Colles de Maths

Exercices et Solutions

Maxime Bombar

Todo list

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre linéaire de base

Exercice 1.1: (Centrale) Applications linéaire et familles liées

Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Pour $a \in E$, on note F_a l'ensemble des endomorphismes f de E tels que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x), a)$ est liée.

1. Déterminer F_a lorsque $a = 0$ puis lorsque $n = 2$.
2. Montrer que F_a est un espace vectoriel pour tout $a \in E$.
3. Soit H un espace vectoriel de dimension finie. Caractériser tous les endomorphismes v de H tels que pour tout $h \in H$ la famille $(h, v(h))$ soit liée.
4. Déterminer la dimension de F_a. On pourra chercher $f(x)$ sous la forme $f(x) = \lambda x + \theta(x)a$ avec θ une forme linéaire.

Solution Ex. 1.1

1.
   - Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, alors elle est nécessairement liée. Par suite, quel que soit l'endomorphisme f, et quel que soit $x \in E$, $(x, f(x), 0)$ est toujours liée. Donc $F_0 = \mathcal{L}(E)$.
   - De même, si $n = 2$, la famille $(x, f(x), a)$ contient plus de vecteurs que la dimension de l'espace ambient. Elle est donc nécessairement liée et par conséquent $F_a = \mathcal{L}(E)$.
2. On va prouver que F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. $F_a \subset \mathcal{L}(E)$ et $0 \in F_a$. Soit $f, g \in F_a$ et $\lambda, \mu \in K$. Prouvons que $\lambda f + \mu g \in F_a$. Soit $x \in E$. Les familles $(x, f(x), a)$ et $(x, g(x), a)$ sont liées.
   - Si (x, a) est liée, alors assurément $(x, (\lambda f + \mu g)(x), a)$ est liée.
   - Si (x, a) est libre alors $f(x) \in Vect(x, a)$ et $g(x) \in Vect(x, a)$ donc $(\lambda f + \mu g)(x) \in Vect(x, a)$ ie $(x, (\lambda f + \mu g)(x), a)$ est liée.

   Ainsi, quel que soit $x \in E$, la famille $(x, (\lambda f + \mu g)(x), a)$ est liée. Par conséquent F_a est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
3. Soit v un tel endomorphisme. On va prouver qu'il s'agit d'une homothétie vectorielle. Par hypothèse, pour tout $h \in H$, la famille $(h, v(h))$ est liée. Ceci équivaut à $\forall h \in H, \exists \lambda_h, v(h) = \lambda_h h$. Fixons un certain $h_0 \neq 0$. Soit $h \in H$. On va prouver que pour tout $h \in H$, $v(h) = \lambda_{h_0} h$, ce qui donnera que λ_h est indépendant de h.
   - Premier cas, supposons que (h, h_0) soit libre. D'une part, $v(h + h_0) = \lambda_{h+h_0}(h + h_0)$, mais d'autre part $v(h + h_0) = v(h) + v(h_0) = \lambda_h h + \lambda_{h_0} h_0$. Par conséquent,
   $$(\lambda_{h+h_0} - \lambda_h)h + (\lambda_{h+h_0} - \lambda_{h_0})h_0 = 0$$
   Puisque la famille est libre, on en déduit que $\lambda_{h+h_0} = \lambda_h$ et $\lambda_{h+h_0} = \lambda_{h_0}$, et donc $\lambda_h = \lambda_{h_0}$.
   - Deuxième cas, supposons que (h, h_0) soit liée. Puisque h_0 est non nul, il existe μ tel que $h = \mu h_0$. Mais alors
   $$v(h) = \mu v(h_0) = \mu \lambda_{h_0} h_0 = \lambda_{h_0} h$$

   Finalement, dans tous les cas il existe un scalaire $\lambda = \lambda_{h_0}$ tel que pour tout vecteur h, $v(h) = \lambda h$. Par conséquent, v est une homothétie. La réciproque est claire.
4. Les cas $n = 2$ et $a = 0$ ont déjà été résolus. On suppose donc que $n \geq 3$ et $a \neq 0$.
   Pour déterminer la dimension de F_a, on va chercher un isomorphisme avec un espace vectoriel dont on connaît la dimension. Et pour cela, on va se servir de la question précédente : Si on n'a pas de a, alors f est une homothétie : Il existe $\lambda \in K$ tel que $f(x) = \lambda x$. Dans le cas présent, on va donc chercher à exprimer f

sous la forme d'une homothétie et d'une petite perturbation faisant intervenir a : On va chercher $f(x)$ sous la forme $f(x) = \lambda x + \theta(x)a$ avec θ une forme linéaire.
Remarquons que si f s'écrit sous cette forme, $(x, f(x), a)$ sont bien sûr liés. Réciproquement :
Soit φ une forme linéaire telle que $\varphi(a) = 1$ et $H = \mathrm{Ker}\varphi$ l'hyperplan associé. On note p la projection sur H, parallèlement à $\mathrm{Vect}(a)$:

$$p(x) = x - \varphi(x)a$$

Pour tout $x \in E$, $\mathrm{Vect}(p(x), p(f(x)), a) = \mathrm{Vect}(p(x), p(f(x))) \oplus \mathrm{Vect}(a)$ est de dimension au moins 2 (car $a \neq 0$). Or, on vérifie que $\mathrm{Vect}(p(x), p(f(x)), a) \subset \mathrm{Vect}(x, f(x), a)$ qui est de dimension au plus 2 par hypothèse sur f. Par un argument de dimension, on en déduit que $\mathrm{Vect}(x, f(x), a) = \mathrm{Vect}(p(x), p(f(x))) \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et est de dimension 2. On en déduit que pour tout $x \in E$, la famille $(p(x), p(f(x)))$ est liée. En particulier, pour tout $h \in H$, la famille $(h, p(f(h)))$ est liée. D'après la question précédente, on dispose de $\lambda \in K$ tel que

$$\forall h \in H,\ p(f(h)) = \lambda h$$

ie

$$\forall h \in H,\ f(h) = \lambda h + \varphi(f(h))a$$

Soit à présent $x \in E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. $x = x - \varphi(x)a + \varphi(x)a$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\varphi(x)a + x - \varphi(x)a) \\ &= \varphi(x)f(a) + \lambda(x - \varphi(x)a) + \varphi(f(x) - \varphi(x)f(a))a \\ &= \varphi(x)f(a) + \lambda x - \lambda\varphi(x)a + \varphi(f(x))a - \varphi(x)\varphi(f(a))a \\ &= \varphi(x)f(a) + \lambda x + \psi(x)a \end{aligned}$$

Où on a posé $\psi(x) = \lambda\varphi(x) + \varphi(f(x)) - \varphi(x)\varphi(f(a))$. ψ est une forme linéaire.
Pour conclure, il suffit de prouver que $f(a)$ est colinéaire à a.
Soit b un vecteur indépendant de a.

- La famille $(b, f(b), a)$ est liée donc $f(b) \in \mathrm{Vect}(a, b)$.
- La famille $(a + b, f(a + b), a)$ est liée donc $f(a) + f(b) \in \mathrm{Vect}(a + b, a) = \mathrm{Vect}(a, b)$.

On en déduit que $f(a) = f(a) + f(b) - f(b) \in Vect(a, b)$.
Soit $c \notin \mathrm{Vect}(a, b)$. C'est possible, car $n \geq 3$. Par le même raisonnement, on en déduit que $f(a) \in \mathrm{Vect}(a, c)$.
Par conséquent :

$$f(a) \in \mathrm{Vect}(a, b) \cap \mathrm{Vect}(a, c) = \mathrm{Vect}(a)$$

On dispose de $\mu \in K$ tel que $f(a) = \mu a$ et par conséquent, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \lambda x + \varphi(x)\mu a + \psi(x)a = \lambda x + \theta(x)a$$

où

$$\theta(x) = \mu\varphi(x) + \psi(x)$$

éfinit une forme linéaire.
Finalement, on a l'isomorphisme : $\left\{ \begin{array}{ll} K \times E^\star & \to F_a \\ (\lambda, \theta) & \mapsto \lambda id_E + a\theta \end{array} \right.$
D'où

$$\dim(F_a) = \dim(K \times E^\star) = \dim(K) + \dim(E^\star) = n + 1$$

Exercice 1.2: Inverse d'un côté

Soit E un espace vectoriel et f, g deux endomorphismes tels que $f \circ g = id_E$.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que f est un isomorphisme.
2. On ne fait plus d'hypothèses sur la dimension de E.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$, puis $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
   b) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. Donner un exemple où ni f ni g ne sont des applications bijectives. Expliciter $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(g)$ et $g \circ f$.

Solution Ex. 1.2

1. • **Première méthode** Supposons dans un premier temps qu'il existe un endomorphisme h tel que $h \circ f = id_E$. Alors, en composant à droite par g on a

$$h \circ f \circ g = g \Rightarrow h \circ Id_E = g \Rightarrow h = g.$$

Il suffit donc de prouver l'existence d'un tel h. Pour cela, introduisons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{L}(E) \\ h & \mapsto h \circ f \end{cases}$$

C'est une application linéaire entre deux espace de même dimension finie, et nous souhaitons prouver que $id_E \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Il suffit de prouver qu'en réalité elle est surjective. Par le théorème du rang, il suffit de prouver qu'elle est injective. Soit donc $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$h \circ f = 0 \Rightarrow h \circ f \circ g = 0 \Rightarrow h \circ id_E = 0 \Rightarrow h = 0$$

D'où $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Le résultat suit.

• **Deuxième méthode** Puisqu'on est en dimension finie, on peut utiliser le déterminant : $\det(f \circ g) = \det(id_E) = 1$ d'une part, et d'autre part $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$. Par conséquent, $\det(f) \neq 0$ et f est donc un isomorphisme.

2. a) • On a clairement $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

$$f(x) = (f \circ g)(f(x)) = f((g \circ f)(x)) = f(0) = 0$$

D'où l'égalité recherchée.

• De même, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(g)$. On dispose de $y \in E$ tel que $x = g(y)$. Or, $y = f \circ g(y)$ d'où

$$x = g(y) = g \circ f \circ g(y) = (g \circ f)(g(y)) \in \mathrm{Im}(g \circ f).$$

D'où l'égalité recherchée.

b) $(g \circ f)^2 = g \circ f \circ g \circ f = g \circ id_E \circ f = g \circ f$ donc $g \circ f$ est un projecteur. En particulier,

$$E = \mathrm{Ker}(g \circ f) \oplus \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g).$$

3. Il est nécessaire de se placer en dimension infinie. Considérons E l'espace des suites réelles, et soit f l'opérateur de décalage vers la gauche défini par

$$f : \begin{cases} E & \to E \\ (u_0, u_1, \dots) & \mapsto (u_1, \dots) \end{cases}$$

f possède clairement un inverse à droite : L'opérateur de décalage vers la droite défini par

$$g : \begin{cases} E & \to E \\ (u_0, u_1, \dots) & \mapsto (0, u_0, u_1, \dots) \end{cases}.$$

Pourtant, f n'est pas injectif : $\mathrm{Ker}(f) = \{(u_0, 0, 0, \dots) \mid u_0 \in \mathbb{R}\}$. On a de plus $\mathrm{Im}(g) = \{u \mid u_0 = 0\}$ et

$$(g \circ f(u))_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 0 \\ u_n & \text{Sinon} \end{cases}$$

Exercice 1.3: Projecteurs de même noyau

Soit E un espace vectoriel, et p, q deux endomorphismes de E.

1. On suppose que p et q sont deux projecteurs de même noyau. Montrer alors que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2. Réciproquement, on suppose que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
   a) Montrer que p et q sont des projecteurs.
   b) Montrer que p et q ont même noyau.

Solution Ex. 1.3

1. Puisque q est un projecteur, on a la décomposition en somme directe
$$E = \mathrm{Ker}(q) \oplus \mathrm{Im}(q).$$
Soit $x = x_k + x_q \in E$ avec $x_k \in \mathrm{Ker}(q)$ et $x_q \in \mathrm{Im}(q)$.
   - Alors d'une part, $q(x) = q(x_q) = x_q$ puisque q est un projecteur et $x_q \in \mathrm{Im}(q)$, d'où $pq(x) = p(x_q)$.
   - D'autre part, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$ donc $p(x) = p(x_q) = pq(x)$.

   De même pour l'autre égalité.
2. a) $p^2 = (pq)(pq) = p(qp)q = pq^2 = pq = p$ et de même $q^2 = q$. Donc p et q sont bien des projecteurs.
   b) Soit $x \in \ker(p)$. $q(x) = qp(x) = q(0) = 0$ donc $x \in \ker(q)$. L'autre sens se fait de la même façon.

Exercice 1.4: Noyaux itérés

Soit E un espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que la suite des noyaux itérés $(\mathrm{Ker}(u^n))$ est croissante pour l'inclusion.
2. Montrer que la suite des images itérées $(\mathrm{Im}(u^n))$ est décroissante pour l'inclusion.
3. Établir l'équivalence entre $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.
4. Établir l'équivalence entre $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ et $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$.

Solution Ex. 1.4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(u^n)$, $u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = u(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u^{n+1})$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u^n) \subset \mathrm{Ker}(u^{n+1})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}(u^{n+1})$, on dispose de $x \in E$ tel que $y = u^{n+1}(x) = u^n(u(x)) \in \mathrm{Im}(u^n)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(u^n)$.
3.
   - ($\Rightarrow$) Soit $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$. On dispose de $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$. Par conséquent, $u^2(x) = 0$ ie $x \in \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ donc $y = u(x) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.
   - ($\Leftarrow$) Soit $x \in E$. On va raisonner par équivalences :
   $$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(u^2) &\Leftrightarrow u^2(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow u(x) \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \\ &\Leftrightarrow u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(u) \end{aligned}$$
   Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$.
4.
   - ($\Rightarrow$) Soit $x \in E$. Alors, $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. On dispose de $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y)$ ie $u(x - u(y)) = 0$, ie $x - u(y) \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors, $x = x - u(y) + u(y) \in \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$. Par conséquent, $E \subset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$ et l'autre inclusion est évidente.
   - ($\Leftarrow$) On sait déjà que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. On dispose de $x' \in E$ tel que $x = u(x')$. Soit $y \in \mathrm{Ker}(u)$ et $z \in \mathrm{Im}(u)$ tels que $x' = y + u(z)$. Alors $u(x) = u(y) + u^2(z) = u^2(z) \in \mathrm{Im}(u^2)$. Par conséquent $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$ d'où le résultat.

Exercice 1.5: (Mines) Rang d'une matrice à coefficients entiers

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Comparer le rang de M dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$.
2. Que se passe-t-il si l'on voit M comme une matrice à coefficients dans dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier ?

Solution Ex. 1.5

1. On utilise que le rang de M est le plus grand entier r pour lequel il existe une matrice extraite de M inversible de taille $r \times r$. Par conséquent, on a
$$rg_{\mathbb{C}}(M) = rg_{\mathbb{R}}(M) = rg_{\mathbb{Q}}(M).$$

2.
- On note $\bar{M}$ la réduction de M modulo p. Soit r_p le rang de $\bar{M}$, et soit $\bar{A}$ une matrice extraite de $\bar{M}$, inversible et de taille $r_p \times r_p$. Elle correspond à une matrice A de même taille, et extraite de M. Alors, $\det(\bar{A}) \neq 0$. Or, $\det(\bar{A}) = \bar{\det}(A)$. Donc $\bar{det}(A) \neq 0$. En particulier, $\det(A) \neq 0$ et A est inversible. Par conséquent, $r_p \leq rg_{\mathbb{Q}}(M)$.
- En considérant la matrice $M = pI_n$, on a $\bar{M} = 0$ donc en particulier $r_p = 0$ mais $rg_{\mathbb{Q}}(M) = n$, donc cette inégalité peut ne pas être une égalité.

Exercice 1.6: Rang d'un projecteur

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et p un projecteur de E.

1. Montrer que $rang(p) = Tr(p)$.
2. *Bonus :* Si E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ espace vectoriel, est-ce toujours vrai ?

Solution Ex. 1.6

1. Soit $r := rang(p)$. Comme p est un projecteur, on a la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de p s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où A est la matrice de l'endomorphisme induit par p sur son image. Puisque c'est un projecteur, $A = I_r$. Par suite, $r = Tr(A) = Tr(p)$.
2. *Bonus :* Il faut essayer de voir où on utilise une propriété de $\mathbb{R}$. Tout reste vrai jusqu'à l'écriture de la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition en somme directe. Là où le bat blesse, c'est que dans le cas des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la trace de l'identité peut-être nulle ! En effet,

$$Tr(I_r) = r \mod p$$

donc est nulle si p divise r ! Il faut donc faire attention lorsque l'on travaille avec des corps de caractéristique non nulle.

Exercice 1.7: Matrices réelles sembables sur $\mathbb{C}$

Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution Ex. 1.7

On dispose de $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $N = P^{-1}MP$, ie $PN = MP$. Écrivons $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a donc

$$QN + iRN = MQ + iMR$$

et en identifiant partie réelle et imaginaire, il vient

$$QN = MQ \quad \text{et} \quad RN = MR \tag{1.3a}$$

Si l'une des deux matrices Q ou R est inversible, alors M et N sont bien semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sinon, pour $t \in \mathbb{C}$, posons $P_t = Q + tR$. La condition 1.3a donne que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $P_tN = MP_t$. Il suffit donc de trouver un $t \in \mathbb{R}$ tel que P_t soit inversible pour conclure. Introduisons alors la fonction $\varphi : t \mapsto \det(P_t)$. Elle est polynomiale en t, et non identiquement nulle puisque par hypothèse $\varphi(i) = \det(P) \neq 0$. Par conséquent, elle ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$ tout entier et on dispose de $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(P_{t_0}) \neq 0$ ie P_{t_0} est inversible. D'où le résultat.

Exercice 1.8: (Un peu plus difficile) Condition pour que $rang(f) \leq rang(g)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit f, g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$ ssi il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ v$.
2. Montrer que $rang(f) \leq rang(g)$ ssi il existe $u \in GL(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ f = g \circ v$.

Solution Ex. 1.8

On note $n := dim(E)$.

1.
- $\Rightarrow$ Si $x \in \mathrm{Im}(f)$ alors on dispose de y tel que $x = f(y) = g(v(y))$ donc $x \in \mathrm{Im}(g)$ d'où le résultat.

- $\Leftarrow$ Soit $p := rang(f)$. Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(f)$, complétée en $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$, pour tout $i \leq p$ on dispose de u_i tel que $f(e_i) = g(u_i)$. On définit alors v linéaire par son action sur la base $\mathcal{E}$:

$$v(e_i) := \begin{cases} u_i & \text{Pour } i = 1, \dots, p \\ 0 & \text{Pour } i = p+1, \dots, n \end{cases}$$

Alors v vérifie :

$$g \circ v(e_i) := \begin{cases} g(u_i) = f(e_i) & \text{Pour } i = 1, \dots, p \\ g(0) = 0 & \text{Pour } i = p+1, \dots, n \text{ ie } e_i \in \ker(f) \end{cases}$$

D'où le résultat.

2. L'idée est de se ramener dans le cas précédent. En effet, si u, v vérifient ça, alors $\mathrm{Im}(u \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Il suffit de trouver un automorphisme u qui envoie l'image de f sur un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(g)$. Ceci est toujours possible : On note $p := rang(f)$ et $q := rang(g)$ avec $p \leq q$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ complétée en $\mathcal{E}_f := (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E. De même, on considère $\mathcal{E}_g := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_q, \varepsilon_{q+1}, \dots, \varepsilon_n)$ base de $\mathrm{Im}(g)$ complétée en une base de E. On définit alors u comme l'automorphisme qui envoie $\mathcal{E}_f$ sur $\mathcal{E}_g$.

Exercice 1.9: (CCP) Exercice 62 de la banque 2020

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}(f + Id) = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$.

Solution Ex. 1.9

1. f est linéaire donc :

$$f^2 - f - 2Id = 0 \Leftrightarrow f \circ (f - Id) = 2Id \Leftrightarrow f \circ \frac{1}{2}(f - Id) = Id$$

donc f possède un inverse à droite $\frac{1}{2}(f - Id)$. On vérifie (Le faire !) que c'est aussi un inverse à gauche. Par conséquent, f est inversible, donc bijectif, et $f^{-1} = \frac{1}{2}(f - Id)$.

2. On utilise le lemme des noyaux : Soit $P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. Comme les deux facteurs sont premiers entre eux, le lemme des noyaux donne

$$\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(f + Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id).$$

Or, par hypothèse, $P(f) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(p(f)) = E$. D'où le résultat.
Remarque : On peut aussi démontrer ce résultat *à la main* par analyse-synthèse.

3.
   - Prouvons que $\mathrm{Im}(f+Id) \subset \mathrm{Ker}(f-2Id)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f+Id)$. On dispose de $x \in E$ tel que $y = f(x)+x$. Alors $(f - 2Id)(y) = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$.
   - Pour l'inclusion réciproque, on va utiliser un argument de dimension. Par la question précédente,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - 2Id))$$

D'autre part, le théorème du rang donne

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) + \dim(\mathrm{Im}(f + Id))$$

On en déduit que

$$\dim(\mathrm{Im}(f + Id)) = \dim(\mathrm{Ker}(f + 2Id))$$

d'où l'égalité.

Exercice 1.10: (Mines) Rang d'une matrice antisymétrique

Soit A une matrice antisymétrique réelle.

1. Montrer que Ker$A$ et ImA sont supplémentaires.
2. Montrer que le rang de A est pair.

Solution Ex. 1.10

1. L'idée est que les matrices antisymétriques sont (tout comme les matrices symétriques) liées à une structure euclidienne. Il est donc assez naturel d'utiliser l'orthogonalité pour établir que ces deux espaces sont supplémentaires (orthogonaux).
   On munit l'espace des matrices colonnes du produit scalaire usuel. On a les équivalences
   $$X \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n\ {}^tYAX = 0 \Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n\ {}^t({}^tYAX) = 0$$
   $$\Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n - {}^tXAY = 0 \Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{R}^n \langle X, AY\rangle = 0$$
   ie
   $$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A)^{\perp}$$
   En particulier, Ker(A) et Im(A) sont supplémentaires (orthogonaux).
2. Soit a l'endomorphisme canoniquement attaché à a, et soit b l'endomorphisme induit par a sur Im(a). C'est un isomorphisme de Im(a), et antisymétrique pour la restriction à Im(a) du produit scalaire. Soit B la matrice de b dans une base orthonormée de Im(A). Alors $det(B) \neq 0$ et B est une matrice antisymétrique réelle donc ${}^t(B) = -B$. Ainsi,
   $$\det(B) = \det({}^tB) = \det(-B) = (-1)^{rg(A)} \det(B)$$
   et par suite $rg(A)$ est pair !

Chapitre 2

Réduction

Exercice 2.1: Calcul des puissances d'une matrice

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n.

Solution Ex. 2.1

On calcule $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$. 4 est valeur propre simple. $A-I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\mathrm{Ker}(A-I)$ est de dimension 2. On en déduit que A est diagonalisable, avec valeurs propres $\{1, 4\}$. On peut donc écrire

$$A = PDP^{-1}$$

avec P inversible, et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

et

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Soit Q_n le polynôme interpolateur tel que $Q_n(1) = 1$ et $Q_n(4) = 4^n$. Alors, $A^n = Q_n(A)$.

On calcule

$$Q_n = 1 + \frac{4^n - 1}{3}(X - 1)$$

d'où

$$A^n = \frac{4^n - 1}{3} A + \frac{4 - 4^n}{3} I_n$$

Exercice 2.2: $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit que toute matrice complexe est limite d'une suite de matrices inversibles.

Solution Ex. 2.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $M_n := M - 2^{-n}$. Alors $M_n \to M$. Par ailleurs, M n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. On en déduit qu'à partir d'un certain rang, $2^{-n} \notin Sp(M)$ et donc M_n est inversible. D'où le résultat.

Exercice 2.3: Sous groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C})$

Soit G un sous groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes les matrices de G sont co-diagonalisables.

Solution Ex. 2.3

D'après le théorème de Lagrange, l'ordre de toute matrice de G divise $|G|$. En particulier, pour toute matrice $M \in G$, $M^{|G|} = I_n$. Par conséquent, le polynôme $X^{|G|} - I_n$ annule toutes les matrices de G. Or, il est scindé à racines simples. Par conséquent toutes les matrices de G sont diagonalisables. Comme G est abélien, les matrices commutent deux à deux. Elles sont donc co-diagonalisables.

Exercice 2.4: Matrice de Matrices

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, et posons $B := \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(K)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Solution Ex. 2.4

On va étudier la forme de $P(B)$ pour $P \in K[X]$. Par récurrence on montre que pour tout entier naturel k,

$$B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

et par conséquent pour tout polynôme $P \in K[X]$, on a

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

- Supposons que B est diagonalisable. Alors on dispose de P scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$. D'après le calcul précédent, P et XP' annulent aussi A. Comme P est scindé à racines simples, A est donc diagonalisable. Par ailleurs, P et P' n'ont aucune racine complexe commune, donc sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$: D'après le théorème de Bezout, on dispose de $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que

  $$UP + VP' = 1$$

  et par conséquent

  $$U(A)P(A) + V(A)P'(A) = I_n.$$

  Puisque $P(A) = 0$ on a donc

  $$V(A)P'(A) = I_n$$

  et donc $P'(A)$ est inversible. En particulier,

  $$AP'(A) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

- Réciproquement, si $A = 0$, on a bien que $B = 0$ est diagonalisable.

Exercice 2.5: Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit qu'elle est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

1. Prouver que A est nilpotente ssi ses valeurs propres sont toutes nulles.
2. Prouver que A est nilpotente ssi

   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, Tr(A^p) = 0.$$

Solution Ex. 2.5

1. - $\Rightarrow$ On dispose d'un entier naturel k tel que $A^k = 0$. Par conséquent, μ_A divise X^k et est donc de la forme X^l avec $1 \leq l \leq k$. En particulier, $Sp(A) = \{0\}$.
   - $\Leftarrow$ Si $Sp(A) = \{0\}$ alors $\chi_A = X^n$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ ie $A^n = 0$. Par conséquent, A est nilpotente.

   On remarque au passage qu'une matrice A est nilpotente ssi $A^n = 0$.

2. • $\Rightarrow$ Si A est nilpotente, on a vu que ses valeurs propres sont toutes nulles. Par ailleurs, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc A est trigonalisable : A est semblable à une matrice triangulaire strictement supérieure B de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, B^p est encore de cette forme, donc $Tr(B^p) = 0$. Puisque la trace est un invariant de similitude, on en déduit que $Tr(A^p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   • $\Leftarrow$ Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $Tr(A^p) = 0$. Prouvons que A est nilpotente. A est trigonalisable, donc $Tr(A^p) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} \lambda^p = 0$. Soit $r := |Sp(A)|$. En prenant les traces de A^p pour $1 \leq 1 \leq r$ on définit un système de r équations qui peut s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   en particulier, la matrice associée n'est pas inversible. Or, son déterminant vaut

$$\lambda_1 \cdots \lambda_r Vandermonde(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$$

   et est nul ssi un certain λ_i est nul. Par suite, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ où A' vérifie encore $Tr(A'^p) = 0$ pour tout p. Par récurrence, toutes les valeurs propres de A' sont nulles, et par conséquent toutes les valeurs propres de A sont nulles. Donc A est nilpotente.

Exercice 2.6: Projecteur de trace nulle.

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$ et $Tr(M) = 0$.

Solution Ex. 2.6

Soit M une telle matrice. $M^2 = M$ donc le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est scindé à racines simples et annule M. Par conséquent, M est diagonalisable, et de plus ses valeurs propres sont 0 ou 1. Comme $Tr(M) = 0 = \sum_{\lambda \in Sp(M)} \lambda = |\{\lambda \in Sp(M) \mid \lambda = 1\}|$ on en déduit que toutes les valeurs propres de M sont nulles. Par conséquent, M est diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre : M est donc la matrice nulle.

Exercice 2.7: Equation de sylvester

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Supposons que χ_A et χ_B soient premiers entre eux. Montrer que $\chi_B(A)$ est inversible.
2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition l'équation

$$AX - XB = C$$

   a-t-elle une solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Solution Ex. 2.7

1. Par le théorème de Bézout, on dispose de $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\chi_A U + \chi_B V = 1.$$

   On a donc

$$\chi_A(A)U(A) + \chi_B(A)V(A) = I_n.$$

   Puisque $\chi_A(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit que

$$\chi_B(A)V(A) = I_n,$$

   et par conséquent $\chi_B(A)$ est inversible.

2. Introduisons l'endomorphisme $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto AX - XB \end{cases}$
Le problème se ramène à trouver une CNS sur A et B pour que φ soit surjectif. Puisqu'on est en dimension finie, ceci est équivalent à prouver qu'il est injectif (donc un isomorphisme). En particulier, si l'équation amet une solution, elle est nécessairement unique. Montrons que l'équation a une (unique) solution ssi A et B n'ont aucune valeur propre en commun.
   - $\Leftarrow$ Supposons que A et B n'ont aucune valeur propre en commun, et soit $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $AX = XB$ et par une récurrence immédiate, pour tout entier k, $A^kX = XB^k$. On en déduit que pour tout polynôme P, $P(A)X = XP(B)$. En particulier, $\chi_B(A)X = X\chi_B(B) = 0$ et donc $X \in \mathrm{Ker}(\chi_B(A))$. Or, la condition sur les spectres donne que χ_A et χ_B sont premiers entre eux. D'après la question précédente, $\chi_B(A)$ est inversible. On en déduit que $X = 0$. Par conséquent, φ est injectif, donc surjectif et l'équation admet une unique solution.
   - $\Rightarrow$ Pour ce sens, raisonnons par contraposée, et supposons que A et B ont une valeur propre λ en commun. On va alors prouver que φ n'est pas injectif en construisant X non nulle dans son noyau. L'idéal serait si $AX = \lambda X$ et $XB = \lambda X$. La première égalité a lieu si toutes les colonnes de X sont des vecteurs propres de A pour λ, et la deuxième égalité a lieu si toutes les lignes de X sont des vecteurs propres de B pour λ. Pour fabriquer une telle matrice, il suffit de prendre Y un vecteur propre de A pour λ, Z un vecteur propre de B pour λ et de poser $X = Y^tZ$. De plus, X est non nul car son terme général est y_iz_j. Comme Y et Z sont des vecteurs propres, ils ne sont pas nuls et par conséquent il existe au moins deux indices i et j tels que $y_iz_j \neq 0$.

Exercice 2.8: Topologie et classes de similitude

1. Soit A une matrice complexe. Montrer que $Sim(A) := \{PAP^{-1} | P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est connexe par arcs.
2. Soit A une matrice complexe. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $Sim(A)$ est fermée.

Solution Ex. 2.8

1. $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et l'application $P \mapsto PAP^{-1}$ est continue, d'image $Sim(A)$. Donc $Sim(A)$ est connexe par arcs en tant qu'image d'un connexe par arcs par une application continue.
2. $\Rightarrow$ Soit (A_n) une suite d'éléments de $Sim(A)$. On note $A_n := P_nAP_n^{-1}$, et on suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_n \to M$. On va montrer que M est encore semblable à A. Pour cela, on va prouver que M est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres que A. Il suffit pour cela de prouver que M est diagonalisable et a le même polynôme caractéristique que A.
      - Pour tout n, A_n est diagonalisable, et son polynôme minimal est μ_A, qui est scindé à racines simples. Alors $\mu_A(A_n) = 0$ pour tout n. Par passage à la limite, et par continuité de μ_A, on en déduit que $\mu_A(M) = 0$, en particulier M est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.
      - Les coefficients du polynôme caractéristique sont des fonctions continues. On en déduit que $\chi_{A_n} \to \chi_M$. Or, $\chi_{A_n} = \chi_A$. Par conséquent, $\chi_M = \chi_A$.

   $\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que $Sim(A)$ est fermée. Montrons que A est diagonalisable. Remarquons tout d'abord que A est trigonalisable : On dispose de T triangulaire supérieure, et P inversible telles que $A = PTP^{-1}$. L'idée est de perturber les coefficients hors diagonaux de T jusqu'à les rendre très petits. Pour tout réel $\delta > 0$ posons

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Alors

$$T_\delta = D_\delta^{-1}TD_\delta = \begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \dots & \delta^{n-1}t_{1n} \\ 0 & t_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta t_{n-1,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Les coefficients hors diagonaux tendent tous vers 0 avec δ. Par suite,

$$T_\delta \to D := \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or, pour tout δ, T_δ est semblable à T, donc à A, ie pour tout δ, $T_\delta \in Sim(A)$. Par fermeture, on en déduit que $D \in Sim(A)$, ie A est diagonalisable.

Exercice 2.9: Existence du corps de décomposition et trigonalisation

Soit K un corps, et $P \in K[X]$ un polynône unitaire irréductible de degré n.

1. On note $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, et on pose $C(P) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice compagnon associée. Montrer que $\chi_{C(P)} = P$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, et soit $M \in K[A]$ une matrice non nulle. Prouver qu'il existe $R \in K[X]$ de degré au plus $n-1$ tel que $M = R(A)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que son polynôme caractéristique soit irréductible. Montrer que $K[A]$ est un corps.
4. Montrer que $K[A]$ admet une copie isomorphe à K.
5. En déduire que pour tout polynôme $P \in K[X]$, il existe une extension L/K dans laquelle P admet une racine.
6. Montrer par récurrence que pour tout polynôme $P \in K[X]$ il existe une extension M/K dans laquelle P est scindé.
7. Conclure que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$ il existe une extension M/K telle que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(M)$.

Solution Ex. 2.9

1. Notons $\Delta(a_0, \dots, a_{n-1})(X)$ le polynôme caractéristique d'une telle matrice, et calculons-le en développant par rapport à la première colonne
$$\Delta(a_0, \dots, a_{n-1}) = (-1)^n(-X\Delta(a_1, \dots, a_{n-1})(X) + (-1)^n a_0) = a_0 + X\Delta(a_1, \dots, a_{n-1})(X)$$
Par récurrence, $\Delta(a_0, \dots, a_{n-1})(X) = P$
2. Soit A une telle matrice. Soit $M \in K[A]$. On dispose de $Q\mathbb{K}[X]$ tel que $M = Q(A)$. Par division euclidienne, on dispose de R, S tels que $Q = \chi_A S + R$ et $\deg(R) < n$. Par ailleurs,le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_A(A) = 0$. Par conséquent, $M = Q(A) = R(A)$.
3. Soit $M = R(A) \in K[A]$ non nulle. Comme χ_A est irréductible, R et χ_A sont premiers entre eux. Par le théorème de Bézout, on dispose de $U, V \in K[X]$ tels que $U\chi_A + VR = 1$. Par conséquent
$$U(A)\chi_A(A) + V(A)R(A) = I_n$$
et par le théorème de Cayley-Hamilton,
$$V(A)M = I_n.$$
Autrement dit, M est inversible dans $K[A]$. Donc $K[A]$ est un corps.
4. À tout $k \in K$, on peut associer $kI_n = k(A)$ où k est vu comme un polynôme constant. Par conséquent, K s'identifie à KI_n dans $K[A]$.
5. Soit $P \in K[X]$. Si P admet une racine dans K, c'est bon. Sinon, quitte à décomposer P en produit de facteurs irréductibles, on peut supposer que P est irréductible. D'après la première question, $P(C(P)) = 0$, et d'après la question précédente, $K[C(P)]$ est une extension de corps de K. On vient donc de trouver une racine de P dans une extension.

6. Il existe une extension dans laquelle P admet une racine. On factorise par $(X-a)$ et on récurre.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Il existe une extension M/K dans laquelle χ_A est scindé. Par conséquent, A est trigonalisable dans M.

Exercice 2.10: Trigonalisation simultanée

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$. Montrer que B est nilpotente.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $AB - BA = \lambda A + \mu B$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun, puis qu'elles sont simultanément trigonalisables.

Solution Ex. 2.10

1. On calcule les puissances de B à partir de la relation $AB - BA = B$. En multipliant à droite on a $AB^2 - BAB = B^2$ et en multipliant à gauche on a $BAB - B^2A = B^2$. Par conséquent, $AB^2 - B^2A = 2B^2$. Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ que $AB^k - B^kA = kB^k$. C'est vu pour $k = 1$ ou $k = 2$. Supposons $k \geq 3$ et le résultat vrai au rang $k-1$. On a par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} AB^k - B^kA &= (AB^{k-1} - B^{k-1}A)B + B^{k-1}(AB - BA) \\ &= (k-1)B^k + B^k = kB^k \end{aligned}$$

   Considérons alors l'endomorphime

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto AM - MA \end{array} \right. .$$

   Le calcul précédent montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(B^k) = kB^k$, en particulier, pour tout k tel que $B^k \neq 0$, B^k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre k. Puisque φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, on en déduit qu'à partir d'un certain rang $B^k = 0$ ie B est nilpotente.
2. Si $\lambda = \mu = 0$, A et B commutent et donc sont cotrigonalisables. On suppose donc que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, et par symétrie on peut supposer $\mu \neq 0$. Il suffit de prouver que A et B ont un vecteur propre en commun, on conclut par récurrence sur la dimension. Pour cela, on va utiliser la question précédente. Posons $B' := \lambda A + \mu B$. Alors

$$AB' - B'A = \mu B'.$$

   La question précédente appliquée à $\frac{1}{\mu}A$ et B' montre que B' est nilpotente. En particulier, elle n'est pas inversible. Par ailleurs, si $X \in \mathrm{Ker}(B')$, $B'AX = -\mu B'X = 0$ donc $\mathrm{Ker}(B')$ est stable par A. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la restriction de A à $\mathrm{Ker}(B')$ admet une valeur propre α. Soit X un vecteur propre associé. $X \in \mathrm{Ker}(B')$ donc

$$\lambda AX + \mu BX = 0$$

   ie

$$\alpha\lambda X + \mu BX = 0$$

   ou encore

$$BX = -\frac{\lambda\alpha}{\mu}X.$$

   Par conséquent, X est un vecteur propre commun à A et B.

Chapitre 3

Exponentielle de Matrice

Exercice 3.1: Connexité de $GL_n(\mathbb{C})$.

On admet que

$$\exp : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to GL_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto \exp(M) \end{cases}$$

est surjective. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Solution Ex. 3.1

Soit $M, N \in GL_n(\mathbb{C})$. On va tracer un chemin continu γ entre M et N dans $GL_n(\mathbb{C})$. Par surjectivité de l'exponentielle de matrices, on dispose de A, B telles que $M = \exp(A)$ et $N = \exp(B)$. Posons

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] & \to GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \mapsto \exp((1-t)A + tB) \end{cases}.$$

Alors, γ est bien définie, à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ (On rappelle que $\det(\exp(M)) = e^{Tr(M)} \neq 0$), est continue par composition d'applications continues. Enfin, $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = N$. D'où le résultat.

Exercice 3.2: Déterminant de l'exponentielle

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $y_k(t) := e^{tA}e_k$, et $Y(t) := e^{tA}$. Vérifier que $y_1, \ldots, y_n$ sont n solutions du système différentiel $Y' = AY$.
3. On note $W(t) := \det([y_1, \ldots, y_n]) = \det(Y)$. Calculer W', et montrer que W est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. En déduire W.
4. Déduire de ce qui précède que $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$.

Solution Ex. 3.2

1. A est semblable dans $\mathbb{C}$ à une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors $\exp(A)$ est semblable à

   $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * & * \\ & e^{\lambda_2} & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$. On en déduit que

   $$\det(A) = \det(T) = \prod e^{\lambda_i} = \exp(\sum_i \lambda_i) = \exp(Tr(T)) = \exp(Tr(A))$$

2. Pour tout k, y_k est C^∞ et $y_k'(t) = Ae^{tA}e_k = Ay_k(t)$. D'où, $Y'(t) = [Ay_1(t), \ldots, Ay_n(t)] = A[y_1, \ldots, y_n] = AY(t)$.

3.

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det(y_1, \dots, y'_k, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \det(y_1, \dots, Ay_k, \dots, y_n) = Tr(A)\det(y_1, \dots, y_n) = Tr(A)W.$$

On en déduit que W est solution de l'équation différentielle

$$y' - Tr(A)y = 0$$

d'où

$$W(t) = W(0)e^{Tr(A)t}.$$

Or, $W(0) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1$ d'où

$$W(t) = e^{Tr(A)t}$$

4. $\det(\exp(A)) = W(1) = e^{Tr(A)}$.

Exercice 3.3: L'exponentielle est un polynôme

1. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Et soit F un sev de E. Montrer que F est fermé.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.
3. On suppose que A est diagonalisable avec des valeurs propres distinctes. Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(A) = Q(A)$.

Solution Ex. 3.3

1.
   - **Méthode 1 -** Soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. On suppose que $x_n \to x \in E$. Il suffit de prouver que $x \in F$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On la complète en une base $(e_1, \dots, e_q)$ de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on décompose x_n dans cette base : $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{p,n}, 0, \dots, 0)$. Or, la convergence de (x_n) équivaut à la convergence composante par composante. Donc pour tout k, on dispose de $x_{k,\infty} \in \mathbb{C}$ tel que $x_{k,n} \to x_{x,\infty}$ et $x = (x_{1,\infty}, \dots, x_{p,\infty}, 0, \dots, 0)$. En particulier, $x \in F$.
   - **Méthode 2 -** Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On la complète en $(e_1, \dots, e_q)$ une base de E. Définissons l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} E & \to E \\ e_i & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{Si } i \leq p \\ e_i & \text{Sinon} \end{cases} \end{cases}$
     $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, et E est de dimension finie. Par conséquent φ est continue. Or, $F = \varphi^{-1}(\{0\})$. Donc F est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
   - **Bonus : Cas où E est de dimension infinie. On suppose juste que F est de dimension finie -** Soit (x_n) une suite d'éléments de F. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $x_n \to x$. F est de dimension finie, donc $G := F \oplus vect(x)$ est de dimension finie. F est un sev de dimension finie de G, donc d'après le cas précédent, F est fermé dans G. En particulier, $x \in F$ et F est fermé dans E. Pas besoin d'invoquer la complétude hors programme de classes préparatoires !
2. $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier il est fermé. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k \leq n} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$. Par passage à la limite dans un fermé, on en déduit que $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.
3. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ le spectre de A. Posons $Q := \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} P_i$ avec $P_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$. Alors Q est le polynôme interpolateur de Lagrange de la famille (e^{λ_i}) aux points (λ_i), et pour tout i, $Q(\lambda_i) = \exp(\lambda_i)$. Par conséquent, en écrivant $A = P^{-1}Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$ on a $\exp(A) = P^{-1}Diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P = Q(A)$

Exercice 3.4: Image de l'exponentielle

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(M) \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que $M = \exp(N)$. Prouver que M est un carré.
3. En déduire que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

Solution Ex. 3.4

1. M et $-M$ commutent, donc $\exp(M)\exp(-M) = \exp(M-M) = \exp(0) = I_n$. Par conséquent, $\exp(M)$ est inversible et $\exp(M)^{-1} = \exp(-M)$.
2. $M = \exp(N) = \exp(\frac{N}{2}+\frac{N}{2}) = \exp(\frac{N}{2})\exp(\frac{N}{2}) = \exp(\frac{N}{2})^2$ puisque $\frac{N}{2}$ commnmute avec elle-même. Donc M est un carré.
3. • **Méthode 1 -** On va prouver que A n'est pas un carré. Par l'absurde, supposons que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Alors,
$$\begin{cases} a^2+bc = & -1 \\ ab+bd = & 1 \\ ac+cd = & 0 \\ bc+d^2 = & -1 \end{cases}$$
   • Si $c = 0$, alors $a^2 = -1$, ce qui est impossible puisque $a \in \mathbb{R}$.
   • Si $c \neq 0$, alors de $ac+cd = 0$ on déduit $a = -d$, puis $ab+bd = 1$ donne $0 = 1$ ce qui est absurde.

   • **Méthode 2 -** On va prouver directement que A n'est pas l'image d'une exponentielle réelle : Supposons que $A = \exp(M)$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\lambda \in Sp(M)$, on a $\exp(\lambda) \in Sp(A)$, et donc $\exp(\lambda) = -1$. λ est complexe, donc son conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de M. Par conséquent M est diagonalisable. On en déduit que $A = \exp(M)$ est aussi diagonalisable. C'est absurde.

Exercice 3.5: Diagonalisation de l'exponentielle de matrice

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est diagonalisable. Montrer que $\exp(M)$ est diagonalisable.
2. En déduire que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

Solution Ex. 3.5

1. On dispose de D diagonale, et P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Par conséquent,
$$\exp(M) = \exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$$
(Demander l'argument de continuité). Comme D est diagonale, $\exp(D)$ est aussi diagonale. Par conséquent, $\exp(M)$ est bien diagonalisable.
2. Supposons que $A = \exp(M)$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\lambda \in Sp(M)$, on a $\exp(\lambda) \in Sp(A)$, et donc $\exp(\lambda) = -1$. λ est complexe, donc son conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de M. Par conséquent M est diagonalisable. D'après la question précédente, $A = \exp(M)$ est aussi diagonalisable. C'est absurde.

Exercice 3.6: Calcul d'une exponentielle

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Solution Ex. 3.6

On calcule les puissances successives de A :
$$A^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p\theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p\theta^{2p} \end{pmatrix}$$
$$A^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{p+1}\theta^{2p+1} \\ (-1)^p\theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}$$
Alors
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
On reconnaît le DSE de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. D'où
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Espaces Euclidiens et Préhilbertiens

Exercice 4.1: (Mines) Calcul de distance et polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E := \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. Justifier la définition de $\langle , \rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. On pose $F := \{P \in E, X|P\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(1, X, \dots, X^n)$.
   a) Montrer que F est un hyperplan.
   b) Calculer $P_k(0)^2$ (On pourra remarquer que $\langle P_k', P_k \rangle = 0$).
   c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \dots, P_n)$. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Solution Ex. 4.1

1.
   - Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est définie et continue par morceau sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs, $P(t)Q(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle , \rangle$.
   - $\langle , \rangle$ est clairement une forme bilinéaire symétrique positive. Par ailleurs, si $\langle P < P \rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive,

   $$\forall t \geq 0, P(t)^2 e^{-t} = 0$$

   et par suite

   $$\forall t \geq 0, P(t) = 0$$

   On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.
2.
   a) F est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$ donc est un hyperplan.
   b) Puisque $\deg P_k' < \deg P_k$, on a $P_k' \in vect(P_1, \dots, P_{k-1})$ et par suite $\langle P_k, P_k' \rangle = 0$. Par intégration par parties, en remarquant que $2P_k'(t)P_k(t) = \frac{d}{dt}\left[P_k(t)^2\right]$, on a donc

   $$0 = \int_0^{+\infty} P_k'(t)P_k(t)e^{-t}dt = \left[\frac{1}{2}P_k(t)^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}P_k(t)^2 e^{-t}dt$$

   D'où

   $$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

   c) Puisque F est un hyperplan, $F^\perp$ est une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur. On décompose Q dans la base des P_k :

   $$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q \rangle P_k$$

Par ailleurs,

$$\langle P_k, Q\rangle = \langle \underbrace{P_k - P_k(0)}_{\in F}, \underbrace{Q}_{\in F^\perp}\rangle + P_k(0)\langle 1, Q\rangle = P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

On en déduit

$$Q = \langle 1, Q\rangle \sum_{k=0}^{n} P_k(0) P_k$$

De plus,

$$Q(0) = \langle 1, Q\rangle \sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2 = (n+1)\langle 1, Q\rangle$$

et donc

$$\langle 1, Q\rangle = \frac{Q(0)}{n+1}$$

d'où,

$$Q = \frac{Q(0)}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_k(0) P_k$$

En particulier,

$$\|Q\|^2 = \frac{Q(0)^2}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2 = \frac{Q(0)^2}{n+1}$$

Finalement,

$$d(1, F) = \frac{\langle 1, Q\rangle}{\|Q\|} = \frac{Q(0)}{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{Q(0)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par le théorème de Pythagore,

$$1 = \|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$

Et l'on obtient

$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 4.2: Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 2$, et soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $u \in O(E)$. On note $Fix(u) : \{x \in E \mid u(x) = x\}$ l'espace de ses points fixes, et soit $p_u := n - \dim F_u$.

1. Montrer que u est produit d'au plus $n - p_u$ réflexions orthogonale (qui ont pour matrice dans une base orthonormée convenable

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

)
2. En déduire que $O(E)$ est engendré par les réflexions.

Solution Ex. 4.2

1.

$\mathbf{p_u = 0}$ Alors $Fix(u) = E$ et $u = Id_E$ qui est le produit de 0 réflexions.

$\mathbf{p_u > 0}$ Soit $x \in (Fix(u))^\perp, x \neq 0$ et posons $y := u(x) \neq x$. L'idée, c'est de trouver un hyperplan H et une réflexion s_H par rapport à cet hyperplan qui envoie y sur x, et qui fixe les points fixes de u, de sorte que $s_H \circ u$ possède strictement plus de points fixes que u.

Insérer un dessin ici.

Sur un dessin, on voit que l'hyperplan médian entre x et y convient. Prouvons le :
Comme $Fix(u)$ est stable par u et que u est une isométrie, $(Fix(u))^\perp$ est aussi stable par u. Par suite,

$$y \in (Fix(u))^\perp$$

. Par ailleurs, $\|y\| = \|u(x)\| = \|x\|$ et donc

$$\langle x - y \mid x + y \rangle = 0$$

ie

$$x - y \perp x + y$$

.
Posons $H := (x-y)^\perp$ et soit s_H la réflexion par rapport à H. Alors, $s_H(x-y) = y-x$ et $s_H(x+y) = x+y$ donc $s_H(y) = x$. De plus, comme $x, y \in (Fix(u))^\perp$, il en est de même pour $x - y$. Par suite, $Fix(u) \subset H$ et donc s_H stabilise $Fix(u)$. On en déduit que $s_H \circ u$ a strictement plus de points fixes que u et donc $p_{s_H \circ u} < p_u$. Par récurrence, il est produit d'au plus $p_u - 1$ réflexions, et donc $u = s_H \circ (s_H \circ u)$ est produit d'au plus p_u réflexions.

Exercice 4.3: (Mines) Calcul d'un infimum

Calculer

$$m := \inf \left\{ \int_0^1 t^2 (ln(t) - at - b)^2 dt \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Solution Ex. 4.3

L'idée est de voir cet infimum comme la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien bien choisi.

On introduit l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0, 1]$ tel que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t^2 f(t) g(t) dt.$$

Ce produit scalaire est bien défini puisque pour $t \in]0, 1]$,

$$|t^2 f(t) g(t)| \leq \frac{1}{2} t^2 f(t)^2 + \frac{1}{2} t^2 g(t)^2.$$

Soit $f : t \mapsto \ln(t)$. Alors,

$$\begin{aligned} m &= \inf_{Q \in \mathbb{R}_1[t]} \int_0^1 t^2 (f(t) - Q(t))^2 dt \\ &= \inf_{Q \in \mathbb{R}_1[t]} \|f - Q\|^2 \\ &= d(f, \mathbb{R}_1[t])^2 \end{aligned}$$

Appliquons le processus de Gram-Schmidt à la base canonique $(f_0, f_1) = (1, t)$ pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[t]$ pour le produit scalaire considéré.

- On pose $g_0 = 1$. Alors $\|g_0\|^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$. On pose donc $h_0 = \sqrt{3}$.
- On cherche g_1 sous la forme $g_1 = f_1 + \lambda_0 g_0$ et vérifiant $\langle g_1, g_0 \rangle = 0$. On en déduit que $\langle f_1, g_0 \rangle + \lambda_0 \langle g_0, g_0 \rangle = 0$ ie

$$\lambda_0 = -\frac{\langle g_0, f_1 \rangle}{\|g_0\|^2}$$

Or,

$$\langle g_0, f_1 \rangle = \int_0^1 t^2 \times 1 \times t dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$$

d'où

$$\lambda_0 = -\frac{3}{4}$$

et

$$g_1(t) = t - \frac{3}{4}$$

Alors,

$$\|g_1\|^2 = \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 dt = \frac{1}{80}$$

On pose donc

$$h_1(t) = 4\sqrt{5}\left(t - \frac{3}{4}\right)$$

Le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_1[t]$ est donc

$$p(f)(t) = \langle f, h_0\rangle h_0 + \langle f, h_1\rangle h_1$$

Avec

$$\langle f, h_0\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 t^2 \ln(t) dt = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

et

$$\langle f, h_1\rangle = 4\sqrt{5}\int_0^1 t^2 \ln(t)\left(t - \frac{3}{4}\right) dt = \frac{\sqrt{5}}{12}$$

D'où

$$p(f)(t) = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right) = -\frac{19}{12} + \frac{5}{3}t$$

Finalement,

$$m = \|f - p(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p(f)\|^2$$

par Pythagore et

$$\|f\|^2 = \int_0^1 t^2 \ln(t)^2 dt = \frac{2}{27}$$

et

$$\|p(f)\|^2 = \int_0^1 t^2\left(-\frac{19}{12} + \frac{5}{3}t\right)^2 dt = \frac{31}{432}$$

D'où,

$$m = \frac{1}{432}$$

Exercice 4.4: Polynômes de Legendre

On munit l'espace $E := \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 fg$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n(t) := (1-t^2)^n = (1-t)^n(1+t)^n$ et $L_n(t) = M_n^{(n)}(t)$ le $n$ieme polynôme de Legendre.

1. Montrer que L_n est un polynôme de degré n et calculer son coefficient dominant.
2. Montrer que (L_n) est une famille orthogonale et calculer $\|L_n\|$.
3. On pose $P_n := \dfrac{L_n}{\|L_n\|}$.
   a) Rappeler pourquoi (P_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$.
   b) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E pour $\|.\|_2$.
   c) En déduire que (P_n) est une famille totale dans E.

4. Soit $f \in E$. On note $c_n(f) := \int_{-1}^{1} f(t)\dfrac{L_n(t)}{\|L_n(t)\|}dt$. Démontrer la formule de Parseval

$$\int_{-1}^{1} f^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)^2$$

Solution Ex. 4.4

1. L_n est la dérivée $n-$ième d'un polynôme de degré $2n$ et de coefficient dominant $(-1)^n$ donc est un polynôme de degré n. $M_n = (-1)^n X^{2n} + \dots$ et pour $k \in [0, 2n]$, $M_n^{(k)} = (-1)^n (2n)(2n-1)\dots(2n-k+1)X^{2n-k} + \dots$ en particulier, le coefficient dominant de L_n est $(-1)^n(2n)(2n-1)\dots(n+1) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$
2. Soit $n \leq m$. Par intégrations par parties successives, on a

$$\begin{aligned}
\langle L_n, L_m \rangle &= \int_{-1}^{1} L_n(t)L_m(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} L_n(t)\left[(1-t^2)^m\right]^{(m)} dt \\
&= \underbrace{\left[L_n(t) \left[\underbrace{(1-t^2)^m}_{1 \text{ et } -1 \text{ sont racines d'ordre m}} \right]^{(m-1)} \right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} L_n'(t)\left[(1-t^2)^m\right]^{(m-1)} dt \\
&= -\int_{-1}^{1} L_n'(t)\left[(1-t^2)^m\right]^{(m-1)} dt \\
&= -\underbrace{\left[L_n'(t)\left[(1-t^2)^m\right]^{(m-2)}\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} L_n''(t)\left[(1-t^2)^m\right]^{(m-2)} dt \\
&= \int_{-1}^{1} L_n''(t)\left[(1-t^2)^m\right]^{(m-2)} dt \\
&= \dots \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} \underbrace{L_n^{(n)}(t)}_{\text{Polynôme constant}} \left[(1-t^2)^m\right]^{(m-n)} dt
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas

- Premier cas, $m > n$, Alors $\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^n L_n^{(n)} \int_{-1}^{1} \left[(1-t^2)^m\right]^{(m-n)} dt = 0$
- Deuxième cas, $m = n$, Alors $\langle L_n, L_n \rangle = (-1)^n L_n^{(n)} \int_{-1}^{1} \left[(1-t^2)^n\right] dt$.
  Avec $L_n^{(n)} = (-1)^n(2n)!$. On pose $J_n := \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt$.

$$\begin{aligned}
J_n &= \underbrace{\left[t(1-t^2)^n\right]_{-1}^{1}}_{=0} + 2n \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^{n-1}dt \\
&= 2n \int_{-1}^{1} (t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^{n-1}dt \\
&= 2n \left[-\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt + \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-1}dt \right] \\
&= 2n \left[J_{n-1} - J_n\right]
\end{aligned}$$

D'où

$$(2n+1)J_n = 2nJ_{n-1}$$

Comme $J_0 = 2$ on en déduit que

$$J_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \times 2$$

Par suite

$$\|L_n\|^2 = (2n)!J_n = (2n)!\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \times 2 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)} \times 2$$

D'où

$$\|L_n\| = \frac{2^n n!}{\sqrt{2n+1}} \times \sqrt{2}$$

3. a) (P_n) est une famille de polynômes échelonnée en degré, donc est une base de $\mathbb{R}[X]$. De plus, par la question précédente, elle est bien orthonormée.

   b) Le théorème de Weierstrass nous donne déjà un espace de fonctions dans lequel est dense $\mathbb{R}[X]$: L'espace des fonctions continues sur un segment, muni de la norme uniforme. On va se servir de ce résultat pour établir le notre :
   Soit $f \in E$.

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} 1dt = 2\|f\|_\infty^2$$

   d'où

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

   Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

   Par suite,

$$\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$$

   d'où le résultat.

   c) On a vu que (P_n) était une famille orthonormée, et $\mathbb{R}[X] = vect(P_n)$ est dense dans E. (P_n) est donc bien une famille totale.

4.

$$\int_{-1}^{1} f^2(t)dt = \|f\|_2^2$$

et

$$c_n(f) = \langle f, P_n \rangle$$

est la coordonnée de f dans la BON (P_n). Cette égalité est donc une application de l'égalité de Parseval-Bessel.

Exercice 4.5: Décomposition QR

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe O une matrice orthogonale et T triangulaire supérieure telle que $A = OT$.
2. Montrer qu'on peut choisir les coefficients diagonaux de T strictement positifs.
3. Sous l'hypothèse précédente, montrer que la décomposition est unique.
4. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} O_n(R) \times B_n^+(\mathbb{R}) & \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,T) & \mapsto OT \end{cases}$$

est une application continue, bijective, de réciproque continue.

Solution Ex. 4.5

Décomposition QR Correction

Exercice 4.6: Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif

Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M = S^2$.

Solution Ex. 4.6

Racine carrée d'une matrice symétrique réelle.

Exercice 4.7: Condition nécessaire pour l'existence d'un supplémentaire orthogonal

Soit $(E, \langle\rangle)$ un espace préhilbertien, et V un sous-espace de E tel que

$$V \oplus V^{\perp} = E.$$

Montrer que V est fermé dans E.

Solution Ex. 4.7

On va utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. Soit x_n une suite d'éléments de V. On suppose que $x_n \to x \in E$. On décompose $x = v + y$ avec $v \in V$ et $y \in V^{\perp}$. Il suffit de prouver que $y = 0$. Par continuité, $\langle x_n, y\rangle \to \langle v + y, y\rangle = \langle v, y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle y, y\rangle$. Or, pour tout n, $x_n \in V$, donc $\langle x_n, y\rangle = 0$ pour tout n. On en déduit que $\langle y, y\rangle = 0$ et par suite $y = 0$.

Exercice 4.8: Étude de S_n^{++} et de S_n^{+}

On note S_n^{+} (resp. S_n^{++}) l'ensemble des matrices symétriques réelles dont le spectre est positif (resp. strictement positif).

1. Montrer que S_n^{++} est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que S_n^{+} est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que S_n^{++} est convexe.

Solution Ex. 4.8

1. On va montrer que $\mathcal{A} := S_n(\mathbb{R}) - S_n^{++}$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_k$ une suite de matrices de $\mathcal{A}$ telle que $A_k \to A$.
   Pour tout k il existe $X_k \neq 0$ et $\lambda_k \leq 0$ tel que $A_k X_k \to \lambda_k X_k$. Quitte à normer, on peut supposer que $\|X_k\| = 1$. Par compacité, on dispose de φ strictement croissante telle que $X_{\varphi(k)} \to X$ et $\|X\| = 1$. Par ailleurs,
   $$\|A_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)}\| = -\lambda_{\varphi(k)}$$
   Or,
   $$A_{\varphi(k)} \to A$$
   en tant que suite extraite d'une suite convergeant vers A. Par continuité du produit matriciel et de la norme, on en déduit que
   $$\|A_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)}\| = -\lambda_{\varphi(k)} \to \|AX\|$$
   Posons
   $$\mu := -\|AX\| \leq 0$$
   On va prouver que μ est une valeur propre (negative) de A ce qui permettra de conclure. Or,
   $$\begin{array}{ccc} A_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)} & = & \lambda_{\varphi(k)} X_{\varphi(k)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ AX & & \mu X \end{array}$$
   donc A possède une valeur propre négative, donc $A \notin S_n^{++}$ donc $A \in \mathcal{A}$.
   Par conséquent $\mathcal{A}$ est fermé, ie S_n^{++} est ouvert.
2.

   Lemme. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^{+}$ ssi pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T AX \geq 0$.*
   Preuve

   $\Leftarrow$ Soit X un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ. Alors $X^T AX = \lambda X^T X$. Or par hypothèse $X^T AX \geq 0$, donc $\lambda X^T X \geq 0$ et puisque $X \neq 0$, $X^T X > 0$. On en déduit que $\lambda \geq 0$ et par suite $A \in S_n^{+}$.

$\Rightarrow$ Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ une BON de vecteurs propres de A dont l'existence est assuré par le théorème spectral. On note λ_i la valeur propre de A associée au vecteur propre E_i. Soit $X \in R^n$. $X = \sum X_i E_i$. Alors,

$$\begin{aligned} X^T AX &= \left(\sum_i X_i E_i\right)^T A \left(\sum_j X_j E_j\right) \\ &= \sum_{i,j} X_i X_j E_i^T A E_j \\ &= \sum_{i,j} X_i X_j \lambda_j E_i^T E_j \\ &= \sum_i \lambda_i X_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Fort de ce lemme, nous pouvons répondre à la question : Soit $A_k \to A$ une suite de matrice symétriques positives convergeant vers $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Alors pour tout k, $X^T A_k X \geq 0$. Par passage à la limite dans une inégalité large, en en déduit que $X^T AX \geq 0$, d'où $A \in S_n^+$.

3.

Lemme. *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^{++}$ ssi pour tout $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $X^T AX > 0$.*
La preuve est similaire à la question précédente.

Soit maintenant $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et $t \in]0, 1[$. Soit $X \neq 0$.

$$X^T((1-t)A + tB)X = (1-t)X^T AX + tX^T BX > 0$$

comme combinaison convexe de deux réels strictement positifs.

Exercice 4.9: Coréduction de matrices symétriques réelles.

Soit (A_i) une famille de matrices symétriques réelles. On suppose que

$$\forall (i, j), A_i A_j = A_j A_i$$

Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout i, $O^T A_i O$ soit diagonale.

Solution Ex. 4.9

Pour simplifier, on va reformuler le problème en termes d'endomorphismes. Soit E un espace euclidien, et soit (f_i) une famille d'endomorphismes autoadjoints qui commutent deux à deux. L'objectif est de trouver une base orthonormée de vecteurs propres communs à tous les f_i. On va raisonner par récurrence sur la dimension de E :

- Pour $\dim(E) = 1$ c'est vrai : Toutes les matrices sont diagonales.
- Supposons le résultat vrai pour $\dim(E) \leq n - 1$.
  - 1er cas : Tous les f_i sont des homothéties. Alors toute BON convient.
  - 2eme cas : Il existe i_0 tel que f_{i_0} n'est pas une homothétie. Puisque f_{i_0} est auto-adjoint, d'après le théorème spectral,

    $$E = \bigoplus_\lambda {}^\perp E_\lambda(f_{i_0})$$

    et puisque ce n'est pas une homothétie, les $E_\lambda(f_{i_0})$ sont tous de dimension $\leq n - 1$.
    Par ailleurs, comme f_i et f_{i_0} commutent, tout espace stable par f_{i_0} est stable par f_i. C'est en particulier le cas pour les sous-espaces propres. Pour chaque $\lambda \in Sp(f_{i_0})$, notons $f_{i,\lambda}$ l'induit de f_i sur $E_\lambda(f_{i_0})$. Alors, $f_{i,\lambda}$ est toujours autoadjoint (pour la restriction du produit scalaire) et $f_{i,\lambda} f_{j,\lambda} = f_{j,\lambda} f_{i,\lambda}$ pour tout (i, j).
    Par hypothèse de récurrence appliquée à $E_\lambda(f_{i_0})$, il existe une BON B_λ commune de diagonalisation des $f_{i,\lambda}$.
    Alors, la concaténation $B = \cup_\lambda B_\lambda$ est une BON de E formée de vecteurs propres communs à tous les f_i.

Exercice 4.10: Inégalité de Hadamard

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$|det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$
2. Déterminer les cas d'égalité.

Solution Ex. 4.10

1.
   - Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, le déterminant est nul et l'inégalité est vraie.
   - Sinon, $(x_1, \dots, x_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. Considérons $(u_1, \dots, u_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(x_1, \dots, x_n)$, et notons U la matrice dont les colonnes sont les u_i. C'est la matrice de passage d'une base orthonormée $(\mathcal{E})$ à une autre $(\mathcal{U})$. Par conséquent, $|\det(U)| = 1$.

     D'autre part, notons P la matrice de passage de la base $(u_1, \dots, u_n)$ à $(x_1, \dots, x_n)$, c'est à dire la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(u_1, \dots, u_n)$. Puisqu'elle est orthonormée, la coordonée de x_i selon u_j est exactement $\langle x_i, u_j \rangle$. Or, par construction, pour tout i, $vect(u_1, \dots, u_i) = vect(x_1, \dots, x_i)$ donc P est triangulaire supérieure.

     Par ailleurs, les formules de changement de bases donnent :
     $$x_k = Pu_k$$
     Par conséquent, $M = PU$, d'où
     $$\det(M) = \det(P) \times \det(U)$$
     puis
     $$|det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n)| = |\det(M)| = |\det(P)| = \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, u_i \rangle|$$
     Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle x_i, u_i \rangle| \leq \|x_i\|\|u_i\| = \|x_i\|$ d'où
     $$|det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$
2.
   - Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul.
   - Si la famille est libre, on a l'égalité ssi on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout k, ie ssi x_k est colinéaire à u_k. Ceci n'arrive que lorsque la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Exercice 4.11: Matrice de produit scalaire

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit φ un produit scalaire sur E. On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{E}$ la matrice P telle que $P(i,j) = \varphi(i,j)$. C'est à dire la matrice de Gram associée au produit scalaire φ.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que s'équivalent :

(1) M est une matrice de produit scalaire.

(2) Il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^T A$.

(3) M est symétrique réelle, et son spectre est strictement positif.

Solution Ex. 4.11

(1) $\Rightarrow$ (2) Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $M = G_\varphi(e_1, \dots, e_n)$. Soit $\mathcal{B}$ une BON quelconque de E (par exemple l'orthonormalisée de GS pour le produit scalaire φ). Posons $A = Mat(\mathcal{E}, \mathcal{B})$

Alors,
$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_i, b_k) b_k$$
et
$$A(i,j) = \varphi(b_i, e_j).$$

Posons $B = A^T A$. Alors

$$\begin{aligned} B(i,j) &= \sum_{k=1}^{n} A^T(i,k)A(k,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(k,i)A(k,j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \varphi(b_k, e_i)\varphi(b_k, e_j) \\ &= \varphi(\sum_{k=1}^{n} \varphi(e_i, b_k)b_k, e_j) \\ &= \varphi(e_i, e_j) \\ &= M(i,j) \end{aligned}$$

Donc $M = A^T A$, et A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$, c'est donc bien une matrice inversible.

(2) $\Rightarrow$ (1) Posons $\varphi(x, y) = X^T A^T AY$. Alors $\varphi(e_i, e_j) = E_i^T M E_j = M(i,j)$. Vérifions que c'est bien un produit scalaire sur E :

- φ est clairement bilinéaire.
- Symétrie :
$$\varphi(X,Y) = \varphi(X,Y)^T = (XA^T AY)^T = Y^T A^T AX = \varphi(X,Y)$$
- $$\varphi(X,X) = X^T A^T AX = (AX)^T(AX) = \sum (AX)_i^2 \leq 0$$
  et
  $$\varphi(X,X) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$$
  car A est inversible.

(2) $\Rightarrow$ (3) Si $M = A^T A$ alors M est symétrique réelle, donc diagonalisable et son spectre est réel d'après le théorème spectral. Soit $\lambda \in Sp(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Alors

- D'une part $X^T MX = \lambda X^T X$ est du signe de λ
- Et d'autre part $X^T MX = (AX)^T(AX)$ est strictement positif.

On en déduit que $\lambda > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Réciproquement, si M est une matrice SDP, soit U orthogonale et $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telle que $M = U^T DU$. Les λ_i sont tous strictement positifs. Notons $\Delta := Diag(\sqrt(\lambda_1), \ldots, \sqrt(\lambda_n))$. Alors Δ est diagonale, inversible et $\Delta^T \Delta = \Delta^2 = D$. D'où

$$M = U^T \Delta^T \Delta U = (\Delta U)^T(\Delta U)$$

et ΔU est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

Chapitre 5

Calcul Différentiel

Exercice 5.1: Quelques calculs de différentielles (Mise en bouche)

1. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est une application affine lorsqu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f - u$ soit linéaire. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.
2. Soit A une matrice symétrique réelle. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(X) = X^T AX$. Montrer que f est différentiable, et calculer sa différentielle en tout point. Quel est son gradient ?

Solution Ex. 5.1

1. Posons $g(x) := f(x) - u$. Par hypothèse, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Alors pour tout (a, h),

$$f(a+h) = g(a+h) + u = g(a) + g(h) + u = f(a) + g(h).$$

   g est appelé la partie linéaire de f. On en déduit donc que

$$f(a+h) - f(a) = g(h) = g(h) + o(h)$$

   donc f est différentiable en a et $df(a) = g$.
2. $f(X+H) = (X+H)^T A(X+H) = X^T AX + H^T AX + X^T AH + H^T AH$
   Comme A est symétrique, $X^T AH = X^T A^T H = (AX)^T H = \langle AX, H\rangle$ et puisque c'est un réel, il est aussi égal à sa transposée. Donc $X^T AH = H^T AX$. Par conséquent,

$$f(X+H) = f(X) + 2\langle AX, H\rangle + \langle H, AH\rangle$$

   - $H \mapsto 2\langle AX, H\rangle$ est linéaire.
   - Par Cauchy-Schwarz, $|\langle H, AH\rangle| \leq \|H\|\|AH\| \leq \|A\|\|H\|^2 = O(\|H\|^2) = o(\|H\|)$

   Donc f est bien différentiable, $df(X)(H) = 2\langle AX, H\rangle$ et $\nabla f(X) = 2AX$.

Exercice 5.2: Fonctions $\alpha-$homogènes.

Solution Ex. 5.2

Chapitre 6

Probabilités

Exercice 6.1: Théorème de Borel-Cantelli

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit (A_n) une suite de parties de $\mathbb{N}$. On pose $B_n := (X \in A_n)$. On définit $\limsup B_n$ comme l'événement « X appartient à une infinité de A_n » et $\liminf B_n$ comme l'événement « X appartient à tous les B_n à partir d'un certain rang ».

1. Montrer que $\limsup B_n$ et $\liminf B_n$ sont bien des événements en les exprimant à l'aide d'union et d'intersections de B_n.
2. On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(B_n)$ converge. Prouver que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 0$.
3. On suppose à présent que les B_n sont des événements mutuellement indépendants, et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = +\infty$.

   Montrer que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 1$.

Solution Ex. 6.1

1. Arriver un nombre infini de fois signifie qu'à tout moment, un événement plus loin est vérifié. En particulier, X appartient à une infinité de B_n ssi pour tout k il existe $n \geq k$ tel que $X \in B_n$. On en déduit que

   $$\limsup B_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} B_n.$$

   De même, X appartient à tous les B_n à partir d'un certain rang ssi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$, $X \in B_n$. On a donc

   $$\liminf B_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} B_n$$

   En particulier, $\limsup B_n$ et $\liminf B_n$ sont bien des événements.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\limsup B_n \subset \bigcup_{n\geq k} B_n$ donc

   $$\mathbb{P}(\limsup B_n) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq k} B_n) \leq \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(B_n)$$

   À droite, on a le reste d'une série divergente, qui tend donc vers 0 quand $k \to \infty$. Le membre de gauche ne dépend pas de k. D'où le résultat.
3. On passe au complémentaire :

   $$\overline{\limsup B_n} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} \overline{B_n} = \liminf \overline{B_n}$$

   Soit $k \in \mathbb{N}$. On fixe $p \geq k$. Alors

   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{p} \overline{B_n}\right) = \prod_{n=k}^{p} (1 - \mathbb{P}(B_n))$$

   On utilise l'inégalité de convexité $1 - x \leq e^{-x}$ donc $1 - \mathbb{P}(B_n) \leq e^{-\mathbb{P}(B_n)}$ d'où

   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{p} \overline{B_n}\right) \leq e^{-\sum_{n=k}^{p} \mathbb{P}(B_n)}$$

À k fixé, on fait tendre p vers $+\infty$. Par hypothèse de divergence de la série, le membre de droite tend vers 0.
D'où

$$\lim_{p\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{p} \overline{B_n}\right) = 0$$

Par ailleurs,

$$\Delta_p := \left(\bigcap_{n=k}^{p} \overline{B_n}\right)$$

définit une suite décroissante d'événements, et donc par le théorème de la limite décroissante,

$$\mathbb{P}(\Delta_p) \to \mathbb{P}(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \Delta_p) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{B_n}\right)$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{B_n}\right) = 0$$

Enfin,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} \overline{B_n}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} \overline{B_n}\right) = 0$$

Exercice 6.2: Exo 98 (CCP)

Alice effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On suppose que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. Alice rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   a) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$.
   b) Prouver que $Z := X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Solution Ex. 6.2

Corrigé de l'Exo 98 de la banque CCP 2020

Exercice 6.3: Une caractérisation de l'espérance

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Solution Ex. 6.3

On décompose l'événement $(X > n) = \bigsqcup_{k>n}(X = k)$. Posons $S := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$. Alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k>n} \mathbb{P}(X = k)$$

C'est une somme à termes positifs, donc par le théorème de Fubini-positif on peut inverser les deux sommes. Pour trouver les bonnes bornes sans se tromper, on utilise l'astuce des fonctions indicatrices :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k>n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{1}_{k>n}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{1}_{k>n}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k)$$

Le terme général est indépendant de n, on a donc

$$S=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X=k)\sum_{n=0}^{k-1}1=\sum_{k\in\mathbb{N}}k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}(X)$$

Exercice 6.4: Inégalité Maximale de Kolmogorov

Soient $Y_1,\ldots,Y_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, centrées, admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour $k\in\{1,\ldots,n\}$ soit

$$U_k:=\sum_{i=1}^{k}Y_i$$

On fixe $\alpha\in\mathbb{R}_*^+$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, soient A_k et B_k les événements

Inegalité maximale Kolmogorov

Solution Ex. 6.4

Exercice 6.5: (Navale) Loi géométrique

Soient X,Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}(X\geq kY)$$

Solution Ex. 6.5

La famille des $(Y=n)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ est un système complet d'événements et donc par le théorème des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X\geq kY)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq kY\mid Y=n)\mathbb{P}(Y=n)$$

Or,

$$\mathbb{P}(X\geq kY\mid Y=n)=\frac{\mathbb{P}(X\geq kY,Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)}=\frac{\mathbb{P}(X\geq kn,Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)}=\mathbb{P}(X\geq kn)$$

où l'on a utilisé l'indépendance de X et Y dans la dernière égalité.

Or, X suit la loi géométrique de paramètre p donc

$$\mathbb{P}(X\geq kn)=\sum_{m=kn}^{+\infty}\mathbb{P}(X=m)=\sum_{m=kn}^{+\infty}p(1-p)^{m-1}=p\sum_{m=kn-1}^{+\infty}(1-p)^m=(1-p)^{kn-1}$$

On en déduit donc

$$\mathbb{P}(X\geq kY)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{kn-1}(1-p)^{n-1}p=\ldots$$

finir ce calcul

Exercice 6.6: Loi du nombre d'orbite d'une permutation aléatoire

On considère le groupe symétrique S_n muni de la probabilité uniforme. Soit X la variable aléatoire qui à une permutation σ associe son nombre d'orbites.

1. Pour $k\in\{1,\ldots,n\}$, on pose $\pi_{n,k}$ le nombre de permutations $\sigma\in S_n$ ayant k orbites. Calculer $\pi_{n+1,k}$ en fonction de $\pi_{n,k-1}$ et $\pi_{n,k}$.

2. On considère le polynôme $P_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)T^k$. Calculer $\frac{P_n'}{P_n}$
3. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

Solution Ex. 6.6

1. Soit $\sigma \in S_{n+1}$ une permutation à k orbites.
   - **Premier cas** $\sigma(n+1) = n+1$. Alors σ se comporte comme une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ à $k-1$ orbites. Il y a $\pi_{n,k-1}$ telles permutations.
   - **Deuxième cas** $\sigma(n+1) = j < n+1$. $n+1$ est dans une orbite de σ. On va construire à partir de σ une permutation σ' de S_n dont on va savoir calculer le nombre d'orbites. Pour cela, on pose $\sigma' = \sigma$ sur les autres orbites. Pour l'orbite de $n+1$, on suit le cycle, et on le court-circuite : Soit p le plus petit entier tel que $\sigma^p(n+1) = n+1$. On pose alors $\sigma'(j) = \sigma(j), \ldots, \sigma'^{p-1}(j) = \sigma'^{p-1}(\sigma(n+1)) = j$. On a alors défini de manière univoque une permutation σ' de S_n, à k orbites.

     Comme il y a n possibilités pour j, il y a $n\pi_{n,k}$ telles permutations.

   D'où,
$$\pi_{n+1,k} = \pi_{n,k-1} + n\pi_{n,k}$$

2.
$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n+1} \pi_{n+1,k} T^k \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \pi_{n,k-1} T^k + n \sum_{k=1}^{n+1} \pi_{n,k} T^k \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \pi_{n,k} T^{k+1} + \frac{n}{n+1} P_n \text{ avec } \pi_{n,0} = \pi_{n,n+1} = 0 \\
&= \frac{1}{(n+1)!} T \sum_{k=1}^{n} \pi_{n,k} T^k + \frac{n}{n+1} P_n \\
&= \frac{n+T}{(n+1)} P_n
\end{aligned}$$

   d'où
$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{n-1+T}{n} P_{n-1} \\
&= \frac{(n-1+T)(n-2+T)}{n(n-1)} P_{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{(n-1+T)(n-2+T)\cdots(1+T)T}{n!} P_1 \\
&= \frac{T(T+1)\cdots(T+n-1)}{n!}
\end{aligned}$$

   d'où la dérivée logarithmique
$$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{T+k}.$$

3.
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = P_n'(1) = \frac{P_n'(1)}{P_n(1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

   ie
$$\mathbb{E}(X) = H_n$$

Exercice 6.7: Loi zeta

On note (p_n) la suite strictement croissante des nombres premiers. On munit $(\mathbb{N}^*)$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Soit $\alpha > 1$.

1. On pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)}\dfrac{1}{n^\alpha}$. Montrer qu'on définit ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{n^\alpha}$
2. Soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers deux à deux premiers entre eux. Montrer que la famille $(n_k\mathbb{N}^*)$ est formée d'événements mutuellement indépendants.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui suit la loi $\mathbb{P}$. On pose $B_n := \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k\mathbb{N}^\star)$. Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \to \dfrac{1}{\zeta(\alpha)}$
4. En déduire que $\dfrac{1}{\zeta(\alpha)} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$
5. On rappelle que $\zeta(\alpha) \to +\infty$ lorsque $\alpha \to 1$ [1]. En déduire que la famille $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Solution Ex. 6.7

1. On définit $\mathbb{P}$ comme une mesure, et elle est bien de poids 1. C'est donc une probabilité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k=1}^\infty \{nk\}$ d'où
$$\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta(\alpha)}\frac{1}{n^\alpha k^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$$
2. Soit $J \subset \mathbb{N}^*$ un sous ensemble **fini**.
$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k\in J} n_k\mathbb{N}^* &\Leftrightarrow \forall k \in J, n_k|x \\ &\Leftrightarrow \prod_{k\in J} n_k|x \text{ puisqu'ils sont premiers entre eux} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\prod_{k\in J} n_k\right)\mathbb{N}^* \end{aligned}$$
d'où
$$\bigcap_{k\in J}(n_k\mathbb{N}^*) = \left(\prod_{k\in J} n_k\right)\mathbb{N}^*$$
et
$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\in J}(n_k\mathbb{N}^*)) = \mathbb{P}\left(\left(\prod_{k\in J} n_k\right)\mathbb{N}^*\right) = \prod_{k\in J}\frac{1}{n_k^\alpha} = \prod_{k\in J}\mathbb{P}\left(n_k\mathbb{N}^*\right)$$
3. La suite (B_n) est une suite décroissante d'événements, donc
$$\mathbb{P}(B_n) \to \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right)$$
Or, $X \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$ ssi X n'est divisible par aucun nombre premier ssi $X = 1$. On en déduit que
$$\mathbb{P}(B_n) \to \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

---

1. La série harmonique diverge, donc pour tout A on peut trouver n tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > A$. Par continuité de la fonction $s \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$ il existe s_0 tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} > A$ pour $s \in]1, s_0[$. Par monotonie, on a alors $\zeta(s) > A$ pour $s \in]1, s_0[$

4. Posons $A_k := (X \in p_k\mathbb{N}^*)$. D'après la question 2, les événements (A_k) sont mutuellement indépendants. Donc leurs complémentaires aussi et par conséquent

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

De la question précédente, on déduit finalement que

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

5. On passe au logarithme (par un argument de continuité, on peut le faire directement dans le produit infini, mais pour éviter les ennuis on le fait dans le produit fini) :

$$-\log\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)\right) = -\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) = \log(\zeta(\alpha))$$

Or, $\alpha > 1$ donc

$$-\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq -\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leq -\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

On en déduit que

$$\zeta(\alpha) \leq -\sum_{k=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

pour tout $\alpha > 1$, donc en faisant tendre α vers 1^+ on en déduit la divergence de la série de terme général $-\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$. Or, $-\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$ donc par un théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{p_k}$ est aussi divergente. Par conséquent, la famille n'est pas sommable.

Exercice 6.8: Matrice de Covariance

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ la matrice

$$\Sigma = (Cov(X_i, X_j))$$

1. Montrer que Σ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles positives.
2. Quand sont-elles toutes strictement positives ?

Solution Ex. 6.8

1. Σ est une matrice symétrique réelle. Soit $C := (a_1, \dots, a_n)^T$ un vecteur réel. Alors :

$$C^T \Sigma C = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right) = Var(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) \leq 0$$

Donc $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectal, Σ est donc bien diagonalisable, et ses valeurs propres sont positives.

2. Soit C un vecteur propre de Σ associé à une valeur propre $\lambda > 0$. On pose $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ Alors $C^T \Sigma C = Var(C^T X) = \lambda \|C\|^2$ donc $\lambda \neq 0$ ssi $Var(C^T X) > 0$, ssi $C^T X$ n'est pas une variable aléatoire presque sûrement constante.
On en déduit que Σ est définie positive ssi il n'existe aucune relation affine presque sûre entre les composantes de X.

Exercice 6.9: Probabilités sur le groupe symétrique

Soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n.

1. Soit A une partie de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal $k \in \{0, \dots, n\}$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(\sigma_n(A) = A)$.
   b) Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ soit $n_k(\sigma)$ le nombre de parties de cardinal k stables par sigma. Soit N_n^k la variable aléatoire $n_k(\sigma_n)$. Calculer $\mathbb{E}(N_n^k)$
   c) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de parties de $\{1, \dots, n\}$ stables par σ_n. Déterminer l'espérance de X.
2. Pour $m \in \{1, \dots, n\}$ soit A_m^n l'événement « σ_n est un cycle de longueur m ».
   a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq m$ calculer $\mathbb{P}(A_m^n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) Soit $l \in \mathbb{N}$ fixé. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(A_{m-l}^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^n A_m^n\right)$.

Solution Ex. 6.9

1. a) On note $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Une permutation $\sigma \in S_n$ laisse A stable ssi σ réalise une permutation de A et une permutation de $\overline{A}$. Il y a donc $k!(n-k)!$ telles permutations et on en déduit que

$$\mathbb{P}(\sigma_n(A) = A) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

   b) Soit $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments. Alors

$$N_n^k = \sum_{A \in \mathcal{P}_{n,k}} \mathbb{1}_{\sigma_n(A)=A}$$

   d'où par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N_n^k) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{n,k}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\sigma_n(A)=A}) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{n,k}} \mathbb{P}(\sigma_n(A) = A)$$

   On en déduit finalement que

$$\mathbb{E}(N_n^k) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{n,k}} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1$$

   c)

$$X = \sum_{k=0}^{n} N_n^k$$

   d'où

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(N_n^k) = n + 1$$

2. a) un $m-$cycle est donné par le choix de son support qui est un ensemble de cardinal m. Il y a $\binom{n}{m}$ choix possibles pour le support. Pour chaque choix de support, il y a $m!$ permutations possibles. Or, deux permutations circulaires du support donnent la même permutation. Il y a donc $\frac{m!}{m}\binom{n}{m} = (m-1)!\binom{n}{m}$
   On en déduit que

$$\mathbb{P}(A_m^n) = \frac{(m-1)!\binom{n}{m}}{n!} = \frac{(m-1)!\dfrac{n!}{m!(n-m)!}}{n!} = \frac{1}{m(n-m)!}$$

   On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

   D'où

$$\mathbb{P}(A_m^n) \sim \frac{e^{n-m}}{m\sqrt{2\pi(n-m)}(n-m)^{n-m}}$$

   Par ailleurs,

$$\sqrt{2\pi(n-m)} \sim \sqrt{2\pi n}$$

et

$$(n-m)^{n-m} = (n-m)^n(n-m)^{-m} = n^n \underbrace{\left(1-\frac{m}{n}\right)^n}_{\to e^{-m}} n^{-m} \underbrace{\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-m}}_{\to 1}$$

d'où

$$(n-m)! \sim n^n e^{-m} n^{-m}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(A_m^n) \sim \frac{e^{n-m}}{m\sqrt{2\pi n} n^n e^{-m} n^{-m}} \sim \frac{e^n n^{m-1/2}}{m\sqrt{2\pi} n^n}$$

b) D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(A_{n-l}^n) = \frac{1}{(n-l)l!} \sim \frac{1}{l!n}$$

c)

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{m=1}^n A_m^n\right) = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(A_m^n) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m(n-m)!} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(n-m)m!}$$

Posons

$$S(n) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-m)m!} \mathbb{1}_{m \leq n-1}$$

Alors

$$\begin{aligned} nS(n) - S(n-1) &= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{(n-m)m!} - \frac{1}{(n-m)(m-1)!}\right) \mathbb{1}_{m \leq n-1} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \mathbb{1}_{m \leq n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \to e \end{aligned}$$

Or, $S(n-1) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(n)$ où

$$f_m(n) = \frac{1}{(n-m)(m-1)!} \mathbb{1}_{m \leq n-1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $|f_m(n)| \leq \dfrac{1}{(m-1)!}$ donc $\|f_m\|_\infty \leq \dfrac{1}{(m-1)!}$.
Par suite, $\sum f_m$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{N}^*$. De plus, à m fixé, $f_m(n) \to 0$ donc par le théorème de la double limite pour les séries de fonctions,

$$S(n-1) \to \sum_{m=1}^{+\infty} 0 = 0$$

Finalement, $nS(n) \to e$ et donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^n A_m^n\right) \sim \frac{e}{n}$$

Exercice 6.10: Somme aléatoire de variables aléatoires

1. Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On pose $S := \sum_{k=1}^p X_k$. Calculer $G_S(z)$ la fonction génératrice de S.
2. Application : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
   Soit N une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la famille $(N, X_1, X_2, \ldots)$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Posons $S := \sum_{k=1}^N X_k$.
3. Montrer que S est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

4. Calculer $G_S(z)$ la fonction génératrice de S.
5. On suppose désormais que les X_i sont toutes de même loi, d'espérance finie, et que N est aussi d'espérance finie. Montrer que S est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(S)$.

Solution Ex. 6.10

1. On fait le calcul, on trouve que la la fonction génératrice de la somme est le produit des fonctions génératrices.

2. On rappelle que la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ est $G(z) = e^{\lambda(z-1)}$. Alors
$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)}e^{\mu(z-1)} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)} = G_Z(z)$$
où $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3. Soit $a \in \mathbb{N}$. Alors,
$$(S = a) = \cup_{n\geq 1}(N = n, \sum_{k=1}^{n} X_k = a)$$
Or, N et les X_k sont des variables aléatoires, donc $(N = n)$ et $(\sum_{k=1}^{n} X_k = a)$ sont des événements. On en déduit que $(S = a)$ est un événement, comme union d'intersections d'événements.
4. $$\mathbb{P}(S = a) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(N = n, \sum_{k=1}^{n} X_k = a\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = a\right)$$
en utilisant l'indépendance dans la dernière égalité. On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = a) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n) \sum_{i_1+\cdots+i_n=a} \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)\\ &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n) \sum_{i_1+\cdots+i_n=a} \mathbb{P}(X_1 = i_1) \ldots \mathbb{P}(X_n = i_n)\end{aligned}$$
en utilisant encore l'indépendance mutuelle.
On en déduit finalement que
$$G_S(z) = \sum_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S = a)z^a = \sum_{a\in\mathbb{N}} \sum_{n\geq 1} \sum_{i_1+\cdots+i_n=a} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(X_1 = i_1) \ldots \mathbb{P}(X_n = i_n)z^a$$
5. Dans le cas particulier où toutes les X_i sont de même loi, on peut simplifier l'expression précédente. Soit X une variable aléatoire de même loi que les X_i :
$$G_S(z) = \sum_{a\in\mathbb{N}} \sum_{n\geq 1} \sum_{i_1+\cdots+i_n=a} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(X = i_1) \ldots \mathbb{P}(X = i_n)z^{i_1+\cdots+i_n}$$
On utilise encore l'indicatrice :
$$\begin{aligned}G_S(z) &= \sum_{a\in\mathbb{N}} \sum_{n\geq 1} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(X = i_1)z^{i_1} \ldots \mathbb{P}(X = i_n)z^{i_n}\mathbb{1}_{i_1+\cdots+i_n=a}\\ &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n) \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} \mathbb{P}(X = i_1)z^{i_1} \ldots \mathbb{P}(X = i_n)z^{i_n}\\ &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N = n)(G_X(z))^n\end{aligned}$$
Pour écrire cela, il faut encore vérifier que c'est bien défini. Or, si $|z| \leq 1$, on a bien $|G_X(z)| \leq 1$ et donc la composition est licite sur le disque unité :
$$G_S = G_N \circ G_X$$
Finalement, $\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_X(1) \times G'_N(G_X(1)) = \mathbb{E}(X) \times G'_N(1) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$ et donc S admet bien une espérance finie.

Exercice 6.11: Une inégalité de concentration

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher. On pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que $ch(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2}$
2. Soit $\lambda, \alpha > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leq e^{-\lambda n \alpha}\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$$
3. En déduire que pour $\alpha > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leq e^{-n\alpha^2/2}$$

Solution Ex. 6.11

1. On développe en série entière :
$$ch(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$$
et
$$e^{\lambda^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!}$$
Il suffit de montrer que pour tout entier naturel n on a $(2n)! \geq 2^n n!$. Pour $n = 0$ c'est évident, et pour $n \geq 1$, $\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{2} \cdots \frac{2n}{2} \geq 1$ ce qui permet de conclure.
2. Soit $\lambda > 0$.
$$\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) = (S_n > n\alpha) = \left(e^{\lambda S_n} > e^{\lambda n \alpha}\right)$$
puisque $t \mapsto e^{\lambda t}$ est une application strictement croissante.
On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y = e^{\lambda S_n}$:
$$\mathbb{P}\left(e^{S_n} > e^{n\alpha}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda n \alpha}}$$
3. Puisque les variables X_i sont mutuellement indépendantes, il en va de même pour les $e^{\lambda X_i}$ et par conséquent
$$\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{\lambda X_i}) = \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^n = ch(\lambda)^n$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leq e^{-\lambda n \alpha} ch(\lambda)^n \leq e^{-\lambda n \alpha} e^{n\lambda^2/2}$$
Puisque le membre de gauche ne dépend pas de $\lambda > 0$, on peut obtimiser en λ, la valeur optimale est atteinte pour $\lambda = \alpha$ (calcul de dérivées etc). On en déduit donc que
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \alpha\right) \leq e^{-n\alpha^2} e^{n\alpha^2/2} = e^{-n\alpha^2/2}$$

Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

Exercice 7.1: Critère de Cauchy uniforme et critère d'Abel

Soit E un espace vectoriel normé. Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que (u_n) est de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall p, q > N \, |u_p - u_q| < \varepsilon$$

1. Soit (u_n) une suite de E, convergente. Montrer que (u_n) est de Cauchy.
   Si la réciproque est vraie, ie toute suite de Cauchy de E est convergente dans E, on dit que E est un espace complet.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy de E. Montrer que si elle admet au moins une valeur d'adhérence, alors elle converge.
3. a) Soit (u_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est bornée.
   b) En déduire que $\mathbb{R}$ est complet.
   À présent, on note $E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $\|\dot{\|}_\infty$ la norme uniforme. On dit que la suite de fonctions (f_n) est uniformément de Cauchy sur $I = [0,1]$ lorsque :
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall p, q > N \, \forall x \in I \, |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$$
4. Soit (f_n) une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur I si et seulement si (f_n) est uniformément de Cauchy sur I.
   On appelle ce résultat le critère de Cauchy uniforme.
5. En déduire que E est complet.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I. On dit que la série $(\sum f_n)$ est uniformément de Cauchy sur I lorsque
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall \mathbb{N} \leq p < q \, \forall x \in I \, |f_p(x) + f_{p+1}(x) + \cdots + f_q(x)| < \varepsilon$$
6. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge uniformément sur I ssi elle est uniformément de Cauchy.
7. Prouver le critère d'Abel uniforme :
   Soient (a_n) et (v_n) deux suites de fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $f_n(x) := a_n(x)v_n(x)$. On suppose que
   1. (a_n) est une suite décroissante de fonctions positives sur I, ie $\forall x \in I, a_n(x) \leq a_{n+1}(x)$, et qu'elle converge uniformément vers 0.
   2. (v_n) est une suite de fonctions vérifiant : $\exists A > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \, \forall x \in I \, |v_0(x) + \cdots + v_n(x)| < A$

   Alors $(\sum f_n)$ converge uniformément sur I.
8. Montre que la suite de fonctions de ton exo vérifie le critère d'Abel uniforme.
   Bonus :
9. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que E est complet.

10. Soit E un $\mathbb{R}-$evn de dimension quelconque. Montrer que E est complet si et seulement si toute série de E normalement convergente est convergente.
11. Méditer, prendre du recul, et en pratique si jamais t'as besoin d'utiliser les suites de Cauchy en exo, tu peux utiliser le critère ci-dessus, qui lui est au programme pour les espaces vectoriels de dimension finie, et pour l'espace des fonctions continues sur un compact ;).

Solution Ex. 7.1

Chapitre 8

Arithmétique et théorie des nombres

Exercice 8.1: (ENS) Nombre de solutions d'une équation polynomiale

Soit p un nombre premier, $p \geq 3$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et posons

$$F : \left\{ \begin{array}{cl} \mathbb{F}_p^n & \to \mathbb{F}_p \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_i} \end{array} \right.$$

Soit N le nombre de solutions de l'équation $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Montrer que

$$N = p^{n-1} + \frac{1}{p} \left(\sum_{x \in \mathbb{F}_p^\star} \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{y \in \mathbb{F}_p} \zeta^{a_i x y^{r_i}} \right) \right) \right), \text{ où } \zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$$

Solution Ex. 8.1

Notons $E := \{x \in (\mathbb{F}_p)^n \mid F(x) = 0\}$ l'ensemble des solutions de l'équations. On a alors $N = \#E$ par définition. En partitionnant par les singletons, on a

$$N = \sum_{x \in (\mathbb{F}_p)^n} \mathbb{1}_{F(x)=0} \tag{8.1}$$

Pour $x \in \mathbb{F}_p$, posons $\Psi(x) := \zeta^x = e^{\frac{2i\pi x}{p}}$. Ψ ne dépend pas du représentant choisi pour la classe de x donc Ψ est bien définie.

On a alors le lemme suivant :

Lemme. *Soit $a \in F_p$. Alors*

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \Psi(ax) = p \times \mathbb{1}_{a=0}. \tag{8.2}$$

Démonstration.

- Si $a = 0$ alors $\Psi(ax) = 1$ quel que soit $x \in \mathbb{F}_p$ et donc $\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \Psi(ax) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} 1 = p$.
- Sinon, a est inversible, et donc l'application $x \mapsto ax$ est une permutation de $\mathbb{F}_p$. Par conséquent,

  $$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \Psi(ax) = \sum_{u \in \mathbb{F}_p} \Psi(u) = 0$$

  puisqu'il s'agit de la somme des p racines p-ièmes de l'unité.

Finalement,

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \Psi(ax) = \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{Si } a = 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{array} \right. = p \times \mathbb{1}_{a=0}$$

□

D'après 8.2 et le lemme précédent, on a donc

$$p \times N = \sum_{x \in (\mathbb{F}_p)^n} p \times \mathbb{1}_{F(x)=0} = \sum_{x \in (F_p)^n} \sum_{y \in \mathbb{F}_p} \Psi(F(x)y). \tag{8.3}$$

On décompose selon la valeur de y :

- Si $y = 0$ alors $\sum_{x \in (\mathbb{F}_p)^n} \Psi(F(x)y) = \sum_{x \in (\mathbb{F}_p)^n} 1 = p^n$
- Sinon,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in (\mathbb{F}_p)^n} \Psi(F(x)y) &= \sum_{x \in (\mathbb{F}_p)^n} \zeta^{y \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_i}} \\ &= \sum_{x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_p} \left(\zeta^{y a_1 x_1^{r_1}}\right) \ldots \left(\zeta^{y a_n x_n^{r_n}}\right) \\ &= \left(\sum_{x_1 \mathbb{F}_p} \zeta^{y a_1 x_1^{r_1}}\right) \ldots \left(\sum_{x_n \in \mathbb{F}_p} \zeta^{y a_n x_n^{r_n}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta^{y a_i x^{r_i}}\right)\end{aligned}$$

où l'on a pu factoriser puisque chaque facteur ne dépendait que d'un seul x_i.

Finalement,

$$p \times N = p^n + \sum_{y \in \mathbb{F}_p^\star} \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta^{y a_i x^{r_i}}\right)\right)$$

ou encore

$$N = p^{n-1} + \frac{1}{p} \left(\sum_{y \in \mathbb{F}_p^\star} \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta^{y a_i x^{r_i}}\right)\right)\right).$$