

MARC GIUSTI

**Sur les singularités isolées d'intersections  
complètes quasi-homogènes**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 27, n° 3 (1977), p. 163-192.

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1977\\_\\_27\\_3\\_163\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_163_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SUR LES SINGULARITÉS ISOLÉES D'INTERSECTIONS COMPLÈTES QUASI-HOMOGENÈS

par Marc GIUSTI

## 1. Introduction et énoncé des résultats.

Soit  $X = (f^{-1}(0), 0)$  un germe d'intersection complète définie par :

$$f = (f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^p, 0)$$

où chaque  $f^{(i)}$  est un polynôme. On suppose que 0 est une singularité isolée de X.

Pour  $\epsilon$  positif et assez petit, la sphère frontière  $S_\epsilon$  de la boule  $B_\epsilon$  ouverte de centre 0 et de rayon  $\epsilon$  dans  $\mathbf{C}^n$ , est transverse à X. Une telle boule est appelée une boule de Milnor pour X.

Il existe alors un voisinage ouvert V de  $0 \in \mathbf{C}^p$  et une hypersurface  $\Delta(f)$  dans V tels que  $f$  induise sur  $f^{-1}[V - V \cap \Delta(f)] \cap B_\epsilon$  une fibration de base  $V - V \cap \Delta(f)$ .

La fibre est une variété algébrique non singulière  $\mathcal{F}(f)$ , ayant le type d'homotopie d'un bouquet de  $\mu(X, 0)$  sphères réelles de dimension  $n - p$ .

$\mu(X, 0)$  est le nombre de Milnor de X en 0. [5, 7, 8].

DEFINITION 0. — Un polynôme  $g \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  est quasi-homogène de degré  $d \in \mathbf{Q}_+$  et de poids  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{Q}_+^n$  s'il est combinaison linéaire de monômes  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  tels que

$$\sum_{j=1}^n a_j \alpha_j = d$$

DEFINITION 1. — Une application

$$f = (f^{(1)}, \dots, f^{(p)}) : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^p, 0)$$

sera dite quasi-homogène de type  $(d_1, \dots, d_p; a_1, \dots, a_n)$  si chaque composante  $f^{(i)}$  est un polynôme quasi-homogène de degré  $d_i$  et de poids  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Remarque. — Le type est défini par des coordonnées homogènes dans  $\mathbf{Q}_+^{p+n}$ .

THEOREME. — Soit  $X = (f^{-1}(0), 0)$  un germe d'intersection complète quasi-homogène dont 0 est une singularité isolée. Alors la fibre  $\mathfrak{F}(f)$  ne dépend que du type quasi-homogène de  $f$  à difféomorphisme près.

COROLLAIRE 1. — Le nombre de Milnor  $\mu$  ne dépend que du type quasi-homogène. On peut donc le calculer explicitement en fonction des degrés et des poids.

Exemple 1. — Ceci a été fait par Milnor et Orlik [9] dans le cas des singularités d'hypersurfaces quasi-homogènes de type  $(d; a_1, \dots, a_n)$  :

$$\mu = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{a_i} - 1 \right)$$

Exemple 2. — Si  $n = p$

$$\mu = -1 + \frac{d_1 d_2 \dots d_n}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Exemple 3. — Singularité isolée d'intersection complète homogène de codimension 2, de type  $(d_1, d_2; 1, 1, \dots, 1)$

$$\mu = (d-1)^{n-1} [d(n-1) + 1] \quad \text{Si } d_1 = d_2 = d$$

$$\mu = \frac{d_2(d_1-1)^n - d_1(d_2-1)^n}{d_1 - d_2} \quad \text{Si } d_1 \neq d_2$$

*Exemple 4.* — Singularité isolée d'intersection complète homogène de type  $(d, d, \dots, d; 1, \dots, 1)$  avec  $p \neq n$ .

$$\mu = (-1)^{n-p+1} + d^p \left[ \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_n^j C_{n-j-1}^{p-1} d^{n-p-j} \right]$$

Pour établir les deux expressions ci-dessus on calcule  $\mu$  directement grâce à une méthode topologique de Lê [7].

PROPOSITION. — *Le nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète quasi-homogène de type  $(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3)$  (Courbe gauche de  $\mathbf{C}^3$ ) est :*

$$\mu = 1 + \frac{P}{\pi} (S - \sigma)$$

où  $S$  (resp.  $\sigma$ ) est la somme des degrés (resp. des poids) et  $P$  (resp.  $\pi$ ) est le produit des degrés (resp. des poids)

Les exemples ci-dessus et la proposition conduisent à formuler les deux conjectures suivantes :

*Conjecture 1.* — Pour  $n > p$ , la formule donnant  $\mu$  écrite à l'aide de fonctions symétriques des degrés et des poids ne dépend que de  $n - p$ , c'est-à-dire de la dimension de l'intersection complète.

*Conjecture 2.* — Pour le type  $(d_1, d_2, \dots, d_p; a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $n > p$  cette formule est :

$$\begin{aligned} \mu &= M(d_1, d_2, \dots, d_p; a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= (-1)^{n-p+1} + \frac{P}{\pi} \left[ \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \sigma_n^j A_p^{n-p-j} \right] \end{aligned}$$

où  $\sigma_n^0 = 1; \sigma_n^1, \dots, \sigma_n^n = \pi$  sont les fonctions symétriques élémentaires de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , et  $A_p^0 = 1; A_p^k = \sum_{|\alpha|=k} d_1^{\alpha_1} \dots d_p^{\alpha_p}$  pour  $k > 0$

$$P = \prod_{i=1}^p d_i.$$

*Remarque.* — Si le monôme  $x_n$  apparaît dans  $f_p$ , on a  $a_n = d_p = d$ . L'intersection complète aurait alors pu être décrite par une application  $f' : (\mathbf{C}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^{p-1}, 0)$ .

On peut vérifier que

$$\begin{aligned} M(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}, d; a_1, \dots, a_{n-1}, d) \\ = M(d_1, \dots, d_{p-1}; a_1, \dots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

DEFINITION 3. — Une morsification de  $f$  est la donnée de :

- 1) Une petite déformation  $\bar{f}$  de  $f$ .
- 2) Un plongement  $\varphi$  du disque unité  $D \in \mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^p$  tel que  $\bar{f}^{-1} [V \cap \varphi(D)] \cap B_\epsilon$  soit une variété lisse difféomorphe au disque unité de  $\mathbf{C}^{n-p+1}$ .
- 3) Une morsification  $[2, 3, 4, 6, 7', 7'']$  de l'application

$$\bar{f} \Big|_{\bar{f}^{-1} [V \cap \varphi(D)] \cap B_\epsilon} : \bar{f}^{-1} [V \cap \varphi(D)] \cap B_\epsilon \rightarrow \varphi(D) \cap V$$

On peut alors définir une base distinguée du module des cycles évanescents  $H_{n-p}(\mathfrak{F}(f); \mathbf{Z})$  et le diagramme de Dynkin qui y est associé.

Exemple. — Soit  $X = f^{-1}(0)$  l'intersection complète définie par :

$$\begin{aligned} f: (\mathbf{C}^3, 0) &\rightarrow (\mathbf{C}^2, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto (x^2 - y^2, y^2 - z^2) \end{aligned}$$

$X$  est constitué de quatre droites en position générale dans  $\mathbf{C}^3$ , passant par l'origine qui est singularité isolée de  $X$ .

$X$  est un cône : il coupe transversalement toute sphère centrée en 0. Toute boule centrée en  $0 \in \mathbf{C}^3$  est boule de Milnor pour  $X$ . Fixons en une,  $B_\epsilon$ .

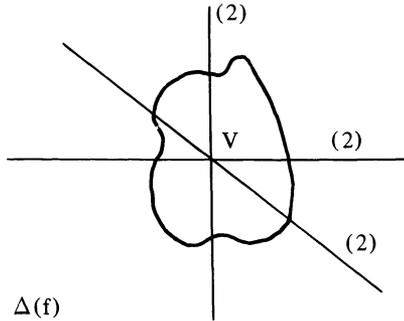
$\Sigma$ , lieu critique de  $f$ , est défini par l'idéal engendré dans  $\mathbf{C}\{x, y, z\}$  par les 2-mineurs de la matrice jacobienne

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2x \end{bmatrix}$$

Il est constitué des 3 droites d'équations  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}$  et  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}$

Le discriminant  $\Delta(f)$  est formé des trois droites suivantes, données par une représentation paramétrique :

$$\left| \begin{array}{l} X = -y^2 \\ Y = y^2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} X = x^2 \\ Y = 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = -z^2 \end{array} \right.$$



La déformation semi-universelle de  $X$  s'écrit : [12, 13]

$$F : \mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^3$$

$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow (x^2 - y^2 + 2\beta y + 2\gamma z, y^2 - z^2 + 2\alpha x, \alpha, \beta, \gamma)$$

Calculons  $\mu(X, 0)$  suivant une méthode topologique due à Lê Dũng Tráng [7]. Soit  $\Delta$  le discriminant de  $F$ , et  $L$  une droite de  $\mathbf{C}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{C}^5$  passant par l'origine telle que  $L \cap \Delta = 0$ , ce qui revient à dire que la trace de  $L$  dans  $V$  ne coupe  $\Delta(f)$  qu'en 0.

Soit  $\gamma'$  la multiplicité d'intersection en 0 de  $\Delta$  et  $L$ . L'hyper-surface  $X_1 \subset \mathbf{C}^3$ , image inverse de  $L$  par  $F$ , d'équation  $f_1 = 0$ , a une singularité isolée en 0.

Lê montre que :  $\mu(X, 0) + \mu(X_1, 0) = \gamma'$ .

Si l'on prend comme droite  $L$  la droite dont la trace dans  $\mathbf{C}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{C}^5$  a pour équation  $X = Y$ , alors  $f_1 = x^2 - 2y^2 + z^2$ ,  $\gamma' = 6$ , d'où  $\mu(X, 0) = 5$ .

Etudions la déformation  $\bar{f}$  de  $f$ :

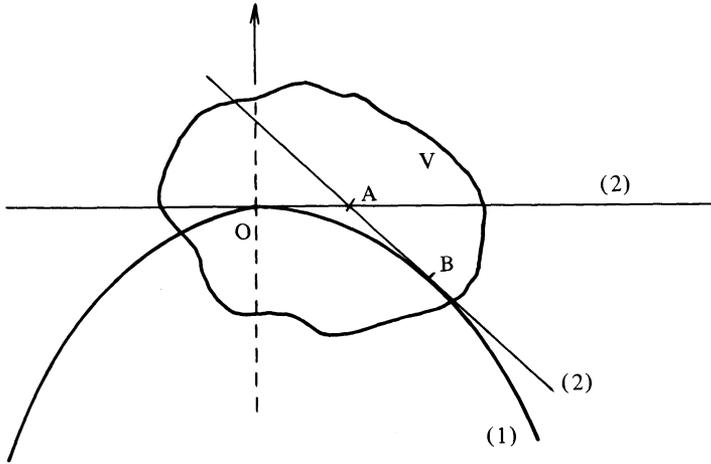
$$\begin{aligned} \bar{f} : \quad \mathbf{C}^3 &\longrightarrow \mathbf{C}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 - y^2 + 2\gamma z, y^2 - z^2) \quad \gamma \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice jacobienne est  $\begin{bmatrix} 2x & -2y & 2\gamma \\ 0 & 2y & -2z \end{bmatrix}$ , d'où le lieu critique  $\bar{\Sigma}$  formé des 3 droites d'équations :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

et le discriminant  $\Delta(\bar{f})$  constitué des 3 courbes :

$$\begin{cases} X = x^2 \\ Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 2\gamma z \\ Y = -z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} X = -y^2 + 2\gamma^2 \\ Y = y^2 - \gamma^2 \end{cases}$$



On choisit dorénavant  $\gamma$  assez petit pour que le triangle curviligne (OAB) soit dans  $V$ .

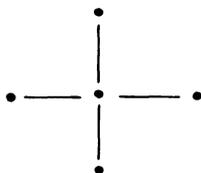
Soit  $D_a$  la droite de  $\mathbf{C}^2$  d'équation  $X = a$ . Alors  $\bar{f}^{-1}[D_a \cap V] \cap B_\epsilon$  est un ouvert de l'hypersurface non singulière  $x^2 - y^2 + 2\gamma z = a$  qui peut être globalement paramétrée par  $x$  et  $y$ .

$\bar{f}|_{\bar{f}^{-1}(D_a \cap V) \cap B_\epsilon}$  peut s'écrire dans des cartes convenables :

$$(x, y) \mapsto y^2 - \frac{1}{4\gamma^2} (a - x^2 + y^2)^2 = g(x, y)$$

Si  $a = \gamma^2$ ,  $g$  admet 5 points critiques distincts et non dégénérés. C'est une morsification de  $f$ .

On verra plus tard que le diagramme de Dynkin associé est l'arbre  $\tilde{D}_4$ .



**COROLLAIRE 2 DU THEOREME.** — Soit  $X = f^{-1}(0)$  une intersection complète homogène dont 0 est une singularité isolée. Alors  $f$  admet une morsification.

*Question.* — Toute application définissant un germe de singularité isolée d'intersection complète admet-elle une morsification ?

Pendant la préparation de cet article des résultats de G.M. Greuel et H. Hamm ont apporté des réponses positives aux conjectures 1 et 2. Je tiens à remercier ici N. A' Campo et M. Merle pour de nombreuses et fructueuses discussions sur ce travail.

## 2. Démonstration du théorème et du corollaire 2.

1. Rappelons la construction de Tjurina de la déformation semi-universelle de  $(f^{-1}(0), 0)$ , germe de singularité isolée d'intersection complète [12, 13].

Soit  $\mathcal{O}_{X,0} = \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}/(f^{(1)}, \dots, f^{(p)})$  où  $(f^{(1)}, \dots, f^{(p)})$  est l'idéal engendré par les fonctions  $f^{(1)}, \dots, f^{(p)}$  dans  $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ . Soit  $N(f)$  le sous  $\mathcal{O}_{X,0}$ -module de  $\mathcal{O}_{X,0}^p$  engendré par les  $p$ -uples  $\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f^{(p)}}{\partial x_i}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n$ .

Le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{O}_{X,0}^p/N(f)$  est de dimension finie  $\tau$ . On choisit alors  $\tau$  éléments  $g_j (j = 1, \dots, \tau)$  dans  $[\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}]^p$  qui donnent une base de  $\mathcal{O}_{X,0}^p/N(f)$ . Ce choix peut être fait de telle sorte que pour  $1 \leq j \leq p$ ,  $g_j$  soit de la forme  $(0, 0, \dots, -1, 0, \dots, 0)$  avec  $(-1)$  à la  $j^{\text{ème}}$  place.

Considérons l'application  $G$  :

$$G : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^\tau \longrightarrow \mathbf{C}^p$$

$$(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau) \longmapsto (G^{(1)}, \dots, G^{(p)})$$

avec

$$G^{(i)}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau) = f^{(i)}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{\tau} \lambda_j g_j^{(i)}(x_1, \dots, x_n)$$

Pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\tau)$  fixé, on appellera  $G_\lambda$  l'application :

$$G_\lambda : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^p$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (G^{(1)}, \dots, G^{(p)})$$

Soit  $B_\epsilon$  une boule de Milnor pour  $f^{-1}(0)$ . Choisissons alors un disque  $D_\eta = \{\lambda \in \mathbf{C}^\tau \mid \|\lambda\| < \eta\}$  suffisamment petit pour que :

$$\forall \lambda \in D_\eta, \quad G_\lambda^{-1}(0) \pitchfork S_\epsilon$$

Choisissons un polydisque ouvert  $V \times D \subset D_\eta \subset \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{\tau-p}$ . Si on pose :

$$Y = \{(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau) \in B_\epsilon \times V \times D \mid G(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0\}$$

la restriction à  $Y$  de la projection canonique  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^\tau \longrightarrow \mathbf{C}^\tau$  définit la déformation semi-universelle de  $(f^{-1}(0), 0)$ .

Définissons

$$F^{(i)}(x_1, \dots, x_n, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_\tau) = \begin{cases} f^{(i)}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=p+1}^{\tau} \lambda_j g_j^{(i)}(x_1, \dots, x_n) & \text{pour } 1 \leq i \leq p \\ \lambda_i & p+1 \leq i \leq \tau \end{cases}$$

Alors la déformation semi-universelle peut encore s'écrire :

$$F : (B_\epsilon \cap D) \cap F^{-1}(V \times D) \longrightarrow V \times D$$

$$(x_1, \dots, x_n, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_\tau) \longmapsto (F^{(1)}, \dots, F^{(\tau)})$$

Si  $\Delta \subset V \times D$  est le discriminant de cette déformation semi-universelle,  $F$  est fibrée au dessus de  $V \times D - (V \times D) \cap \Delta$ .

Pour  $\bar{\lambda} = (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r)$  fixé appelons  $F_{\bar{\lambda}}$  l'application :

$$F_{\bar{\lambda}}: B_\epsilon \cap F_{\bar{\lambda}}^{-1}(V) \longrightarrow V$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (F^{(1)}, \dots, F^{(p)})$$

Alors on a le diagramme commutatif :

$$[B_\epsilon \cap F_{\bar{\lambda}}^{-1}(V - V \cap \Delta(F_{\bar{\lambda}}))] \times \{\bar{\lambda}\} \longleftrightarrow (B_\epsilon \times D) \cap F^{-1}(V \times D - (V \times D) \cap \Delta)$$

$$\downarrow F_{\bar{\lambda}} \qquad \qquad \qquad \downarrow F$$

$$[V - V \cap \Delta(F_{\bar{\lambda}})] \times \{\bar{\lambda}\} \longleftrightarrow V \times D - (V \times D) \cap \Delta$$

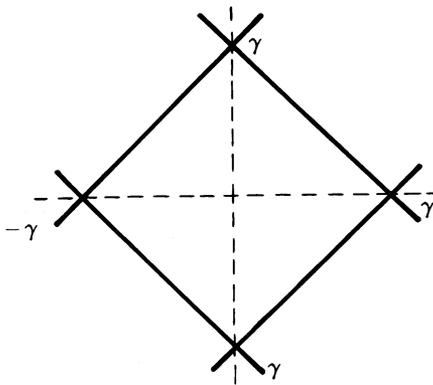
Les fibrations induites par les  $F_{\bar{\lambda}}$  (et en particulier  $F_0 = f$ ) sont des restrictions de celle induite par  $F$ .

En particulier elles ont toutes même fibre  $\mathfrak{F}(f)$ .

*Exemple.* — Reprenons l'exemple de

$$f: (\mathbf{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (x^2 - y^2, y^2 - z^2)$$



La déformation  $\bar{f}$  utilisée est du type  $F_{\bar{\lambda}}$ . Donc l'application  $g$  est fibrée au dessus de  $[V - V \cap \Delta(\bar{f})] \cap D_a$  et sa fibre est  $\mathfrak{F}(f)$ .

Choisissons  $\gamma$  réel.  $g$  s'écrit :

$$g(x, y) = 4\gamma^2(x + y + \gamma)(x - y + \gamma)(x + y - \gamma)(x - y - \gamma)$$

donc  $g^{-1}(0) \cap \mathbf{R}^2$  est un partage à 4 branches du disque réel. En utilisant les techniques de N. A'Campo [1], on tire la matrice d'intersection des cycles de  $H_1(\mathcal{S}(f); \mathbf{Z})$  et le diagramme de Dynkin correspondant.

2. *Preuve du théorème.* — Soit  $g : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^p, 0)$  satisfaisant aux mêmes hypothèses que  $f$  et de même type quasi-homogène. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} H : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}^p \times \mathbf{C} \\ (x, t) &\rightarrow ((f + t(g - f))(x), t) \end{aligned}$$

Elle définit une singularité isolée d'intersection complète, donc soit  $\Delta \subset \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$  son discriminant.

Remarquons que comme  $f$  est quasi-homogène (pour des poids strictement positifs) toute boule  $B$  centrée à l'origine de  $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$  est boule de Milnor pour  $H^{-1}(0)$ . D'autre part pour un  $t$  générique,  $[f + t(g - f)]^{-1}(0)$  définit une singularité isolée d'intersection complète, et coupe transversalement toute sphère centrée à l'origine de  $\mathbf{C}^n$ , puisque  $f + t(g - f)$  reste quasi-homogène de même type. Compte-tenu des deux remarques précédentes, on peut choisir un polydisque  $B_\epsilon \times D \subset B \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$  avec  $B, B_\epsilon$  et  $D$  arbitrairement grands, et un disque ouvert  $V \subset \mathbf{C}^p$  tel que l'application induite par  $H$  :

$$(B_\epsilon \times D) \cap H^{-1}[V \times D - (V \times D) \cap \Delta] \rightarrow V \times D - (V \times D) \cap \Delta$$

soit une fibration  $C^\infty$  localement triviale.

Il est donc clair que les fibres  $\mathcal{S}[f + t(g - f)]$  sont difféomorphes pour un  $t$  générique dans  $D$ , en particulier  $\mathcal{S}(f)$  et  $\mathcal{S}(g)$ , puisque  $f$  et  $g$  définissent des singularités isolées d'intersection complète.

3. *Preuve du corollaire 2.* — Soit  $f : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^p, 0)$  de type  $(d_1, \dots, d_p; 1, \dots, 1)$  définissant une singularité isolée d'intersection complète.

On va d'abord prouver le corollaire dans un cas particulier auquel se ramènera le cas général.

*Cas particulier.* — Supposons que  $f^{(i)}$  ne dépende que des variables  $x_j$  pour  $1 \leq j \leq n - p + i$  ( $i = 1, \dots, p$ ).

Remarquons d'abord que si pour un  $i$  quelconque,  $d_i$  est égal à 1, l'intersection complète homogène est contenue dans l'hyperplan  $f^{(i)} = 0$ , et aurait pu être décrite par une application :

$$f' : (\mathbf{C}^{n-1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^{p-1}, 0)$$

On peut toujours supposer les  $d_i$  plus grands que 1, quitte à effectuer les réductions nécessaires.

Dans ce cas, on commence une base de  $\mathcal{O}_{f^{-1}(0),0}^p / N(f)$  avec les images des éléments

$$(0, 0, \dots, 0, x_{n-p+j+1}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{O}_{f^{-1}(0),0}^p$$

$(x_{n-p+j+1}$  à la  $j^{\text{ème}}$  place pour  $1 \leq j \leq p - 1$ )

et on considère la déformation  $F_\lambda$  de  $f$ , pour

$$\lambda = (\lambda_{n-p+2}, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{C}^{r-p}$$

assez petit,

$\lambda_i \neq 0$  pour  $n - p + 2 \leq i \leq n$  :

$$F_\lambda^{(j)}(x) = \begin{cases} f^{(j)}(x) + \lambda_{n-p+j+1} x_{n-p+j+1} & 1 \leq j \leq p - 1 \\ f^{(p)}(x) & j = p \end{cases}$$

Soit  $L(b_1, \dots, b_{p-1})$  la droite de  $\mathbf{C}^p$  d'équation :

$$y_1 = b_1, \dots, y_{p-1} = b_{p-1}.$$

La restriction à  $L$  de la projection  $(y_1, \dots, y_p) \longmapsto y_p$  est une carte de  $L \cap V$ .

Considérons  $F_\lambda^{-1}(L \cap V) \cap B_\epsilon$ . C'est un ouvert d'une variété lisse, et une carte globale peut en être donnée par la restriction de la projection :

$$(x_1, \dots, x_{n-p+1}, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-p+1})$$

L'application  $F_\lambda^{-1}(L \cap V) \cap B_\epsilon \xrightarrow{F_\lambda} L \cap V$  est alors fibrée au dessus de  $L \cap V$  privé de ses valeurs critiques, et cette fibre est  $\mathcal{H}(f)$ . On retombe sur les techniques de morsification des singularités d'hyper-surface [1, 2, 3].

*Cas général.* — Soit  $f$  vérifiant les hypothèses du corollaire. Supposons qu'il existe un élément  $g$  dans la classe homogène de  $f$  vérifiant les hy-

pothèses du corollaire et tombant dans le cas précédent. On peut tracer dans le plan complexe un chemin joignant 0 et 1 en évitant les  $t$  non génériques tels que  $f + t(g - f)$  ne définisse pas une singularité isolée d'intersection complète.  $g$  peut donc être considéré comme déformation de  $f$ , et déformation "petite" puisque les fibres  $\mathcal{F}(f + t(g - f))$  sont les mêmes le long du chemin.

La morsification de  $f$  est celle indiquée au cas précédent.

Reste à prouver qu'un tel  $g$  existe, d'abord si  $n > p$ .

Soit  $h = (h^{(1)}, \dots, h^{(p)})$  un élément homogène de même type que  $f$ , tel que  $h^{(i)}$  ne dépende que des  $x_j$  ( $1 \leq j \leq n - p + i$ ) pour  $1 \leq i \leq p$ .

Considérons dans  $\mathbf{P}^{n-1}$  le simplexe de référence dont les sommets  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les points de coordonnées homogènes  $[0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$  (1 à la  $i^{\text{ème}}$  place).

La variété projective de  $\mathbf{P}^{n-p+1}$  définie par les zéros de  $h^{(1)}$  est le cône de sommet  $e_{n-p+2}$  sur la variété de  $\mathbf{P}^{n-p}$  définie par les zéros de  $h^{(1)}$ . On peut déformer dans  $\mathbf{P}^{n-p}$  cette dernière variété de manière à ce qu'elle ne soit pas singulière.

Définissons  $\nabla h^{(i)}(x)$  comme le  $n$ -uple

$$\left( \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_n}(x) \right) \text{ et } \bar{h}^{(1)}$$

comme la déformation requise de  $h^{(1)}$ .

Soit  $x$  un point d'intersection dans  $\mathbf{P}^{n-p+1}$  du cône précédent avec la variété définie par les zéros de  $h^{(2)}$ ; on peut déformer dans  $\mathbf{P}^{n-p+1}$  cette dernière de manière à ce que  $\nabla \bar{h}^{(1)}(x)$  et  $\nabla \bar{h}^{(2)}(x)$  soient indépendants (déformation  $\bar{h}^{(2)}$  de  $h^{(2)}$ ).

Puis on déforme dans  $\mathbf{P}^{n-p+2}$  la variété définie par les zéros de  $h^{(3)}$  dans  $\mathbf{P}^{n-p+2}$  de manière à ce qu'aux points d'intersection de  $h^{(3)-1}(0) \cap \mathbf{P}^{n-p+2}$  avec le cône de sommet  $e_{n-p+3}$  sur la variété de  $\mathbf{P}^{n-p+1}$  définie par  $\bar{h}^{(1)} = \bar{h}^{(2)} = 0$ ,  $\nabla \bar{h}^{(1)}$ ,  $\nabla \bar{h}^{(2)}$ ,  $\nabla \bar{h}^{(3)}$  forment un système de rang maximal. On aboutit ainsi après ces mises en position générale successives, à une application  $g = (\bar{h}^{(1)}, \dots, \bar{h}^{(p)})$  dont les zéros forment un cône de dimension  $n - p$  sur une variété lisse de  $\mathbf{P}^{n-1}$ . Il est donc intersection complète et son sommet, l'origine, est son seul point singulier.

Si  $n = p$ , il suffit de prendre pour  $g$  un élément  $(g^{(1)}, \dots, g^{(n)})$  tel que :

- .  $g^{(i)}$  est homogène de degré  $d_i$
- .  $g^{(i)}$  ne dépend que des  $x_j$  pour  $1 \leq j \leq i$  ( $1 \leq i \leq n$ )
- .  $g^{(i)}(e_i) \neq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ )

Il est facile de voir que les deux dernières hypothèses imposent que seule l'origine est zéro de  $g$ .

*Remarque.* — Si  $f$  est quasi-homogène, on ne peut conclure toujours à l'existence d'une morsification par ce type de raisonnement.

En effet, soit

$$f : (\mathbf{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x^2 + y^2z, z^2 + yx)$$

Cette application est quasi-homogène de type  $(10, 8; 5, 3, 4)$ . On peut vérifier directement qu'elle définit une singularité isolée d'intersection complète.

Or il n'apparaît dans la classe quasi-homogène de  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) que les deux monômes  $x^2$  et  $y^2z$  (resp.  $z^2$  et  $xy$ ). Il n'existe donc pas d'élément  $g = (g_1, g_2)$  dans la classe quasi-homogène de  $f$  qui définisse une singularité isolée d'intersection complète et tel que  $g_1$  ou  $g_2$  ne dépende que de deux variables.

### 3. Nombre de Milnor d'une singularité isolée de courbe gauche de $\mathbf{C}^3$ quasi-homogène et intersection complète.

Soit  $f : (\mathbf{C}^3, 0) \xrightarrow{(f_1, f_2)} (\mathbf{C}^2, 0)$  une application quasi-homogène de type  $(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3)$  définissant une singularité isolée d'intersection complète.

On se propose de montrer que la conjecture 2 est vraie dans ce cas.

LEMME. — *Sous les hypothèses précédentes, la conjecture est vérifiée dans les deux cas suivants :*

- .  $f_1$  ne dépend que de deux variables.
- .  $f_1$  définit une singularité isolée de surface.

PROPOSITION. — *Sous les hypothèses précédentes, l'une des trois assertions ci-dessous est vraie : il existe dans la classe quasi-homogène de  $f$  un élément  $h = (h_1, h_2)$  définissant une singularité isolée d'intersection complète tel que*

- 1) *Soit  $h_1$ , soit  $h_2$  ne dépende que de deux variables.*
- 2) *Soit  $h_1$ , soit  $h_2$  définisse une singularité isolée de surface.*
- 3)  *$h$  s'écrive*

$$h(x, y, z) = \begin{cases} (x^\alpha + y^\beta z, z^\gamma + y^\delta x) \\ \text{ou} \\ (\lambda x^\alpha z + y^\beta x + z^\gamma x, \lambda y^{\beta'} z + z^{\gamma'} y + x^{\alpha'} y) \end{cases}$$

*(types exceptionnels).*

Après avoir contrôlé que les deux types exceptionnels vérifient la conjecture, on a la formule

$$\mu = M(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3) = 1 + \frac{P}{\Pi} (S - \sigma).$$

Ecrivons chaque rationnel  $a_i$  sous la forme d'une fraction  $\frac{b_i}{c_i}$  irréductible. Soit  $c$  le plus petit commun multiple des  $c_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ). Dans toute la suite on prendra toujours comme coordonnées homogènes du type  $(cd_1, cd_2; ca_1, ca_2, ca_3)$  de telle sorte que l'application  $R$  :

$$R : \quad (\mathbf{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^3, 0) \\ (x, y, z) \longrightarrow (x^{ca_1}, y^{ca_2}, z^{ca_3})$$

soit un revêtement ramifié.

*Démonstration du lemme.* — Dans le premier cas  $f$  s'écrit :

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y, z))$$

$f_1$  définit une singularité isolée de courbe plane, car si ce n'était le cas, elle ne serait pas réduite et 0 ne serait pas une singularité isolée de  $f^{-1}(0)$ .

Le lieu critique  $\Sigma$  est défini par l'annulation des trois mineurs de la matrice jacobienne :

$$\Sigma \begin{cases} (12) = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On notera dans toute la suite de la démonstration du lemme les générateurs d'un idéal de  $\mathbf{C}\{x, y, z\}$  entre parenthèses.

$\Sigma$ , espace équidimensionnel de dimension 1, se décompose en :

–  $\Sigma_1$  défini par l'idéal  $(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y})$ . C'est l'axe des  $z$  avec la multiplicité  $\mu(f_1^{-1}(0), 0)$ .

–  $\Sigma_2$  défini par l'idéal  $(\frac{\partial f_2}{\partial z}, (12))$ .

Soient  $F = \alpha f_1 + \beta f_2$  une combinaison linéaire générique de  $f_1$  et  $f_2$ ,  $H$  l'hypersurface  $F^{-1}(0)$ , et  $L$  la droite de  $\mathbf{C}^2$  d'équation  $\alpha X + \beta Y = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} (\Delta \cdot L)_0 &= (\Sigma \cdot H)_0 \quad (\text{formule des projections}) \\ &= (\Sigma_1 \cdot H)_0 + (\Sigma_2 \cdot H)_0 \end{aligned}$$

Remarquons que si  $f_2(0, 0, z)$  était identiquement nulle, la droite d'équations  $x = y = 0$  serait une composante singulière de  $f^{-1}(0)$ , donc  $f_2$  comporte un monôme  $z^\gamma$  avec  $\gamma a_3 = d_2$ . Le calcul de  $(\Sigma_1 \cdot H)_0$  est immédiat, c'est  $\gamma \cdot \mu(f_1^{-1}(0), 0)$ .

Pour évaluer  $(\Sigma_2 \cdot H)_0$  considérons l'idéal  $I = (\frac{\partial f_1}{\partial x} F, \frac{\partial f_1}{\partial y} F, (12))$ .

Il définit un espace  $V$  équidimensionnel de dimension 1 qui se décompose en :

–  $V_1 = \Sigma_1$  car (12) est dans l'idéal  $(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y})$ .

–  $V_2$  défini par l'idéal  $(F, (12))$ . Il est bien de dimension 1 car l'idéal  $(F, (12), \frac{\partial f_2}{\partial z})$  est de définition.

Si  $W$  est l'hypersurface  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^{-1}(0)$  on a :

$$(W \cdot V)_0 = (W \cdot V_1)_0 + (W \cdot V_2)_0$$

$$(W \cdot V_1)_0 = (\gamma - 1) \cdot \mu(f_1^{-1}(0), 0)$$

Considérons l'application  $G_1$  de  $(\mathbf{C}^3, 0)$  dans  $(\mathbf{C}^3, 0)$  :

$$G_1 : (x, y, z) \mapsto \left(F, (12), \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

Elle définit une intersection complète. Donc  $(W \cdot V_2)_0$  n'est pas autre chose que  $(\Sigma_2 \cdot H)_0$ , ces deux quantités étant égales au degré local de  $G_1$  en 0.

D'autre part si dans l'expression de  $F$  on remplace  $f_2$  par sa décomposition sur son idéal jacobien (formule d'Euler) il vient :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} F = f_1 \frac{\partial F'}{\partial x} + \beta \frac{a_2}{d_2} y (12) + \beta \frac{a_3}{d_2} z \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} F = f_1 \frac{\partial F'}{\partial y} - \beta \frac{a_1}{d_2} x (12) + \beta \frac{a_3}{d_2} z \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$\text{où } F' = \alpha f_1 + \beta \frac{d_1}{d_2} f_2$$

I peut donc aussi être engendré par :

$$f_1 \frac{\partial F'}{\partial x} + \beta \frac{a_3}{d_2} z \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial z}, f_1 \frac{\partial F'}{\partial y} + \beta \frac{a_3}{d_2} z \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z} \text{ et (12)}$$

Montrons que  $\frac{\partial f_2}{\partial z}$  n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau local de dimension 1  $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x, y, z\}/I$ . Comme  $\frac{\partial f_2}{\partial z}$  constitue un système de paramètre de  $\mathcal{O}$ , l'idéal  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \mathcal{O}$  est de définition. Supposons que  $\frac{\partial f_2}{\partial z}$  soit diviseur de 0 : il appartient alors à l'un des idéaux premiers associés à  $\mathcal{O}$ , soit  $p$ . Pour tout élément  $u$  de l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ , on a :

$$u^n \in \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \mathfrak{O} \subset \mathfrak{p} \quad \text{pour un } n \text{ entier } > 0.$$

Donc  $u \in \mathfrak{p}$  et l'idéal maximal est contenu dans  $\mathfrak{p}$  ce qui contredit le fait que  $\mathfrak{O}$  est équidimensionnel de dimension 1. La multiplicité d'intersection  $(W \cdot V)_0$  est égale à la multiplicité dans  $\mathfrak{O}$  de l'idéal  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \mathfrak{O}$ , ou encore à la colongueur de cet idéal dans  $\mathfrak{O}$  d'après un théorème de régularité de Samuel [11], donc à la colongueur dans  $\mathfrak{O}' = \mathbf{C}\{x, y, z\}/J$  de l'idéal

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \mathfrak{O}' \quad \text{où } J = \left(f_1 \frac{\partial F'}{\partial x}, f_1 \frac{\partial F'}{\partial y}, (12)\right).$$

$\frac{\partial f_2}{\partial z}$  constituant un système de paramètre pour  $\mathfrak{O}'$ , l'espace  $X$  défini par  $J$  est de dimension 1 et se décompose en :

- $X_1$  défini par l'idéal  $\left(\frac{\partial F'}{\partial x}, \frac{\partial F'}{\partial y}\right)$
- $X_2$  défini par l'idéal  $(f_1, (12))$ .

Pour la même raison que ci-dessus,  $\frac{\partial f_2}{\partial z}$  n'est pas diviseur de 0 dans  $\mathfrak{O}'$ , donc la colongueur de  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \mathfrak{O}'$  dans  $\mathfrak{O}'$  est égale à sa multiplicité dans  $\mathfrak{O}'$ , ou encore à  $(W \cdot X)_0$ . Finalement  $(W \cdot V)_0 = (W \cdot X)_0$ .

Soit  $R : (\mathbf{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^3, 0)$  le revêtement ramifié :

$$(x, y, z) \longmapsto (x^{a_1}, y^{a_2}, z^{a_3})$$

Considérons l'application

$$G_2 : (\mathbf{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^3, 0)$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(f_1 \circ R, (12) \circ R, \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ R\right).$$

Elle définit une intersection complète, et  $(W \cdot X_2)_0$  est son degré local

en 0, donc  $\frac{1}{a_1 a_2 a_3} d_1 (d_1 + d_2 - a_1 - a_2) (d_2 - a_3)$ .

Quant à  $(W \cdot X_1)_0$  c'est  $\mu(F'^{-1}(0), 0)$ . Si  $L'$  est la droite de  $\mathbf{C}^2$  d'équation  $\alpha X + \beta \frac{d_1}{d_2} Y = 0$ , la formule de Lê [7] donne :

$$\begin{aligned}
 \mu(f^{-1}(0), 0) &= (\Delta \cdot L')_0 - \mu(F'^{-1}(0), 0) \\
 &= (\Delta \cdot L)_0 - \mu(F'^{-1}(0), 0) \\
 &= (\Sigma_1 \cdot H)_0 + (\Sigma_2 \cdot H)_0 - \mu(F'^{-1}(0), 0) \\
 &= \gamma \cdot \mu(f_1^{-1}(0), 0) - (\gamma - 1) \mu(f_1^{-1}(0), 0) + (W \cdot X_2)_0 \\
 &= \frac{1}{a_1 a_2 a_3} [d_1 (d_1 + d_2 - a_1 - a_2) (d_2 - a_3) \\
 &\qquad\qquad\qquad + a_3 (d_1 - a_1) (d_1 - a_2)] \\
 &= M(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3) \qquad\qquad\qquad \text{cqfd.}
 \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas  $f_1$  définit une singularité isolée de surface : Soient (12), (13) et (23) avec une notation évidente les trois mineurs de la matrice jacobienne, définissant le lieu critique  $\Sigma$  de dimension 1. La droite  $L$  d'équation  $X = 0$  ne coupe la trace de  $\Delta(f)$  dans un petit voisinage de l'origine qu'à l'origine, puisque  $f_1$  définit une singularité isolée d'hypersurface. D'après la formule des projections,  $(\Delta \cdot L)_0 = (\Sigma \cdot H)_0$  où  $H = f_1^{-1}(0)$ .

Soit  $R$  le revêtement ramifié précédemment défini. On appellera  $\Sigma'$  et  $H'$  les revêtements de  $\Sigma$  et  $H$  définis par les idéaux  $((12) \circ R$ ,  $(13) \circ R$ ,  $(23) \circ R$ ) et  $(f_1 \circ R)$ .

On a évidemment  $(\Sigma' \cdot H')_0 = a_1 a_2 a_3 (\Sigma \cdot H)_0$ . Soient :

$$\widetilde{(13) \circ R} = (13) \circ R + K \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \circ R \right)$$

$$\widetilde{(23) \circ R} = (23) \circ R + K \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \circ R \right)$$

deux petites déformations de  $(13) \circ R$  et  $(23) \circ R$  avec  $K$  homogène de degré  $d_2 - a_3$ .

Considérons l'espace  $V'$  défini par l'idéal :

$$\left( \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R \right), ((12) \circ R), \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R \right), \widetilde{(13) \circ R}, \widetilde{(23) \circ R} \right)$$

Remarquons que l'idéal  $I' = ((12) \circ R, \widetilde{(13) \circ R}, \widetilde{(23) \circ R})$  définit un espace  $\widetilde{\Sigma}'$  de dimension a priori au moins strictement inférieure à 2 pour un  $K$  générique. De plus ses trois générateurs sont les trois mineurs de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \circ R & \frac{\partial f_1}{\partial y} \circ R & \frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \circ R & \frac{\partial f_2}{\partial y} \circ R & \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ R + K \end{bmatrix}$$

Pour un  $K$  générique, l'idéal  $(\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R, \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ R + K)$  définit un espace de dimension 1. Supposons que  $(13) \circ R$  et  $(23) \circ R$  possèdent un facteur commun  $\widetilde{A}$  non constant.  $\widetilde{A}$  et  $(12) \circ R$  n'ont pas de facteurs communs, donc il existe un ouvert de  $\widetilde{A}^{-1}(0)$  où  $(12) \circ R$  n'est pas nul. En tout point de cet ouvert,  $\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R$  et  $\frac{\partial f_2}{\partial z} \circ R + K$  seraient simultanément nuls, ce qui est impossible. En définitive l'idéal  $((13) \circ R, (23) \circ R)$  définit une intersection complète, ce que ne peut faire l'idéal  $I'$  à cause de l'identité :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot (12)\right) \circ R \equiv \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \circ R\right) \widetilde{((13) \circ R)} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \circ R\right) \widetilde{((23) \circ R)}$$

$\widetilde{\Sigma}'$  est donc de dimension 1.

$V'$  espace équidimensionnel de dimension 1 se décompose en :

- $\widetilde{\Sigma}'$
- $V'_1$  défini par l'idéal  $(\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R, \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ R + K)$
- $V'_2$  défini par l'idéal  $(\frac{\partial f_1}{\partial y} \circ R, \frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R)$ .

Mais  $V'$  peut aussi être défini par l'idéal

$$\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \circ R\right) \widetilde{((13) \circ R)}, \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R\right) \widetilde{((13) \circ R)}, \widetilde{(23) \circ R}\right).$$

On peut donc le décomposer d'une autre manière en :

- $V'_2$
- $V'_3$  défini par l'idéal  $(\widetilde{((13) \circ R)}, \widetilde{(23) \circ R})$ .

Choisissons maintenant une petite déformation  $\widetilde{f_1 \circ R} = f_1 \circ R + \epsilon$  de  $f_1 \circ R$  où  $\epsilon$  est homogène de degré  $d_1$ , telle que les idéaux

$$(\widetilde{f_1 \circ R}, (\widetilde{(13) \circ R}, (\widetilde{(23) \circ R}) \text{ et } (\widetilde{f_1 \circ R}, \frac{\partial f_1}{\partial y} \circ R, \frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R)$$

soient de définition ; l'idéal  $(f_1 \circ R, \frac{\partial f_1}{\partial z} \circ R, \frac{\partial f_2}{\partial z} \circ R + K)$  contenant le premier est aussi de définition.

Si  $\widetilde{H'} = (\widetilde{f_1 \circ R})^{-1}(0)$  on a :

$$(\Sigma' \cdot H')_0 = (\widetilde{\Sigma'} \cdot \widetilde{H'})_0 = (V'_3 \cdot \widetilde{H'})_0 - (V'_1 \cdot \widetilde{H'})_0$$

$$(\Delta \cdot L)_0 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3} [d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2 - (d_1 + d_2)(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1] \text{ et } \mu = M(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3)$$

cqfd.

*Démonstration de la proposition.* — On utilisera la classification des singularités isolées de surfaces quasi-homogènes donnée par Orlik-Wagreich [10].

*Remarque préliminaire.* — Sous les hypothèses de la proposition, supposons qu'il existe  $g$  dans la classe quasi-homogène de  $f$  tel que par exemple  $g_1$  définisse une singularité isolée de surface. Cette hypothèse implique la partie 2) de la proposition.

En effet, il existe un ouvert de Zariski  $U \subset \mathbf{C}$  tel que pour tout  $t$  dans  $U$  :

.  $(1 - t)g_1 + tf_1$  définisse une singularité isolée de surface.

.  $h = ((1 - t)g_1 + tf_1, f_2)$  définisse une singularité isolée d'intersection complète.

Donc on supposera dorénavant que dans la classe quasi-homogène de  $f$  il n'y a pas de tel  $g$ .

Différents cas sont possibles :

1) Les trois poids divisent un des degrés, par exemple  $a_1, a_2, a_3$  divisent  $d_1$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les entiers tels que  $a_1 \alpha = a_2 \beta = a_3 \gamma = d_1$ .

Alors  $x^\alpha + y^\beta + z^\gamma$  est dans la classe quasi-homogène de  $f_1$  et définit une singularité isolée de surface. C'est exclus.

2) Deux poids, à l'exclusion du troisième, divisent un des degrés, par exemple  $a_1$  et  $a_2$  divisent  $d_1$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les entiers tels que  $a_1\alpha = a_2\beta = d_1$ . L'élément le plus général définissant une singularité non isolée de la classe quasi-homogène de  $f_1$  s'écrit :

$$g_1(x, y, z) = Ax^\alpha + By^\beta + \sum_{\gamma \geq 0} u_\gamma(x, y) z^\gamma$$

avec  $u_\gamma$  dans le carré de l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[x, y]$ .

En effet, si pour un  $\gamma > 0$ ,  $u_\gamma$  contenait une constante,  $a_3$  diviserait  $d_1$  ce qui est interdit ; et si  $u_\gamma$  contenait un monôme du premier degré, par exemple  $y$ , la classe contiendrait  $x^\alpha + y^\beta + z^\gamma y$  qui est à singularité isolée.

D'autre part si  $a_3$  ne divisait pas  $d_2$ ,  $g_2(0, 0, z)$  serait identiquement nul pour tout  $g_2$  dans la classe quasi-homogène de  $f_2$  ; donc  $(g_1, g_2)$  élément le plus général de la classe de  $f$  ne pourrait jamais définir une singularité isolée car la droite  $x = y = 0$  serait une composante singulière de  $g^{-1}(0)$ .

De même s'il n'existait aucun monôme de forme  $zx^{\alpha'}y^{\beta'}$  ( $\alpha' + \beta' \geq 1$ ) ou  $x^{\alpha'}y^{\beta'}$  ( $\alpha' + \beta' \geq 2$ ) dans la classe quasi-homogène de  $f_2$ , tout élément de cette classe serait divisible par  $z^2$ , donc non réduit ; ce qui est impossible.

D'où deux types possibles :

$$h(x, y, z) = \begin{cases} (x^\alpha + y^\beta, z^\gamma + zx^{\alpha'}y^{\beta'}) \\ (x^\alpha + y^\beta, z^\gamma + x^{\alpha'}y^{\beta'}) \end{cases}$$

On vérifie qu'ils définissent une singularité isolée d'intersection complète.

3) Un poids, à l'exclusion des deux autres, par exemple  $a_1$  divise un des degrés, par exemple  $d_1$ . Soit  $\alpha$  l'entier tel que  $a_1\alpha = d_1$ .

L'élément  $g_1$  le plus général définissant une singularité non isolée dans la classe de  $f_1$  peut prendre quatre formes.

- (I)  $g_1(x, y, z) = Ax^\alpha + By^\beta z + \sum_{\gamma \geq 0} u_\gamma(x, y) z^\gamma$  avec
- .  $\beta > 1$  ( $x^\alpha + yz$  est à singularité isolée)
  - .  $u_\gamma$  dans le carré de l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[x, y]$
  - .  $u_0$  ne contient pas de monôme de forme  $y^\delta x$ .

Dans ce cas  $a_3 | d_2$  par un raisonnement analogue à celui du 2).

- (II)  $g_1(x, y, z) = Ax^\alpha + By^\beta x + \sum_{\gamma \geq 0} u_\gamma(x, y) z^\gamma$  avec
- .  $u_\gamma$  dans le carré de l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[x, y]$ . Cette forme implique aussi  $a_3 | d_2$ .
- (III)  $g_1(x, y, z) = Ax^\alpha + By^\beta x + Cz^\gamma x + \sum_{\delta \geq 0} u_\delta(x, y) z^\delta$  avec
- .  $u_\delta$  dans le carré de l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[x, y]$
  - .  $u_1(0, y) \equiv 0$  sinon  $x^\alpha + y^\beta z + z^\gamma x$  est à singularité isolée.

Cette forme peut encore s'écrire :

$g_1(x, y, z) = x K(x, y, z) + v(y, z)$  où  $v$  ne comporte aucun monôme de forme  $y^\beta z$  ou  $z^\gamma y$ .

$$(IV) \quad g_1(x, y, z) = Ax^\alpha + \sum_{\gamma \geq 0} u_\gamma(x, y) z^\gamma = Ax^\alpha + \sum_{\beta \geq 0} v_\beta(x, z) y^\beta$$

avec

.  $u_\gamma$  (resp.  $v_\beta$ ) dans le carré de l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[x, y]$  (resp.  $\mathbf{C}[x, z]$ ).

Cette forme impose  $a_2 | d_2$  et  $a_3 | d_2$ , on retombe sur les deux types du 2).

— Si  $g_1$  est de la forme (I),  $g_2$ , élément le plus général de la classe de  $f_2$ , pourra à son tour prendre les trois formes (I), (II) ou (III).

Pour  $g_2$  de type (I) :

$$g_2 = \begin{cases} A' z^{\gamma'} + B' x^{\alpha'} y + \dots & \text{mais ceci imposerait } a_2 | d_1 \text{ (exclus)} \\ A' z^{\gamma'} + B' y^{\beta'} x & \text{C'est un type exceptionnel.} \end{cases}$$

Supposons maintenant  $g_2$  de type (II) ou (III) ; si aucun monôme de forme  $y^{\beta'} z$  n'apparaît dans la classe de  $f_2$ ,  $a_2 | d_1$  ce qui est exclus. Donc  $g$  l'élément le plus général dans la classe de  $f$  s'écrit :

$$(Ax^\alpha + By^\beta z + \sum_{\gamma \geq 0} u_\gamma(x, y) z^\gamma, A' z^{\gamma'} + B' y^{\beta'} z + \sum_{\delta \geq 0} v_\delta(y, z) x^\delta)$$

ou

$$(Ax^\alpha + By^\beta z + \sum_{\gamma \geq 0} u_\gamma(x, y) z^\gamma, A' z^{\gamma'} + B' y^{\beta'} z + C' x^{\alpha'} z + \sum_{\delta \geq 0} v_\delta(x, z) y^\delta)$$

Dans le deuxième cas, la droite  $x = z = 0$  est une composante singulière de  $g^{-1}(0)$ , donc aucun  $g$  ne peut définir une singularité isolée. Dans le 1<sup>er</sup> cas, si le monôme  $y^{\delta'} x$  n'apparaît pas, la même droite est singulière ; sinon c'est un cas exceptionnel.

– Si  $g_1$  est de type (II),  $g_2$  peut prendre les deux formes (II) ou (III). Mais si le monôme  $x^{\alpha'} z$  apparaît dans la classe de  $f_2$  sans le monôme  $y^{\beta'} z$  ceci impose  $a_2 \mid d_1$  (exclus). D'où le seul type

$$h(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta x, z^\gamma + y^\delta z)$$

que l'on vérifie définir une singularité isolée d'intersection complète.

– Ensuite si  $g_1$  est de type (III), ainsi que  $g_2$ , on se trouve en face de deux cas possibles :

.  $(x^\alpha + y^\beta x, z^{\gamma'} + y^{\beta'} z)$  si  $a_1$  ne divise pas  $d_2$ .

. Si  $a_1 \mid d_2$ ,  $g$  ne pourra jamais définir une singularité isolée car la droite  $x = y = 0$  sera toujours composante singulière de  $g^{-1}(0)$ .

– Enfin si  $g_1$  est de forme (III) et si aucun poids ne divise  $d_2$ , des monômes  $z^{\gamma'} y$  et  $y^{\beta'} z$  apparaissent dans la classe quasi-homogène de  $f_2$ , sinon il n'y aurait aucune singularité isolée dans la classe de  $f$ , d'où le type :

$$(x^\alpha + y^\beta x + z^\gamma x, y^{\beta'} z + \lambda z^{\gamma'} y)$$

que l'on vérifie définir une singularité isolée d'intersection complète pour un  $\lambda$  générique.

4) Les poids ne divisent aucun degré.

*Remarque.* – Supposons que dans la classe quasi-homogène de  $f_1$  il n'y ait aucun monôme de forme  $z^\gamma x$  ; alors un monôme  $z^{\gamma'} y$  apparaît dans cette classe, et un monôme  $z^{\gamma''} x$  dans la classe de  $f_2$ , sinon la droite  $x = y = 0$  serait toujours une composante singulière de  $g^{-1}(0)$  pour tout  $g$  élément de la classe de  $f$ .

Compte tenu de cette remarque, le seul type de singularité isolée qui apparaît dans ce cas s'écrit

$$(Ax^\alpha z + By^\beta x + Cz^\gamma x + \dots, A'y^{\beta'}z + B'x^{\alpha'}y + C'z^{\gamma'}y + \dots)$$

C'est le deuxième type exceptionnel.

*Etude du type exceptionnel*  $(x^\alpha + y^\beta z, z^\gamma + y^\delta x)$

La matrice jacobienne s'écrit 
$$\begin{bmatrix} \alpha x^{\alpha-1} & \beta y^{\beta-1} z & y^\beta \\ y^\delta & \delta y^{\delta-1} x & \gamma z^{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

et les trois mineurs

$$\begin{cases} (\delta \alpha x^\alpha - \beta y^\beta z) y^{\delta-1} \\ \alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta} \\ (\beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x) y^{\beta-1} \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il définit une singularité isolée d'intersection complète.

Un système de coordonnées du type quasi-homogène est :

$$\begin{cases} a_1 = \beta\gamma + \delta & \begin{cases} d_1 = \alpha(\beta\gamma + \delta) \\ d_2 = \gamma(\alpha\delta + \beta) \end{cases} \\ a_2 = \alpha\gamma - 1 \\ a_3 = \alpha\delta + \beta \end{cases}$$

On peut toujours supposer  $\delta \leq \beta$ , quitte à échanger les rôles de  $x$  et  $z$ .

Le lieu critique  $\Sigma$  se décompose en :

- $\Sigma_1$  défini par l'idéal  $(y^{\delta-1}, x^{\alpha-1} z^{\gamma-1})$
- $\Sigma_2$ , qui n'existe que si  $\beta > \delta$ , défini par l'idéal  $(y^{\beta-\delta}, x^{\alpha-1} z^{\gamma-1}, x^\alpha)$ .

La composante  $\Sigma_{2,2}$  définie par l'idéal  $(y^{\beta-\delta}, z^{\gamma-1}, x)$  est immergée dans la composante  $\Sigma_{2,1}$  intersection complète de dimension 1 définie par l'idéal  $(y^{\beta-\delta}, x^{\alpha-1})$ .

- $\Sigma_3$  de dimension 1 défini par l'idéal

$$(\alpha \delta x^\alpha - \beta y^\beta z, \alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}, \beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x)$$

Si  $d_1 \leq d_2$ , considérons l'idéal :

$$(y^\delta (\alpha \delta x^\alpha - \beta y^\beta z), \alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}, \beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x)$$

Il définit un espace V de dimension 1 qui se décompose en :

$$- \Sigma_3$$

-  $V_1$  défini par l'idéal  $(y^\delta, x^{\alpha-1} z^{\gamma-1}, z^\gamma)$ . La composante  $V_{1,2}$  définie par l'idéal  $(y^\delta, x^{\alpha-1}, z)$  est immergée dans la composante  $V_{1,1}$  de dimension 1 définie par l'idéal  $(y^\delta, z^{\gamma-1})$ .

Mais V peut aussi être défini par l'idéal engendré par :

$$\beta z (\alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}) - \alpha x^{\alpha-1} (\beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x), \alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}$$

et  $\beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x$  ; c'est-à-dire par l'idéal

$$(\alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}, \beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x)$$

Soient  $F = \xi f_1 + \xi' f_2$  une combinaison linéaire générique de  $f_1$  et  $f_2$ , H l'hypersurface  $F^{-1}(0)$ , et L la droite de  $\mathbf{C}^2$  d'équation  $\xi X + \xi' Y = 0$ . On a :

$$(\Delta \cdot L)_0 = (H \cdot \Sigma)_0 = (H \cdot \Sigma_1)_0 + (H \cdot \Sigma_{2,1})_0 + (H \cdot \Sigma_3)_0$$

En effet la contribution des composantes immergées à la multiplicité d'intersection avec H est nulle.

$$D'autre part (H \cdot \Sigma_3)_0 = (H \cdot V)_0 - (H \cdot V_{1,1})_0.$$

On termine le calcul en évaluant les diverses multiplicités d'intersection comme des degrés locaux d'applications.

La seule difficulté réside dans le calcul de  $(H \cdot \Sigma_3)_0$  pour le terme  $(H \cdot V)_0$ . Si  $d_1 = d_2$  c'est immédiat. Si  $d_1 < d_2$ , considérons R le revêtement précédemment défini, H' et V' les revêtements de H et V. Remarquons que le cône tangent  $(f_1 \circ R)^{-1}(0)$  de H' ne contient aucune composante de V', donc  $(H' \cdot V')_0 = ((f_1 \circ R)^{-1}(0) \cdot V')_0$ .

Finalement

$$(\Delta \cdot L)_0 = (\delta - 1) [(\alpha - 1)\gamma + (\gamma - 1)\alpha] + (\beta - \delta)(\alpha - 1)\gamma + \alpha\delta + \alpha\beta\gamma$$

Si  $d_1 \geq d_2$  considérons l'idéal

$$(\alpha \delta x^\alpha - \beta y^\beta z, \alpha \gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}, \alpha x^{\alpha-1} (\beta \gamma z^\gamma - \delta y^\delta x))$$

Il définit un espace  $W$  de dimension 1 qui se décompose en :

$$- \Sigma_3$$

-  $W_1$  défini par l'idéal  $(y^\beta z, y^{\beta+\delta}, x^{\alpha-1})$ . La composante  $W_{1,2}$  définie par l'idéal  $(z, y^\delta, x^{\alpha-1})$  est immergée dans la composante  $W_{1,1}$  de dimension 1 définie par l'idéal  $(y^\beta, x^{\alpha-1})$ .

Mais  $W$  peut aussi être défini par l'idéal engendré par :

$$(\alpha\delta x^\alpha - \beta y^\beta z, \alpha\gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}, \beta z(\alpha\gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta}) - y^\delta(\alpha\delta x^\alpha - \beta y^\beta z))$$

c'est-à-dire par l'idéal

$$(\alpha\delta x^\alpha - \beta y^\beta z, \alpha\gamma x^{\alpha-1} z^{\gamma-1} - y^{\beta+\delta})$$

Si  $d_1 = d_2$  le calcul de  $(H \cdot W)_0$  est immédiat. Si  $d_1 > d_2$ , le cône tangent  $(f_2 \circ R)^{-1}(0)$  de  $H'$  ne contient aucune composante du revêtement  $W'$  de  $W$ , donc  $(H' \cdot W')_0 = ((f_2 \circ R)^{-1}(0) \cdot W')_0$ .

Finalement

$$(\Delta \cdot L)_0 = (\delta - 1)[(\alpha - 1)\gamma + \alpha(\gamma - 1)] + (\beta - \delta)(\alpha - 1)\gamma + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma$$

Reste à calculer le nombre de Milnor de la singularité d'hypersurface

$$F(x, y, z) = \xi(x^\alpha + y^\beta z) + \xi'(z^\gamma + y^\delta x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \xi\alpha x^{\alpha-1} + \xi' y^\delta = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = y^{\delta-1} [\xi\beta y^{\beta-\delta} z + \xi'\delta x] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \xi y^\beta + \xi'\gamma z^{\gamma-1} = 0 \end{cases}$$

$$\mu(F) = \begin{cases} (\delta - 1)(\alpha - 1)(\gamma - 1) + (\alpha - 1)(\gamma - 1)(\beta - \delta) + (\alpha - 1)\beta & \text{si } d_2 \geq d_1 \\ (\delta - 1)(\alpha - 1)(\gamma - 1) + \delta(\gamma - 1) & \text{si } d_2 \leq d_1 \end{cases}$$

Dans les deux cas  $\mu = 1 + \alpha\gamma(\beta + \delta - 1)$

Or  $M(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3) =$

$$1 + \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - 1} [\alpha\beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma - \beta\gamma - \delta - \alpha\delta - \beta - \alpha\gamma + 1] \\ = 1 + \alpha\gamma(\beta + \delta - 1) \quad \text{cqfd.}$$

*Etude du cas exceptionnel*

$$(\lambda x^\alpha z + y^\beta x + z^\gamma x, \lambda y^{\beta'} z + z^{\gamma'} y + x^{\alpha'} y) \quad (\alpha, \gamma) \neq (1, 1)$$

On vérifie facilement en examinant les composantes de  $f^{-1}(0)$  que pour un  $\lambda$  générique l'origine est une singularité isolée.

Un système de coordonnées homogènes peut être donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \beta(\gamma - 1) \\ a_2 = \gamma(\alpha - 1) \\ a_3 = \beta(\alpha - 1) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \beta(\alpha\gamma - 1) \\ d_2 = (\alpha - 1)(\beta\gamma' + \gamma) = (\alpha - 1)(\beta'\gamma + \beta) \\ \quad = \alpha'\beta(\gamma - 1) + \gamma(\alpha - 1) \end{array} \right.$$

D'autre part on peut toujours choisir  $d_1 \leq d_2$  quitte à échanger les deux composantes et les rôles de  $x$  et  $y$ .

La matrice jacobienne est :

$$\left[ \begin{array}{ccc} \lambda\alpha x^{\alpha-1} z + y^\beta + z^\gamma & \beta y^{\beta-1} x & \lambda x^\alpha + \gamma z^{\gamma-1} x \\ \alpha' x^{\alpha'-1} y & \lambda\beta' y^{\beta'-1} z + z^{\gamma'} + x^{\alpha'} & \lambda y^{\beta'} + \gamma' z^{\gamma'-1} y \end{array} \right]$$

On notera comme d'habitude les trois mineurs (12), (13), (23) =  $x(\overline{23})$  dont l'annulation définit le lieu critique  $\Sigma$ ,  $F = \xi f_1 + \xi' f_2$  une combinaison linéaire générique de  $f_1$  et  $f_2$ ,  $H$  l'hypersurface  $F^{-1}(0)$  et  $R$  le revêtement précédemment défini.

Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  les deux composantes de  $\Sigma$  définies par les idéaux ((12), (13),  $x$ ) et ((12), (13),  $\overline{(23)}$ ). On a

$$(\Sigma \cdot H)_0 = (\Sigma_1 \cdot H)_0 + (\Sigma_2 \cdot H)_0$$

$\Sigma_1$  ne possédant qu'une composante de dimension 1, définie par l'idéal  $(x, y^\beta + z^\gamma)$  (les autres sont immergées) on a immédiatement en calculant la multiplicité d'intersection sur les revêtements

$$(\Sigma_1 \cdot H)_0 = \beta'\gamma + \beta$$

Pour évaluer  $(\Sigma_2 \cdot H)_0$  introduisons l'idéal

$$((\lambda x^{\alpha-1} + \gamma z^{\gamma-1}) (12), (\lambda x^{\alpha-1} + \gamma z^{\gamma-1}) (13), (\overline{23}))$$

définissant un espace  $V$  de dimension 1 décomposable en :

- $V_1$  défini par l'idéal  $(\lambda x^{\alpha-1} + \gamma z^{\gamma-1}, y^{\beta-1}(\lambda y^{\beta'} + \gamma' z^{\gamma'-1}y))$
- $V_2 = \Sigma_2$

Mais

$$\begin{aligned} (\lambda x^{\alpha-1} + \gamma z^{\gamma-1}) (12) &= \frac{1}{x} \frac{\partial f_1}{\partial z} (12) = -\frac{1}{x} \frac{\partial f_1}{\partial x} (23) + \frac{1}{x} \frac{\partial f_1}{\partial y} (13) \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial x} (\overline{23}) + \beta y^{\beta-1} (13) \end{aligned}$$

Donc  $V$  peut aussi être défini par l'idéal

$$(y^{\beta-1} (13), (\lambda x^{\alpha-1} + \gamma z^{\gamma-1}) (13), (\overline{23}))$$

donc se décomposer en :

- $V_3$  défini par l'idéal  $(y^{\beta-1}, \lambda x^{\alpha-1} + \gamma z^{\gamma-1})$
- $V_4$  défini par l'idéal  $((13), (\overline{23}))$

$$(\Sigma_2 \cdot H)_0 = (V_4 \cdot H)_0 + (V_3 \cdot H)_0 - (V_1 \cdot H)_0$$

On calcule  $(V_3 \cdot H)_0 - (V_1 \cdot H)_0 = -\beta'(\alpha\gamma - 1)$  sur les revêtements. Si  $d_1 = d_2$ , on calcule immédiatement  $(V_4 \cdot H')_0$ . Sinon, comme les trois formes initiales des trois fonctions  $(13) \circ R$ ,  $(\overline{23}) \circ R$  et  $F \circ R$  sont indépendantes, on a  $(V_4 \cdot H')_0 = (V_4 \cdot (f_1 \circ R)^{-1}(0))_0$  et dans tous les cas :

$$(V_4 \cdot H)_0 = \frac{(\beta + \beta')(\gamma + \gamma' - 1)(\alpha\gamma - 1)}{\gamma - 1}$$

Pour calculer  $\mu(H, 0)$ , on peut évaluer la multiplicité d'intersection en 0 de l'hypersurface  $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \circ R\right)^{-1}(0)$  avec la courbe d'équations  $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \circ R\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \circ R\right) = 0$ . Si  $d_1 = d_2$  le calcul est immédiat. Sinon, ce nombre est encore la multiplicité d'intersection de la courbe avec le cône tangent à l'hypersurface, celui-ci ne contenant aucune composante de la courbe.

Dans tous les cas  $\mu(H, 0) = \beta'\gamma + (\beta - 1)\alpha\gamma$ .

Finalement

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(\beta + \beta')(\gamma + \gamma' - 1)(\alpha\gamma - 1)}{\gamma - 1} - \beta'(\alpha\gamma - 1) \\ &\quad + \beta'\gamma + \beta - \alpha'\gamma - (\beta - 1)\alpha\gamma \\ &= (\alpha\gamma - 1) \left[ \frac{(\beta + \beta')(\gamma + \gamma' - 1)}{\gamma - 1} - (\beta' + \beta) \right] + \alpha\gamma \\ &= 1 + (\alpha\gamma - 1) \left[ \frac{(\beta + \beta')\gamma'}{\gamma - 1} + 1 \right] \end{aligned}$$

C'est bien un nombre entier car ceci est égal à  $\alpha\gamma + (\beta + \beta')(\alpha\gamma' + \alpha')$

De plus

$$\begin{aligned} M(d_1, d_2; a_1, a_2, a_3) &= 1 + \frac{\beta(\alpha\gamma - 1)(\alpha - 1)(\beta\gamma' + \gamma)}{\beta(\gamma - 1)\gamma(\alpha - 1)\beta(\alpha - 1)} (S - \sigma) \\ &= 1 + \frac{(\alpha\gamma - 1)(\beta\gamma' + \gamma)}{\gamma(\gamma - 1)\beta(\alpha - 1)} [\gamma(\alpha - 1)(\beta + \beta' - 1)] \\ &= 1 + (\alpha\gamma - 1) \left[ \frac{(\beta\gamma' + \beta)(\beta + \beta' - 1)}{\beta(\gamma - 1)} \right] \\ &= 1 + (\alpha\gamma - 1) \left[ \frac{(\beta + \beta')\gamma'}{\gamma - 1} + 1 \right] \end{aligned}$$

cqfd.

Le cas  $\alpha = \gamma = 1$  se traite de manière absolument analogue.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. A'CAMPO, Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. (I), *Math. Ann.*, 213 (1975), 1-32.
- [2] E. BRIESKORN, Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen, *Manuscripta Mathematica*, 2 (1970), 103-160.
- [3] M. DEMAZURE, Exposé 443 – Séminaire Bourbaki (1974).

- [4] A.M. GABRIELOV, Matrices d'intersection pour certaines singularités (en russe), *Funkc. An. i ego Pril.*, 7, 3 (1973), 18-32.
- [5] H. HAMM, Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, *Math. Ann.*, 191 (1971), 235-252.
- [6] LAMOTKE, Die Störung isolierter Singularitäten von Hyperflächen, Preprint (1970).
- [7] LÊ DŨNG TRÁNG, Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète, Preprint Ecole Polytechnique (1973).
- [7'] LÊ DŨNG TRÁNG. Singularités d'hypersurfaces complexes, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle (1969) Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.
- [7''] LÊ DŨNG TRÁNG, Singularités d'hypersurfaces complexes, *Acta Scien. Vietnamicarum*, Hanoï, (1971).
- [8] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. Math. Studies* n° 61 – Princeton Univ. Press. (1968).
- [9] J. MILNOR and P. ORLIK, Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, *Topology*, 9 (1970), 385-393.
- [10] P. ORLIK, P. WAGREICH, Isolated Singularities of algebraic surfaces with  $C^*$ -action, *Ann. of Math.*, 93 (1971).
- [11] P. SAMUEL, Sur la notion de multiplicité en Algèbre et Géométrie analytique *J. Math. pures et appl.*, t. 30 (1951), 190.
- [12] B. TEISSIER, Cycles évanescents et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse – *Astérisques*, 7-8 (1972).
- [13] G.N. TJURINA, Flat locally semi-universal deformations of isolated singularities of complex spaces, *Isv. Akad. Nauk SSSR – Ser. Math.*, 33 (1969), 1026-1058.

Manuscrit reçu le 12 mai 1976

Proposé par B. Malgrange.

Marc GIUSTI,  
35, rue Esquirol  
75 013 Paris.