^9\times 5^2\times 3449\,j_1^7j_2^4j_3^9+2^{14}\times 3^{11}\times 19\times 23\,j_1^6j_2^4j_3^{10}+2^{11}\times 3^9\times 11\,j_1^8j_2^5j_3^7-2^9\times 3^{10}\times 19\times 1787\,j_1^7j_2^5j_3^8-2^{15}\times 3^{10}\times 5\times 173\,j_1^6j_2^5j_3^9-2^{17}\times 3^{12}j_1^5j_2^5j_3^{10}-2^{10}\times 3^7\times 7\times 11\,j_1^8j_2^6j_3^6+2^{12}\times 3^8\times 5\times 13\times 257\,j_1^7j_2^6j_3^7\\
&+2^8\times 3^9\times 5\times 7\times 59\times 139\,j_1^7j_2^6j_3^8+2^{17}\times 3^{10}\times 5\times 7\,j_1^5j_2^7j_3^9+2^{11}\times 3^7\times 11\,j_1^8j_2^7j_3^5-2^{10}\times 3^7\times 65719\,j_1^7j_2^7j_3^6-2^{11}\times 3^8\times 23\times 29\times 97\,j_1^6j_2^7j_3^7-2^{13}\times 3^{10}\times 5\times 191\,j_1^5j_2^7j_3^8-2^8\times 3^6\times 5\times 11\,j_1^8j_2^8j_3^4\\
&+2^{11}\times 3^7\times 5^2\times 17\times 19\,j_1^7j_2^8j_3^5+2^{10}\times 3^7\times 7\times 23899\,j_1^6j_2^8j_3^6+2^{16}\times 3^9\times 5\times 71\,j_1^5j_2^8j_3^7+2^{16}\times 3^{10}\times 5\,j_1^4j_2^8j_3^8+2^{10}\times 3^3\times 5\times 11\,j_1^8j_2^9j_3^3-2^{10}\times 3^4\times 5^2\times 19\times 167\,j_1^7j_2^9j_3^4-2^{11}\times 3^6\times 11\times 7127\,j_1^6j_2^9j_3^5\\
&-2^{10}\times 3^6\times 5\times 78623\,j_1^5j_2^9j_3^6-2^{20}\times 3^7\times 5^2j_1^4j_2^9j_3^7-2^9\times 3^3\times 11\,j_1^8j_2^{10}j_3^2+2^{12}\times 3^3\times 13\times 599\,j_1^7j_2^{10}j_3^3+2^9\times 3^5\times 5\times 42397\,j_1^6j_2^{10}j_3^4+2^{11}\times 3^6\times 61\times 1399\,j_1^5j_2^{10}j_3^5+2^{15}\times 3^6\times 5\times 613\,j_1^4j_2^{10}j_3^6+2^{10}\times 3^2j_1^8j_2^{11}j_3\\
&-2^9\times 3^3\times 5\times 11\times 101\,j_1^7j_2^{11}j_3^2-2^{11}\times 3^7\times 5\times 11\times 17\,j_1^6j_2^{11}j_3^3-2^{10}\times 3^5\times 5\times 19\times 1609\,j_1^5j_2^{11}j_3^4-2^{16}\times 3^6\times 5\times 13\times 17\,j_1^4j_2^{11}j_3^5-2^{18}\times 3^7\times 5\,j_1^3j_2^{11}j_3^6-2^8j_1^8j_2^{12}+2^{10}\times 3\times 1361\,j_1^7j_2^{12}j_3+2^{10}\times 3^3\times 89\times 181\,j_1^6j_2^{12}j_3^2\\
&+2^{12}\times 3^3\times 5\times 13963\,j_1^5j_2^{12}j_3^3+2^8\times 3^4\times 5\times 67\times 3391\,j_1^4j_2^{12}j_3^4+2^{17}\times 3^6\times 5\times 13\,j_1^3j_2^{12}j_3^5-2^9\times 5\times 41\,j_1^7j_2^{13}-2^{11}\times 3^2\times 7\times 13\times 17\,j_1^6j_2^{13}j_3-2^{10}\times 3^3\times 5\times 83\times 89\,j_1^5j_2^{13}j_3^2-2^{10}\times 3^3\times 5\times 73\times 661\,j_1^4j_2^{13}j_3^3\\
&-2^{13}\times 3^5\times 5\times 557\,j_1^3j_2^{13}j_3^4+2^8\times 3^2\times 19^2\,j_1^6j_2^{14}+2^{11}\times 3^2\times 5\times 863\,j_1^5j_2^{14}j_3+2^9\times 3^3\times 5\times 31\times 547\,j_1^4j_2^{14}j_3^2+2^{15}\times 3^4\times 5\times 197\,j_1^3j_2^{14}j_3^3+2^{16}\times 3^6\times 5\,j_1^2j_2^{14}j_3^4-2^{10}\times 2707\,j_1^5j_2^{15}-2^{10}\times 3\times 5\times 23\times 331\,j_1^4j_2^{15}j_3\\
&-2^9\times 3^3\times 17\times 2927\,j_1^3j_2^{15}j_3^2-2^{22}\times 3^4j_1^2j_2^{15}j_3^3+2^8\times 5^2\times 13\times 61\,j_1^4j_2^{16}+2^{10}\times 3^2\times 10399\,j_1^3j_2^{16}j_3+2^{14}\times 3^7\times 5\,j_1^2j_2^{16}j_3^2-2^9\times 3\times 59\times 61\,j_1^3j_2^{17}-2^{15}\times 3^3\times 47\,j_1^2j_2^{17}j_3-2^{17}\times 3^4j_1j_2^{17}j_3^2+2^8\times 5\times 2803\,j_1^2j_2^{18}\\
&+2^{17}\times 3\times 19\,j_1j_2^{18}j_3-2^{13}\times 157\,j_1j_2^{19}+2^{16}\times 3\,j_2^{20}.
\end{aligned}
$$

Plan

- Introduction
- Le genre 1
  - Moyenne arithmético-géométrique
  - Fonctions modulaires, theta constantes
  - Évaluation de fonctions modulaires
- Le genre $g \geqslant 2$
  - Suites de Borchardt et applications
- Conclusion et perspectives

Conclusion

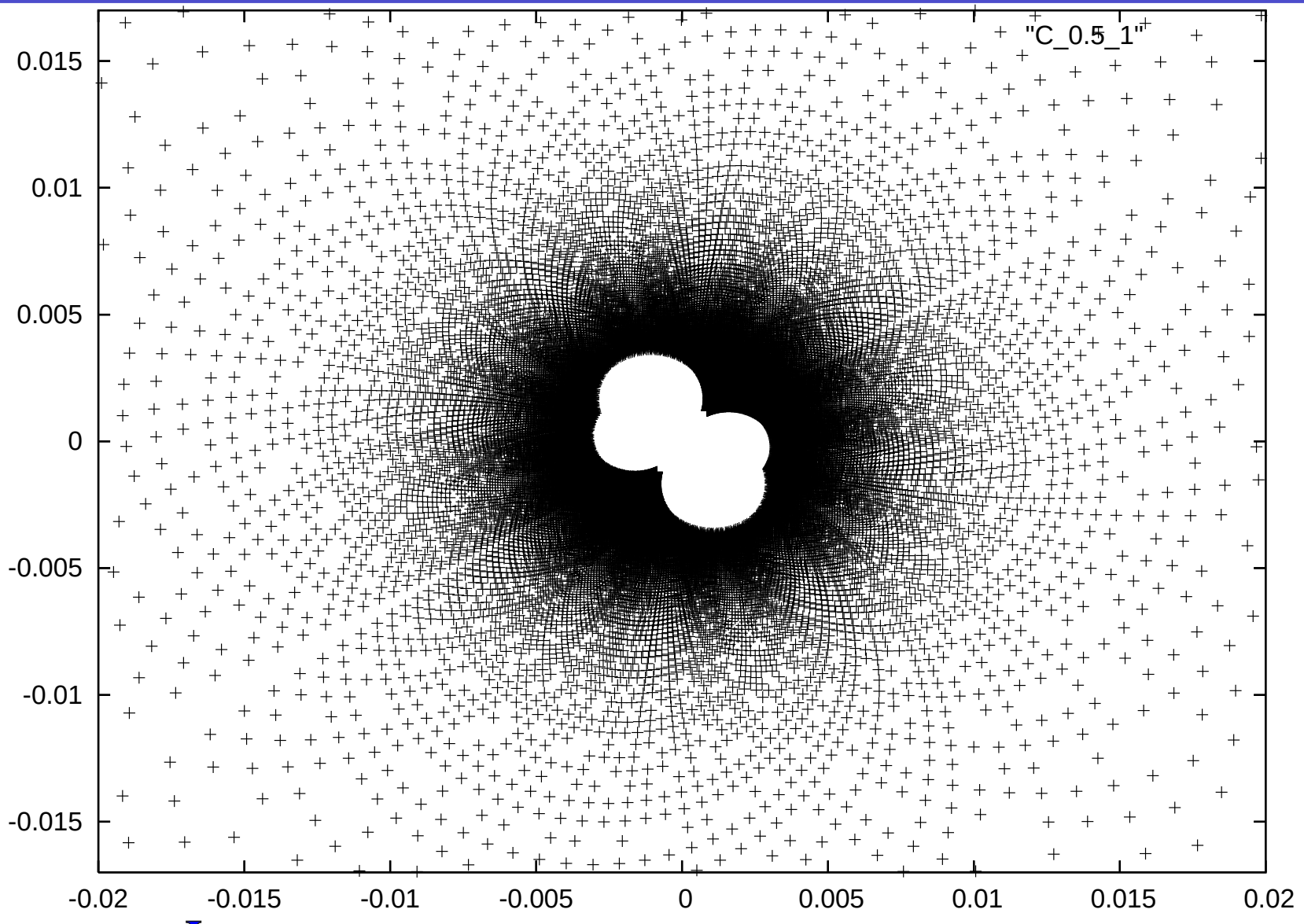
- évaluation rapide de fonctions modulaires en genre 1 (AGM+Newton)
- bornes pour le calcul du logarithme complexe *via* l'AGM
- étude des propriétés de convergence des suites de Borchardt sur $\mathbb{C}$
- algorithme rapide pour l'évaluation de matrices de Riemann
- évaluation rapide des theta constantes en genre 2
- détermination des limites des suites de Borchardt de quatre éléments

Perspectives

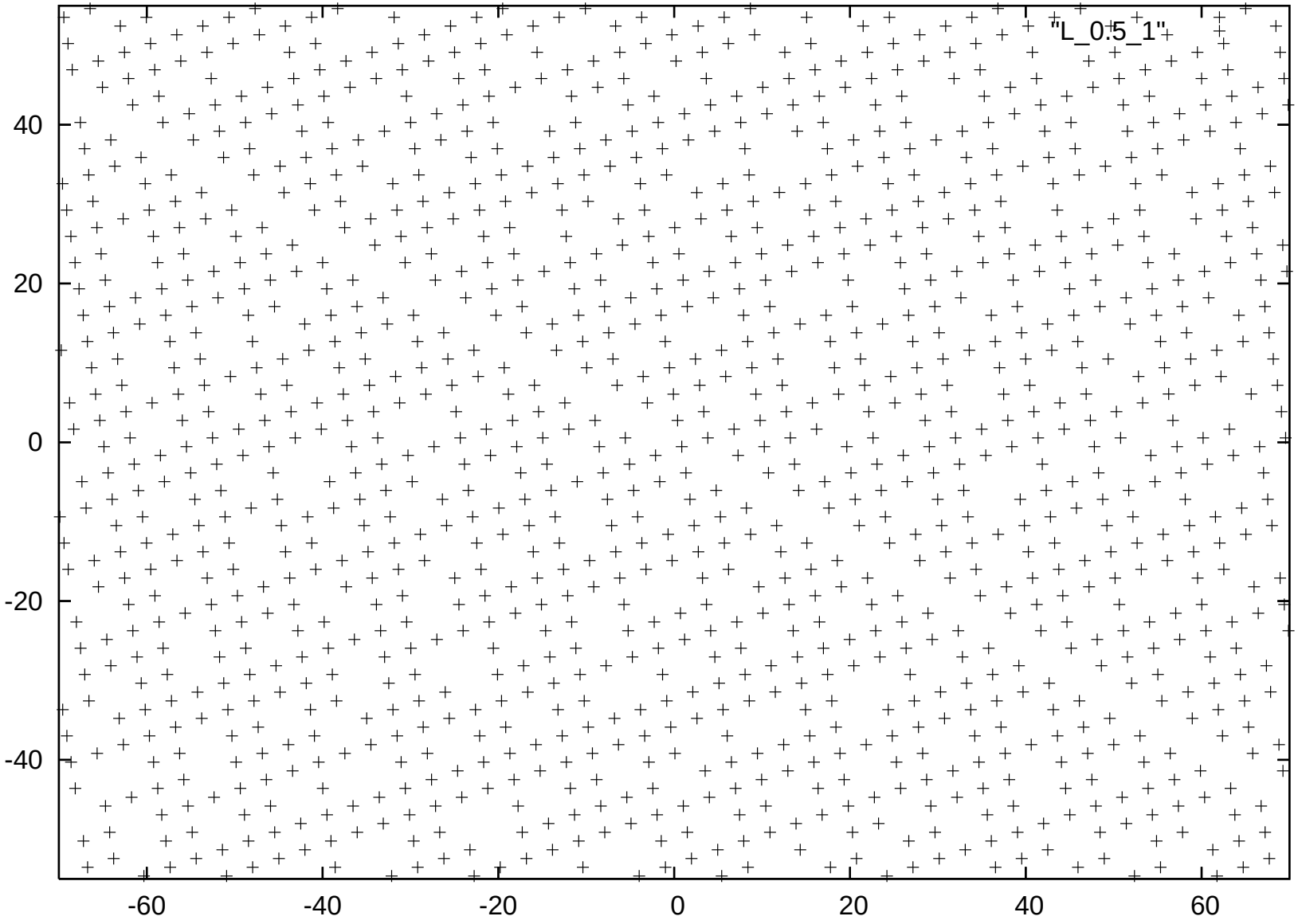
- certaines conjectures (choix de racines) restent à démontrer (ou infirmer)
- équations modulaires en genre $g \geqslant 2 \ldots$
- pour $g \geqslant 3$, on pourrait changer la définition des itérations de Borchardt afin de généraliser certains résultats

Merci !

Valeurs de $\mathrm{AGM}\left(1, \frac{1}{2} + i\right)$



Valeurs de $1/\mathrm{AGM}\left(1, \frac{1}{2}+i\right)$



Limites de suites AGM

Théorème [Gauss, Geppert, Von David] :

Détermination explicite des éléments de $\mathrm{AGM}(a,b)$ pour $a,b \in \mathbb{C}$:

$$\left\{ \left(\frac{4d+1}{a\mathrm{M}\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{4ic}{(a+b)\mathrm{M}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)} \right)^{-1} : c \wedge (4d+1) = 1 \right\}$$

Outils :

- theta constantes
- fonctions modulaires

Suites de Borchardt de quatre éléments

Question : on fixe $(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{C}^4$, quel est l'ensemble des limites des suites de Borchardt associées ?
(chaque suite correspond à une séquence de choix de racines)

Cas général : on peut se ramener au cas où il existe $\tau \in \mathcal{H}$ tel que

$$(a_0, b_0, c_0, d_0) = \left(\theta_0^2(\tau), \theta_1^2(\tau), \theta_2^2(\tau), \theta_3^2(\tau)\right)$$

Suites de Borchardt de quatre éléments

Théorème : l'ensemble des limites est alors

$$\left\{ \frac{\varepsilon(\gamma)}{\mathrm{Det}(C\tau + D)} : \gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_b \right\} \cup \{0\}$$

où
- Γ_b sous-groupe de Γ_2 connu (d'indice 1440)
- $\varepsilon(\gamma) = \pm 1$, explicite

Démonstration :

- un sens facile
- autre sens : pas de généralisation (facile) des arguments utilisés pour l'AGM (Geppert, Cox)
- (très) technique, donne une nouvelle démonstration pour l'AGM

Suites de Borchardt de quatre éléments

Sens facile :

- par définition de Γ_b, pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_b$,

$$\left(\theta_j^2(\tau)\right)_{j\in[0,3]} = \frac{\theta_0^2(\tau)}{\theta_0^2(\gamma\tau)} \left(\theta_j^2(\gamma\tau)\right)_{j\in[0,3]}$$

- formules de duplication : la suite $\left(\theta_j^2(2^n\gamma\tau)\right)_{j\in[0,3],n\in\mathbb{N}}$ est de Borchardt et converge vers 1
- formule de transformation :

$$\frac{\theta_0^2(\tau)}{\theta_0^2(\gamma\tau)} = \frac{\varepsilon(\gamma)}{\mathrm{Det}(C\tau + D)}$$

…qui est donc une limite possible !