Corrigé du TD 3

29 septembre 2010

1. Plan d'évacuation.

a. Il suffit d'ajouter au graphe G une source, à laquelle on relie toutes les places par des arêtes de capacité 1, et un puits, auquel on relie toutes les issues, de capacité 1. On attribue également à chaque arête du graphe une capacité de 1. Il faut cependant ajouter, pour éviter que deux sommets aient un sommet commun, une contrainte au sommet disant que le flot entrant est au plus 1.

L'application d'un des algorithmes de flot vus dans le cours fournit un flot maximal à valeurs dans $\{0,1\}$. À chaque arête traversée par un flot de capacité 1 on associe une arête du plan d'évacuation. La contrainte sur les sommets assure que les différents chemins sont sommet-disjoints : au plus une arête entrant dans un sommet peut être saturée, puisque le flot est à valeurs dans $\{0,1\}$. Enfin, la conservation du flot en chaque sommet montre que chaque arête appartient à un sommet allant d'une place à une issue. Tout flot à valeurs $\{0,1\}$ traversant le graphe fournit donc un plan d'évacuation.

Inversement, partant d'un plan d'évacuation, on sature toutes les arêtes des chemins du plan d'évacuation, ainsi que l'arête allant de la source à la place commençant le chemin et l'arête allant de l'issue au puits. Chaque chemin mène d'une place à une issue ; la conservation du flot entre la source et le puits montre qu'on construit bien un chemin allant d'une place à une issue, et les contraintes sur les sommets sont assurées par le fait que les chemins sont sommet-disjoints.

On a donc bien réduit la recherche du plan d'évacuation à la recherche d'un flot entier dans le graphe construit.

b. I On construit un nouveau graphe en remplaçant tout sommet distinct de la source et du puits par deux sommets reliés par un arc de capacité 1, l'un où rentrent les arcs entrants, l'autre dont sortent les arcs sortants. Cette construction limite automatiquement le flot entrant en le sommet à une valeur de 1.

c. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson au graphe ainsi construit. Le nombre d'arêtes de ce graphe est $O(m+n)$, le nombre de sommets $O(n)$. La complexité est $O((m+n)\Phi)$, où Φ est la valeur du flot maximal, ici $O(n)$ (puisqu'une unité de flot au plus va de chaque arête vers chaque place). La complexité totale est donc $O((m+n)n)$. À noter qu'Edmonds-Karp donnerait $O(n(m+n)^2)$, qui est moins bon dans ce cas.

2. Commentaires sportifs

1. Même s'ils gagnent toutes leurs parties, les verts n'auront que 6 points à la fin, ce qui est moins que toutes les autres équipes.

2. On considère le graphe G ayant pour ensemble de sommets :

$$X = \{s,t\} \cup \{i \mid 1 \leq i \leq n,\, i \neq k\} \cup \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\, i \neq k,\, j \neq k\},$$

et pour ensemble d'arêtes les arêtes (s,i) de capacité $p_k + a_k - p_1$, les arêtes $(i,(i,j))$ et $(j,(i,j))$ chacune de capacité $a_{i,j}$ et les arêtes $((i,j),t)$ de capacité $(a_{i,j})$.
Si l'équipe k peut encore gagner alors le flot maximal dans ce graphe sera égal à $\sum_{i<j,i\neq k,j\neq k} a_{i,j}$.
3. Si les blancs gagnent toutes leurs parties, ils auront 10 points. Mais le gagnant du match entre les bleus et les rouges aura au moins 11 points.
4. Les points obtenus au début du match par les équipes de R sont égaux à $\sum_{i\in R} p_i$. Ensuite si l'on ne considère que les parties entre deux équipes de R, on ajoute $\frac{1}{2}\sum_{i,j\in R} a_{i,j}$.
5. Si $m(R)/|R| > p_k + a_k$, cela signifie qu'il y a au moins une des équipes de R qui aura marqué plus de points que $p_k + a_k$ et que donc k ne peut pas gagner le championnat.
6. Si l'équipe k ne peut plus gagner le championnat cela signifie que l'algorithme de flot décrit à la question 2 permet d'obtenir un flot maximal égal à $\frac{1}{2}\sum_{i,j\neq k} a_{i,j}$. Le théorème max-flow/min-cut nous garantit alors l'existence d'une coupe (X,Y) de capacité égale à cette valeur. Soit X_1 (resp. Y_1) l'ensemble des sommets i de G (décrit à la question 2) appartenant à X (resp. Y) et soient X_2 et Y_2 les sommets (i,j) de G correspondants.
On peut remarquer que si $i \in X_1$ alors la capacité $C(X,Y)$ de la coupe sera plus grande que celle de la coupe $(X \cup \{(i,j), j \neq k\}, Y)$ (faire un dessin). Donc on peut supposer que la coupe minimale considérée est telle que si $i \in X$ ou $j \in X$ alors $(i,j) \in X$.
La capacité $C(X,Y)$ d'une telle coupe est alors égale à :

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= \sum_{i\in Y_1}(p_k + a_k - p_i) + \sum_{i<j \text{ où } i \text{ ou } j\in X} a_{i,j} \\ &= |Y_1|(p_k + a_k) - \sum_{i\in Y_1} p_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq k} a_{i,j} - \frac{1}{2}\sum_{i,j\in Y_1} a_{i,j}. \end{aligned}$$

Or $C(X,Y) < \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq k} a_{i,j}$ par hypothèse, ce qui entraîne :

$$0 > |Y_1|(p_k + a_k) - \sum_{i\in Y_1} p_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j\in Y_1} a_{i,j}.$$

En prenant $R = Y_1$, on trouve un ensemble satisfaisant.

3. Couplages et ensembles couvrants.

a. C'est une construction classique : on oriente les arêtes de Y vers Z, on leur donne une capacité unitaire, et on ajoute une source, avec une arête de capacité unitaire vers chaque sommet de Y, et un puits, avec une arête de capacité unitaire depuis chaque sommet de Z. À un couplage $C \subset E$ correspond un flot en faisant circuler un flot unitaire de s vers chaque sommet de Y qui est origine d'une arête de C, un flot unitaire dans chaque arête de C, et un flot unitaire de l'extrémité de chaque arête de C vers le puits. Il est facile de voir que ce flot est de capacité $\#C$. Inversement, tout flot entier (et, le graphe étant à capacités entières, il existe un flot maximal entier donné par l'algorithme de Ford-Fulkerson) définit un ensemble d'arêtes saturées dont on vérifie aisément qu'il constitue un couplage. Flot maximal entier et couplage maximal sont donc équivalents.

b. Soit $C = \{s\} \cup Y' \cup Z'$ une coupe de G. La capacité de la coupe C est le nombre d'arêtes sortant de C, i.e. le nombre de sommets de $Y - Y'$ (arêtes $s \to Y - Y'$) plus le nombre d'arêtes de Y' vers un sommet de $Z - Z'$, plus le nombre d'arêtes de Z' vers t. On peut construire un ensemble couvrant en prenant $(Y - Y') \cup Z'$, plus un sous-ensemble des sommets de $Y' \cup Z - Z'$ de sorte qu'il y ait au moins un sommet par arête ; comme un sommet peut servir pour deux arêtes, il suffit d'ajouter un nombre de sommets $\leq [Y', Z - Z']$, et le cardinal de l'ensemble couvrant est donc $\leq \#(Y - Y') + \#Z' + [Y', Z - Z']$, soit exactement la capacité de la coupe.

c. Si $Y_1 \cup Z_1$ est un ensemble couvrant, on peut considérer la coupe constituée de $\{s\} \cup Y - Y_1 \cup Z_1$. Sa capacité est égale à $\#Y_1$ (arêtes de s vers Y), plus le nombre d'arêtes de $Y - Y_1$ vers $Z - Z_1$, plus $\#Z_1$ (arêtes de Z vers t). Par hypothèse (ensemble couvrant), il n'y a pas d'arêtes de $Y - Y_1$ vers $Z - Z_1$; la capacité de la coupe est donc le cardinal de l'ensemble couvrant.

d. Soit C une coupe minimale et E un ensemble couvrant de taille minimale.

De b), on déduit l'existence d'un ensemble couvrant E' de taille inférieure ou égale à la capacité de C. Il s'ensuit que l'ensemble couvrant minimal E est de taille inférieure ou égale à la capacité de C.

Inversement, c. montre qu'il existe une coupe de capacité $\#E$, d'où le fait que la coupe minimale est de taille capacité ou égale à $\#E$. Ces deux remarques montre que le cardinal d'un ensemble couvrant minimal est égal à la capacité d'une coupe minimale. En vertu du théorème min-flow max-cut, c'est aussi le flot maximal du réseau de transport, qui par a. est égal au cardinal du couplage maximal.

e. La question posée revient à considérer le graphe biparti $F \cup H$, où chaque sommet de H a un degré entrant de k, et à montrer que le couplage maximal est de taille n. Comme chaque sommet de H a un degré entrant k et que les arêtes sont toutes entre H et F, il y a kn arêtes dans le graphe.

Soit maintenant E un ensemble couvrant de cardinal c. Chaque sommet ayant un degré k, E couvre au plus ck arêtes ; il s'ensuit que $c \geq n$, et donc que l'ensemble couvrant minimal est de cardinal $\geq n$. Comme le couplage maximal est de cardinal au plus n, le théorème de König montre qu'il existe bien un couplage de taille n, i.e. que tous les hommes peuvent danser.

4. Résistance aux pannes.

Fixons un sommet s du graphe, et pour un sommet $t \neq s$ définissons $R(s,t)$ comme le plus petit nombre d'arêtes à enlever à G pour qu'il ne soit plus possible d'aller de s à t. Le nombre $R(s,t)$ s'évalue par un calcul de flot : on construit un nouveau graphe orienté dans lequel on dédouble chaque arête pour orienter le graphe, que l'on attribue un poids 1 à chaque arête ; s est la source et t le puits. Le nombre $R(s,t)$ vaut alors exactement la coupure minimale (c'est la définition), donc le flot maximal.

Montrons maintenant que la résistance aux pannes $R(G)$ vaut $\min_{t \in G - \{s\}} R(s,t)$. Il est clair, par définition, que comme chaque $R(s,t)$ est associé à un ensemble d'arêtes déconnectant G, on a $R(G) \leq \min_{t \in G - \{s\}} R(s,t)$.

Si A est un ensemble minimal d'arêtes déconnectant G, le graphe résultant de la suppression des arêtes de A a deux composantes connexes, dont l'une contient s ; soit t un sommet de l'autre composante. On a alors $R(s,t) \leq R(G)$, puisque supprimer A sépare s de t. Par suite, $R(G) = \min_{t\in G-\{s\}} R(s,t)$, et on a montré comment déterminer $R(G)$ en n appels à un algorithme de flot, soit un coût total de $O(nm\Phi) = O(n^2m)$, le flot maximal étant manifestement $O(n)$.

5. Car pooling.

On construit un réseau de transport à $n+m+2$ sommets : la source s, le puits t, n sommets correspondant aux personnes et m sommets correspondant aux ensembles S_i. On ajoute des arcs entre la source et les personnes, et entre les ensembles S_i et le puits ; on ajoute enfin des arcs de chaque personne vers les ensembles S_i auxquels elle appartient.

La capacité des arcs est de 1, sauf pour les arcs de la source vers les personnes, de capacité $\lceil\sum_{i:p_j\in S_i} 1/\#S_i\rceil$, et on calcule le flot maximal.

On sait, en considérant la coupe $\{s, p_1, \ldots, p_n, s_1, \ldots s_m\}, \{t\}$, de capacité m, que le flot maximal est au plus de m. Si le flot a la valeur m exactement, l'algorithme de Ford-Fulkerson garantit qu'il est entier, et exactement un arc entrant dans chaque s_i sera saturé, indiquant quelle est la personne qui conduira le jour i. Notons en outre que la répartition sera nécessairement équilibré, puisque chaque personne ne peut conduire au plus que $\lceil\sum_{i:p_j\in S_i} 1/\#S_i\rceil$ jours en tout. Inversement toute répartition équitable provient d'un flot de valeur m.

Il suffit donc de montrer qu'il existe un flot de valeur m pour résoudre le problème ; or le flot fractionnaire qui fait passer sur chaque arc (p_i, s_j) un flot $1/\#S_j$ est un flot de valeur totale m, qui vérifie les contraintes aux sommets ; le flot maximal a donc pour valeur exactement m, et l'algorithme de Ford-Fulkerson nous fournira un flot entier de cette valeur.