École polytechnique — Majeure informatique
Promotion 2008

Cours *conception et analyse d'algorithmes*
TD 5 – Problèmes $\mathcal{NP}$-complets et algorithmes d'approximation
13 octobre 2010

1. $\mathcal{NP}$-complétude de HITTING-SET

Etant donné un ensemble S de cardinal n et une collection C de sous-ensembles de S, et étant donné un entier k, le problème est de décider s'il existe un sous-ensemble S' de S de taille au plus k et qui contienne au moins un élément de chaque ensemble de C. Montrer, par réduction à partir de RECOUVREMENT-PAR-SOMMETS, que ce problème est $\mathcal{NP}$-complet.

2. $\mathcal{NP}$-complétude de MIN-COUPE-CIRCUIT

Soit $G = (X, A)$, un graphe orienté où X est l'ensemble des sommets et $A \subset X \times X$ celui des arcs (orientés). On rappelle qu'un circuit est une suite d'arcs de la forme :

$$(y_1, y_2), (y_2, y_3), \ldots, (y_{k-1}, y_k), (y_k, y_1)$$

Un *coupe-circuit* est un sous-ensemble C de A tel que le graphe $(X, A \backslash C)$, obtenu en supprimant les arcs de C est sans circuit.

On examine ici le problème MIN-COUPE-CIRCUIT de la détermination d'un coupe-circuit contenant un nombre d'arcs minimum.

i. Donner une version décision du problème et montrer que celle-ci est dans la classe $\mathcal{NP}$.

A partir d'un graphe non-orienté $G = (X, E)$ on construit un graphe orienté $G' = (X', A)$ de la façon suivante :

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, G' a $2n$ sommets :

$$X' = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\}$$

L'ensemble des arcs A est composé de deux sous-ensembles A' et A'' :

- $A' = \{1 \leq i \leq n | (x_i^0, x_i^1)\}$
- A partir de toute arête $\{x, y\}$ de E on construit 2 arcs (x^1, y^0) et (y^1, x^0) dans A''.

Ainsi le nombre d'arcs de G' est $2m + n$ où m est le nombre d'arêtes de G.

ii. Montrer que si C est un coupe-circuit de G', l'ensemble obtenu à partir de C en remplaçant tous les arcs (x_i^1, x_j^0) par (x_i^0, x_i^1) est encore un coupe-circuit. En déduire que l'on peut obtenir un coupe-circuit de G' ayant un nombre d'arcs inférieur ou égal à celui de C et ne contenant que des arcs de A'.

iii. Montrer que la version décision de MIN-COUPE-CIRCUIT est un problème $\mathcal{NP}$-complet ; vous utiliserez la construction proposée.

3. Sous-ensemble acyclique maximal.

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, avec $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. On souhaite choisir un sous-ensemble A des arcs, de cardinal maximum, tel que le sous-graphe (V, A) soit acyclique (c'est-à-dire qu'il ne contienne pas de circuit).

Présenter brièvement un algorithme qui, en temps polynomial, trouve un ensemble d'arcs acyclique de cardinal au moins OPT/2, où OPT est le cardinal d'un ensemble acyclique optimal. Le démontrer.

Indication : on pourra construire une partition de E en deux ensembles acycliques $E = E_1 \cup E_2$

4. $\mathcal{NP}$-complétude de RECOUVREMENT EXACT

> **Donnée :** Une matrice A de taille $m \times n$ à coefficients dans $\{0, 1\}$.
>
> **Problème :** Décider s'il existe un vecteur x à coeficients dans $\{0, 1\}$ tel que $Ax = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est le vecteur avec m coordonnées égales à 1.

i. Considérons la matrice B de taille $((n-k)+n) \times (n \cdot (n-k)+n)$ suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & \dots & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 1 \dots 1 & 0 \dots 0 \\ \boxed{\mathrm{Id}_n} & \boxed{\mathrm{Id}_n} & \dots & \boxed{\mathrm{Id}_n} & \boxed{\mathrm{Id}_n} \end{pmatrix}$$

où Id_n désigne une sous-matrice carrée identité de taille $n \times n$: autrement dit, les n dernières lignes de B sont constituées de $n-k+1$ blocs Id_n, tandis que pour $i = 1, \dots, n-k$, la $i$ème ligne de B contient un groupe de n entrées consécutives non nulles alignées avec le $i$ème bloc identité.

Montrer qu'un vecteur $x \in \{0, 1\}^{n(n-k+1)}$ tel que $Bx = \mathbf{1}$ possède exactement k entrées non nulles parmi ses n dernières entrées et que n'importe quelle configuration de k entrées parmi n peut être ainsi réalisée par un tel vecteur.

ii. montrer que le problème RECOUVREMENT EXACT est np-complet.
indication : utiliser le problème STABLE dans sa variante où on veut savoir s'il existe un stable de taille *exactement* k dans un graphe G.

5. Voyageur de commerce avec inégalité triangulaire

Ce problème consiste en la donnée d'un graphe complet non-orienté à n sommets numérotés de 1 à n (et donc $n(n-1)/2$ arêtes) ; à chaque arête est associée une distance. Le voyageur de commerce part du sommet 1 du graphe, et passe une fois et une seule par chacun des autres sommets du graphe avant de finalement revenir en 1, et ce en parcourant la distance minimale. La version “décision" de ce problème est un problème $\mathcal{NP}$-complet.

On suppose que la distance vérifie l'inégalité triangulaire : pour tous sommets u, v et w, $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$. On considère l'algorithme suivant :

- calculer un arbre couvrant minimal T enraciné en 1.
- renvoyer le tour H obtenu en parcourant les sommets dans l'ordre préfixe associé à l'arbre T.

i. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

ii. Soit H^* une tournée optimale. Montrer que le poids $c(T)$ de T est inférieur ou égal à la longueur totale de H^*.

iii. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que la longueur $c(H)$ de H est inférieure ou égale à $2c(T)$. En déduire un algorithme d'approximation à un facteur 2.

iv. Montrer qu'il existe des cas où l'algorithme construit un tour de coût supérieur à $(2-\epsilon)c(H^*)$, et donc que l'analyse ne peut pas être améliorée.