Moyenne de Borchardt sur les complexes

Régis Dupont

Fixons un entier $g \geqslant 1$, et notons $\mathcal{I}_g = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$. Nous nous intéressons aux suites de 2^g-uplets de nombres complexes de la forme $(a_v^{(n)})_{v\in\mathcal{I}_g, n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant, pour tous $v \in \mathcal{I}_g$ et $n \geqslant 0$:

$$a_v^{(n+1)} = \frac{1}{2^g} \sum_{v_1+v_2=v} b_{v_1,v_2}^{(n)},$$

où la suite $(b_{v_1,v_2}^{(n)})_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g, n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tous v et n,

$$\left(b_{v_1,v_2}^{(n)}\right)^2 = a_{v_1}^{(n)} a_{v_2}^{(n)}.$$

On introduit l'ensemble S défini par :

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists v_1, v_2 \in \mathcal{I}_g : \left| a_0^{(n+1)} + b_{v_1,v_2}^{(n)} \right| \leqslant \left| a_0^{(n+1)} - b_{v_1,v_2}^{(n)} \right| \right\}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1 *Il existe un unique $A \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,*

$$\lim_{n\to+\infty} a_v^{(n)} = A.$$

De plus, A est non nul si et seulement si l'ensemble S est fini.

On introduit deux suites auxilliaires $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$m_n = \mathrm{Min}\left\{ a_v^{(n)} : v \in \mathcal{I}_g \right\} \text{ et } M_n = \mathrm{Max}\left\{ a_v^{(n)} : v \in \mathcal{I}_g \right\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera que la suite (M_n) est clairement décroissante. On montre maintenant le lemme suivant :

Lemme 1 *Pour tout $n \in S$,*

$$M_{n+3} \leqslant \left(1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2^{2g}}\right) M_n.$$

Démonstration: Soit $n \in S$, et soient $v_1, v_2 \in \mathcal{I}_g$ tels que

$$\left| a_0^{(n+1)} + b_{v_1,v_2}^{(n)} \right| \leqslant \left| a_0^{(n+1)} - b_{v_1,v_2}^{(n)} \right|.$$

Comme $\left| a_0^{(n+1)} \right| \leqslant M_n$ et que $\left| b_{v_1,v_2}^{(n)} \right| \leqslant M_n$, ceci implique directement que

$$\left| a_0^{(n+1)} + b_{v_1,v_2}^{(n)} \right| \leqslant \sqrt{2} M_n.$$

Par ailleurs, d'après la définition de la suite $(a_v^{(n)})$, on a

$$\begin{aligned} a_0^{(n+2)} &= \frac{1}{2^g}\sum_{w\in\mathcal{I}_g} a_w^{(n+1)} \\ &= \frac{1}{2^g}\left(a_0^{(n+1)} + a_{v_1+v_2}^{(n+1)} + \sum_{\substack{w\in\mathcal{I}_g\\ w\neq 0, v_1+v_2}} a_w^{(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2^g}\left(a_0^{(n+1)} + \frac{1}{2^g} b_{v_1,v_2}^{(n)} + \frac{1}{2^g}\sum_{\substack{w_1+w_2=v_1+v_2\\ (w_1,w_2)\neq(v_1,v_2)}} b_{w_1,w_2}^{(n)} + \sum_{\substack{w\in\mathcal{I}_g\\ w\neq 0, v_1+v_2}} a_w^{(n+1)}\right). \end{aligned}$$

On en déduit directement que

$$\left|a_0^{(n+2)}\right| \leqslant \alpha_g M_n,$$

où

$$\alpha_g = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2^g} < 1.$$

D'après la définition des $a_v^{(n+3)}$, on a donc

$$\left|a_0^{(n+3)}\right| \leqslant \beta_g M_n,$$

où

$$\beta_g = 1 - \frac{1-\alpha_g}{2^g} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2^{2g}} < 1,$$

et pour tout $v \in \mathcal{I}_g \setminus \{0\}$

$$\left|a_v^{(n+3)}\right| \leqslant \gamma_g M_n,$$

où

$$\gamma_g = 1 - \frac{1-\sqrt{\alpha_g}}{2^{g-1}} < 1.$$

Pour tout $g \geqslant 1$, on a $\beta_g \geqslant \gamma_g$, donc :

$$M_{n+3} \leqslant \beta_g M_n.$$

♣

Ce lemme montre directement que si S est infini, alors $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$ et donc toutes les suites $(a_v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers zéro.

Supposons maintenant l'ensemble S fini. Quitte à translater les indices, on peut même supposer que S est vide. En particulier, cela implique que $a_0^{(1)}$ est non nul, et on peut donc diviser tous les $a_v^{(n)}$ par $a_0^{(1)}$ pour se ramener au cas où $a_0^{(1)} = 1$.

il est facile de voir que le fait que S est vide implique que, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $v \in \mathcal{I}_g$, $a_v^{(n)} \in \mathcal{R}$.

Notons $\mathcal{R}$ le demi-plan défini par

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\},$$

et introduisons la fonction $\sqrt{\ } : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ telle que pour tout $z \in \mathcal{R}$, $(\sqrt{z})^2 = z$.

Il est facile de voir que le fait que S soit vide implique que, pout tout $n \geqslant 1$ et pour tout $v \in \mathcal{I}_g$, $a_v^{(n)} \in \mathcal{R}$. On en déduit donc que, pour tout $n \geqslant 1$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{I}_g$,

$$b_{v_1,v_2}^{(n)} = \sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v_2}^{(n)}}.$$

Le reste de la preuve repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 2 *Si l'ensemble S est vide, alors pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(n+1)} - a_{v_2}^{(n+1)}\right| \leq \frac{2^g-1}{2^g} \sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(n)} - a_{v_2}^{(n)}\right|.$$

Démonstration: Fixons un entier $n \geqslant 1$.

Pour tous $v_1, v_2 \in \mathcal{I}_g$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{v_1}^{(n)} + a_{v_2}^{(n)}}{2} - b_{v_1,v_2}^{(n)}\right| &= \frac{1}{2}\left|a_{v_1}^{(n)} + a_{v_2}^{(n)} - 2\sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v_2}^{(n)}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{a_{v_1}^{(n)}} - \sqrt{a_{v_2}^{(n)}}\right|^2,
\end{aligned}$$

et comme $\left|\sqrt{a_{v_1}^{(n)}} - \sqrt{a_{v_2}^{(n)}}\right| \leqslant \left|\sqrt{a_{v_1}^{(n)}} + \sqrt{a_{v_2}^{(n)}}\right|$, on obtient finalement

$$\left|\frac{a_{v_1}^{(n)} + a_{v_2}^{(n)}}{2} - b_{v_1,v_2}^{(n)}\right| \leq \frac{1}{2}\left|a_{v_1}^{(n)} - a_{v_2}^{(n)}\right|.$$

Par définition, on a

$$a_0^{(n+1)} = \frac{1}{2^g}\sum_{v\in\mathcal{I}_g} a_v^{(n)}$$

et

$$a_v^{(n+1)} = \frac{1}{2^{g-1}}\sum_{v_1\in\mathcal{I}_g} \sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v+v_1}^{(n)}}$$

pour $v \neq 0$.

Si l'on fixe $v \in \mathcal{I}_g \setminus \{0\}$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\left|a_0^{(n+1)} - a_v^{(n+1)}\right| &= \frac{1}{2^g}\left|\sum_{v_1\in\mathcal{I}_g} a_{v_1}^{(n)} - \sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v+v_1}^{(n)}}\right| \\
&= \frac{1}{2^g}\left|\sum_{v_1\in\mathcal{I}_g} \frac{a_{v_1}^{(n)} + a_{v+v_1}^{(n)}}{2} - \sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v+v_1}^{(n)}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{g+1}}\sum_{v_1\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(n)} - a_{v+v_1}^{(n)}\right|,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\mathcal{I}_g} \left|a_0^{(n+1)} - a_v^{(n+1)}\right| &\leqslant \frac{1}{2^{g+1}}\sum_{v,v_1\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(n)} - a_{v+v_1}^{(n)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{g+1}}\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(n)} - a_{v_2}^{(n)}\right|.
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'inégalité triangulaire comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n+1)}-a_{v_2}^{(n+1)}\right| &= 2\sum_{v_1\in\mathcal{I}_g}\left|a_0^{(n+1)}-a_{v_1}^{(n+1)}\right|+\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g\setminus\{0\}}\left|a_{v_1}^{(n+1)}-a_{v_2}^{(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^g}\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n)}-a_{v_2}^{(n)}\right|+\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g\setminus\{0\},v_1\neq v_2}\left|a_{v_1}^{(n+1)}-a_{v_2}^{(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^g}\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n)}-a_{v_2}^{(n)}\right|+\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g\setminus\{0\},v_1\neq v_2}\left(\left|a_0^{(n+1)}-a_{v_1}^{(n+1)}\right|+\left|a_0^{(n+1)}-a_{v_2}^{(n+1)}\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2^g}\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n)}-a_{v_2}^{(n)}\right|+2(2^g-2)\sum_{v_1\in\mathcal{I}_g}\left|a_0^{(n+1)}-a_{v_1}^{(n+1)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^g}\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n)}-a_{v_2}^{(n)}\right|+\left(1-\frac{1}{2^{g-1}}\right)\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n)}-a_{v_2}^{(n)}\right| \\
&\leqslant \left(1-\frac{1}{2^g}\right)\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g}\left|a_{v_1}^{(n)}-a_{v_2}^{(n)}\right|.
\end{aligned}$$

♣

Lemme 3 *Si l'on suppose que S est vide et que $a_0^{(1)}=1$, alors pour tout $n\geqslant 1$ et $v\in\mathcal{I}_g$,*

$$\mathrm{Re}\left(a_v^{(n)}\right)\geqslant \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Re}\left(a_v^{(1)}\right): v\in\mathcal{I}_g\right\}.$$

Démonstration: On a vu plus haut que si S est vide et que $a_0^{(1)}=1$, alors pour tout $n\geqslant 1$ et $v\in\mathcal{I}_g$, $a_v^{(n)}\in\mathcal{R}$ et

$$a_v^{(n+1)}=\frac{1}{2^g}\sum_{v_1+v_2=v}\sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v_2}^{(n)}}.$$

Le lemme découle alors directement du fait que, pour tout $x,y\in\mathcal{R}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)\leqslant \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Re}(x),\mathrm{Re}(y)\right\}.$$

Pour voir ceci, on écrit $x=X\exp(i\alpha)$ et $y=Y\exp(i\beta)$. Alors $\mathrm{Re}(x)=X\cos(\alpha)$, $\mathrm{Re}(y)=Y\cos(\beta)$ et $\mathrm{Re}\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)=\sqrt{XY}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, et on a donc :

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathrm{Re}\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)\right) &= \log\left(\sqrt{XY}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\log X+\log Y}{2}+\log\left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la convexité de la fonction $\log\circ\cos$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathrm{Re}\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)\right) &\leqslant \frac{\log X+\log Y}{2}+\frac{\log(\cos\alpha)+\log(\cos\beta)}{2} \\
&\leqslant \frac{\log\left(\mathrm{Re}(x)\right)+\log\left(\mathrm{Re}(y)\right)}{2},
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Re}\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)\leqslant \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Re}(x),\mathrm{Re}(y)\right\}$, ce qui termine la preuve. ♣

Le Lemme 2 implique que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(n)} - a_{v_2}^{(n)}\right| \leq \left(1-\frac{1}{2^g}\right)^n \sum_{v_1,v_2\in\mathcal{I}_g} \left|a_{v_1}^{(0)} - a_{v_2}^{(0)}\right|,$$

et on en déduit que la suite $(a_0^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Le Lemme 3 implique alors que cette suite converge vers un élément $A \in \mathcal{R}$, et en utilisant à nouveau le Lemme 2, on montre que pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_v^{(n)} = A.$$

Dans le cas où la limite A est non nulle, en supposant encore, comme ci-dessus, que l'ensemble S est vide et que $a_0^{(1)} = 1$ (et donc où tous les termes d'indice $n \geqslant 1$ sont dans $\mathcal{R}$), on a le lemme suivant, qui implique directement que la convergence vers A est quadratique :

Lemme 4 *Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leqslant m_0/5$, et soit $n \geqslant 1$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,*

$$\left|a_v^{(n)} - a_0^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Alors pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,

$$\left|a_v^{(n+1)} - a_0^{(n+1)}\right| \leqslant \frac{6M_0}{m_0^2}\varepsilon^2.$$

Démonstration: Soit $n \geqslant 1$ tel que, pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,

$$\left|a_v^{(n)} - a_0^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon,$$

avec $\varepsilon \leqslant m_0/5$. En particulier, le fait que la suite (m_n) soit croissante implique que, pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,

$$\left|a_v^{(n)} - a_0^{(n)}\right| \leqslant \frac{\left|a_0^{(n)}\right|}{5}.$$

En posant, pour tout v, $a_v^{(n)} = a_0^{(n)}(1+\varepsilon_v^{(n)})$, on a donc $\left|\varepsilon_v^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon/m_0 \leqslant 1/5$ pour tout v.

En considérant le développement de Taylor de la fonction $\sqrt{1+z}$ au voisinage de zéro, il est facile de montrer que pour tout z tel que $|z| \leqslant 1/2$, on a

$$\left|\sqrt{1+z} - 1 - \frac{z}{2}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{4}.$$

On en déduit directement que, pour tous $v_1, v_2 \in \mathcal{I}_g$,

$$\left|\sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v_2}^{(n)}} - \frac{a_{v_1}^{(n)} + a_{v_2}^{(n)}}{2}\right| \leqslant \left|a_0^{(n)}\right| \left(\frac{\left|\varepsilon_{v_1}^{(n)}\varepsilon_{v_2}^{(n)}\right|}{2} + \frac{\left|\varepsilon_{v_1}^{(n)} + \varepsilon_{v_2}^{(n)} + \varepsilon_{v_1}^{(n)}\varepsilon_{v_2}^{(n)}\right|^2}{4}\right).$$

Le fait que pour tout v, $\left|\varepsilon_v^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon/m_0 \leqslant 1/5$ implique alors que pour tous $v_1, v_2 \in \mathcal{I}_g$,

$$\left|\sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v_2}^{(n)}} - \frac{a_{v_1}^{(n)} + a_{v_2}^{(n)}}{2}\right| \leqslant 6\left|a_0^{(n)}\right| \frac{\varepsilon^2}{m_0^2},$$

d'où, en utilisant la décroissance de la suite (M_n) :

$$\left|\sqrt{a_{v_1}^{(n)}}\sqrt{a_{v_2}^{(n)}} - \frac{a_{v_1}^{(n)} + a_{v_2}^{(n)}}{2}\right| \leqslant \frac{6M_0}{m_0^2}\varepsilon^2.$$

D'après la définition des $a_v^{(n+1)}$, on a donc aussi, pour tout $v \in \mathcal{I}_g$,

$$\left|a_v^{(n+1)} - a_0^{(n+1)}\right| \leqslant \frac{6M_0}{m_0^2}\varepsilon^2.$$

♣