Università degli Studi di Torino

Facoltà di Scienze M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica: Sottotesi n. 2

ZFC non è Finitamente Assiomatizzabile

Leo Liberti

Novembre 1997

Relatore: Prof. Alessandro Andretta

ZFC non è Finitamente Assiomatizzabile

Si usa l'abbreviazione ZFC per indicare il sistema assiomatico proposto da Ernst Zermelo nel 1908 e successivamente perfezionato da Abraham Fraenkel, con l'aggiunta dell'assioma di scelta. Proveremo in questa sede che ZFC non è finitamente assiomatizzabile, il che vuol dire che non esiste una lista finita $\theta_1, \ldots, \theta_n$ di enunciati nel linguaggio della teoria degli insiemi tali che

1. $\mathrm{ZFC} \vdash \theta_i$ per ogni $i \leq n$
2. $\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \varphi$ per ogni teorema φ di ZFC

Il linguaggio usato da ZFC è formato dai simboli $\exists, \wedge, \neg, (,), \in, =$ e dalle variabili $v_1, \ldots, v_n$ che denotano gli insiemi. Le altre lettere dell'alfabeto vengono usate per indicare variabili arbitrarie.

Le formule sono $x = y$, $x \in y$, tutte le loro combinazioni con $\wedge$ e $\neg$ e tutte le loro chiusure universali con il quantificatore $\exists$. Per ogni coppia di formule φ e ψ e per ogni x e y, si hanno anche le seguenti abbreviazioni:

$$
\begin{array}{lll}
\forall x(\varphi) & \text{abbrevia} & \neg(\exists x(\neg(\varphi))) \\
(\varphi) \vee (\psi) & \text{abbrevia} & \neg((\neg(\varphi)) \wedge (\neg(\psi))) \\
(\varphi) \rightarrow (\psi) & \text{abbrevia} & (\neg(\varphi)) \vee (\psi) \\
(\varphi) \leftrightarrow (\psi) & \text{abbrevia} & ((\varphi) \rightarrow (\psi)) \wedge ((\varphi) \rightarrow (\psi)) \\
x \neq y & \text{abbrevia} & \neg(x = y) \\
\exists! x(\varphi) & \text{abbrevia} & \exists x(\varphi) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg\varphi)
\end{array}
$$

Inoltre, quando il significato sarà chiaro dal contesto, si potranno omettere le parentesi cosicché, ad esempio, la formula $\forall x(\forall y(\exists z(x \in y \rightarrow x \in z)))$ si abbrevierà in $\forall x \forall y \exists z(x \in y \rightarrow x \in z)$.

Gli assiomi di ZFC sono i seguenti (cfr. [Kun80], pag. xv):

ZFC 0 *(Esistenza)*

$\exists x(x = x)$

ZFC 1 *(Estensionalità)*

$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

ZFC 2 *(Fondazione)*

$\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))$

ZFC 3_φ *(Comprensione)*

per ogni formula $\varphi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ si ha che

$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$

ZFC 4 *(Coppia)*

$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

ZFC 5 *(Unione)*

$\forall F \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A)$

ZFC 6_φ *(Rimpiazzamento)*

per ogni formula $\varphi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ si ha che

$\forall x \in A \exists! y \varphi \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi$

ZFC 7 *(Infinito)*

$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(\mathrm{S}(y) \in x))$

ZFC 8 *(Potenza)*

$\forall x \exists y \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y)$

ZFC 9 *(Scelta)*

$\forall x \exists R(R$ è un buon ordine su $x)$

Negli assiomi 7,8,9 abbiamo usato delle abbreviazioni: il simbolo $\subset$ (che indica la relazione "è sottoinsieme di) è definito nel modo seguente:

$$\forall x \forall y(x \subset y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y))$$

Il simbolo $\emptyset$ (anche indicato con 0) denota l'insieme vuoto; il simbolo $\mathrm{S}(x)$ denota il successore di x e si definisce come

$$\forall x(\mathrm{S}(x) = x \cup \{x\})$$

Un buon ordine su x è una relazione R transitiva, non riflessiva e tricotomica su x tale che ogni sottoinsieme di x ha un elemento R-minimo.

Si noti che questa lista di assiomi non è finita: gli assiomi di comprensione e rimpiazzamento sono infatti schemi di assiomi: per ogni formula φ di cui parlano c'è un assioma. Poiché ci sono infinite formule, la lista testè riportata è in realtà infinita. Da questo fatto sorse l'interesse a cercare un'assiomatizzazione finita e la conseguente scoperta della sua inesistenza.

Prima di addentrarci nei dettagli della dimostrazione, introduciamo qualche definizione. Per via del paradosso di Russell, se φ è una formula qualsiasi l'entità $\{x \mid \varphi\}$ in generale non è un insieme. Chiamiamo la collezione di tutti gli x tali che φ una **classe**. È importante ricordare che l'analogia più pertinente al concetto di classe non è un insieme, ma la formula che la definisce. Indicheremo la classe degli ordinali con $\mathbb{ON}$ e la classe di tutti gli insiemi nel dominio di interesse $\mathbb{V}$, anche chiamata "universo. Formalmente $\mathbb{V} = \{x \mid x = x\}$.

1 Definizione

Per ogni $\alpha \in \mathbb{ON}$ definiamo $R(\alpha)$ per ricorsione transfinita, come segue:

(i) $R(0) = 0$

(ii) $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(\alpha)$

(iii) $R(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi)$ *quando α è un ordinale limite.*

Definiamo la classe $\mathbb{WF} = \bigcup\{R(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{ON}\}$ (gli elementi di $\mathbb{WF}$ si chiamano **ben fondati**). Per fare un esempio, con questa notazione l'assioma di fondazione diventa $\mathbb{V} = \mathbb{WF}$.

Con queste nozioni possiamo tentare una prima descrizione approssimativa della strategia che useremo per dimostrare che ZFC non è finitamente assiomatizzabile. Il principio di riflessione (teorema 6) afferma che ZF dimostra che per ogni ordinale γ esiste un δ maggiore di γ tale che, data una lista finita $\theta_1, \ldots, \theta_n$ di formule, queste sono "vere in $R(\delta)$. Supponiamo per assurdo che ZFC sia finitamente assiomatizzabile mediante $\theta_1, \ldots, \theta_n$, ovvero che le condizioni 1 e 2 a pagina 3 valgano. Sia β il più piccolo ordinale tale che $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sono "vere in $R(\beta)$. Poiché $\theta_1, \ldots, \theta_n$ provano ogni teorema di ZFC, ZFC è "vero in $R(\beta)$, e quindi per il principio di riflessione la frase

$$\textit{esiste un ordinale } \alpha \textit{ tale che } \theta_1, \ldots, \theta_n \textit{ sono "vere in } R(\alpha) \tag{1}$$

è "vera in $R(\beta)$, da cui $\alpha \in R(\beta)$ e quindi $\alpha < \beta$, contraddicendo alla scelta minimale di β.

Vediamo ora i dettagli della dimostrazione. Innanzitutto abbiamo bisogno di definire in modo più preciso la nozione "A è vero in B, e per fare questo dobbiamo introdurre i concetti di relativizzazione e di assolutezza.

2 Definizione

Per ogni formula φ e per ogni classe $\mathbb{M}$ esiste un'unica formula $\psi = \varphi^{\mathbb{M}}$ che esprime *la* **relativizzazione** *di* φ a $\mathbb{M}$. ψ *si costruisce per ricorsione dalle seguenti regole:*

$$\begin{aligned}(x = y)^{\mathbb{M}} &= x = y \\ (x \in y)^{\mathbb{M}} &= x \in y \\ (\zeta \wedge \xi)^{\mathbb{M}} &= \zeta^{\mathbb{M}} \wedge \xi^{\mathbb{M}} \\ (\neg\zeta)^{\mathbb{M}} &= \neg(\zeta^{\mathbb{M}}) \\ (\exists x\zeta)^{\mathbb{M}} &= \exists x(x \in \mathbb{M} \wedge \zeta^{\mathbb{M}})\end{aligned}$$

In pratica $\varphi^{\mathbb{M}}$ è la formula ottenuta da φ sostituendo al quantificatore $\exists x$ l'espressione $\exists x \in \mathbb{M}$. Questo è facilmente spiegabile ricordando che una classe è definita da una formula: sia $\mathbb{M} = \{x \mid \chi(x)\}$; risulta evidente che $\exists x\varphi^{\mathbb{M}}$ è equivalente a $\exists x(\chi(x) \wedge \varphi^{\mathbb{M}})$, che è equivalente a $\exists x \in \mathbb{M}\ \varphi^{\mathbb{M}}$. È chiaro che, essendo $\mathbb{V}$ l'universo, per ogni φ si ha $\varphi^{\mathbb{V}} = \varphi$.

Definiamo ora il concetto di "vero in: per ogni formula φ e per ogni classe $\mathbb{M}$ la frase φ è *vera in* $\mathbb{M}$ significa $\varphi^{\mathbb{M}}$; per un insieme di formule S la frase S è *vera in* $\mathbb{M}$ significa che per ogni φ in S vale $\varphi^{\mathbb{M}}$. In questo caso si dice anche che $\mathbb{M}$ è un **modello** per S.

Il problema di questa definizione di verità è che è relativa ad una classe. Come possiamo essere sicuri che se $\mathbb{M} \neq \mathbb{N}$ e φ è vera sia in $\mathbb{M}$ che in $\mathbb{N}$, $\varphi^{\mathbb{M}}$ e $\varphi^{\mathbb{N}}$ abbiano lo stesso significato? Possiamo risolvere la questione introducendo il concetto di assolutezza.

3 Definizione

Per ogni formula φ *con al massimo* $x_1, \ldots, x_n$ *variabili libere e per classi* $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ *si dice che* φ *è* **assoluta** *per* $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ *se*

$$\forall\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{M}(\varphi^{\mathbb{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n))$$

Si dice che φ *è assoluta per* $\mathbb{M}$ *se è assoluta per* $\mathbb{M}, \mathbb{V}$.

Vediamo ora come possiamo applicare l'assolutezza alle funzioni: l'espressione $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ è definita dalla formula $\exists! y\ \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, e quindi f è assoluta per $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ significa che la formula $\exists! y\ \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ è assoluta per $\mathbb{M}, \mathbb{N}$.

Per quanto concerne il concetto di assolutezza, il punto critico dello schema della dimostrazione a pag. 6 è l'affermazione: "la frase (1) è vera in $R(\beta)$. Noi sappiamo che ZFC prova sia "la frase (1) è vera in $\mathbb{V}$, sia "la frase (1) è vera in $R(\beta)$. Il problema è che non è chiaro a priori che le due proposizioni fra virgolette abbiano lo stesso significato. Bisogna verificare che la funzione $R(\alpha)$ (usata nella frase (1)) sia assoluta per $R(\beta)$. La dimostrazione di questo fatto non è complicata ma è abbastanza lunga ed esula dall'argomento di questa tesi: ne riporteremo quindi soltanto le linee principali[1], notando che tutta la dimostrazione ha luogo in ZF. Si dimostra che in $R(\beta)$ le funzioni definite per ricorsione sono assolute; si dimostra che per ogni ordinale $\alpha < \beta$ si ha $R(\alpha) = \{x \mid \operatorname{rank}(x) < \alpha\}$ dove la funzione rank è definita per ricorsione su x; da ciò si deduce che $R(\alpha)^{R(\beta)} = R(\alpha) \cap R(\beta) = R(\alpha)$, e perciò la funzione $R(\alpha)$ è assoluta per $R(\beta)$.

Passiamo ora a dimostrare il principio di riflessione. La dimostrazione consta di una definizione, un lemma e il teorema vero e proprio.

4 Definizione
Una lista di formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ è **chiusa** *se per ogni $i \leq n$ ogni sottoformula di φ_i è una formula della lista.*

5 Lemma
Siano $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ due classi tali che $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$. Sia $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ una lista chiusa di formule. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *sono assolute per* $\mathbb{M}, \mathbb{N}$.

[1] Per i dettagli, cfr. [Kun80]: (III 5.7), (IV 5.6), (IV 5.7), (IV 5.8).

(ii) Per ogni φ_i della forma $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ con $y_1, \ldots, y_l$ variabili libere si ha

$$\forall y_1, \ldots, y_l (\exists x \in \mathbb{N}\ \varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \to \exists x \in \mathbb{M}\ \varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l))$$

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sia φ_i della forma $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ e assoluta per $\mathbb{M}, \mathbb{N}$. Siano $y_1, \ldots, y_l \in \mathbb{M}$ tali che $\exists x \in \mathbb{N}\ \varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$. Per l'assolutezza di φ_i si ha $\varphi_i^{\mathbb{M}}(y_1, \ldots, y_l)$ e quindi $\exists x \in \mathbb{M}\ \varphi_j^{\mathbb{M}}(x, y_1, \ldots, y_l)$; per assolutezza di φ_j si ha poi $\exists x \in \mathbb{M}\ (\varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Dimostriamo l'assolutezza per $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ di φ_i per induzione sulla sua lunghezza. Le formule atomiche (cioè $x = y, x \in y$) sono assolute per $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ per la definizione 2. Assumiamo ora di aver dimostrato l'assolutezza per $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ di tutte le formule più corte di φ_i. Se φ_i è della forma $\varphi_j \wedge \varphi_k$ o della forma $\neg\varphi_j$ allora φ_i è assoluta per ipotesi induttiva . Supponiamo ora che φ_i sia della forma $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ e si fissino $y_1, \ldots, y_l \in \mathbb{M}$; allora

$$\varphi_i^{\mathbb{M}}(y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{M}\ \varphi_j^{\mathbb{M}}(x, y_1, \ldots, y_l)$$

per la definizione 2; per assolutezza di φ_j (ipotesi induttiva) si ha

$$\exists x \in \mathbb{M}\ \varphi_j^{\mathbb{M}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{M}\ \varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$$

per la condizione (ii) e il fatto che $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ si ha

$$\exists x \in \mathbb{M}\ \varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N}\ \varphi_j^{\mathbb{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$$

che ancora per la definizione 2 è equivalente a $\varphi_i^{\mathbb{N}}(y_1, \ldots, y_l)$. □

6 Teorema (Principio di Riflessione)

Date le formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ZF prova che

$$\forall \alpha \in \mathbb{ON}\ \exists\, \beta > \alpha\ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n \textit{ sono assolute per } R(\beta))$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità assumiamo che la lista $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sia chiusa; se non lo è la si estende a una che lo sia. Definiamo la funzione $\mathbb{G}_i : \mathbb{V}^l \longrightarrow \mathbb{ON}$ in modo che

$$\mathbb{G}_(y_1, \ldots, y_l) = \begin{cases} \min\{\eta \mid \exists x \in R(\eta)\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)\} \\ \qquad \text{se } \varphi_i \text{ è della forma } \exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l) \\ 0 \qquad \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la funzione

$$\mathbb{F}_i(\xi) = \sup\{\mathbb{G}_i(y_1, \ldots, y_l) \mid y_1, \ldots, y_l \in R(\xi)\}$$

(il sup esiste per rimpiazzamento). Per il lemma 5 con $\mathbb{N} = \mathbb{V}$ e $\mathbb{M} = R(\beta)$, se β è un ordinale limite tale che per ogni i si ha $\forall \xi < \beta\ (\mathbb{F}_i(\xi) < \beta)$ allora $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sono assolute per $R(\beta)$, perché per definizione di $\mathbb{F}_i$ è soddisfatta la condizione (ii) dell'enunciato del lemma. Dimostramo ora che per ogni α esiste un $\beta > \alpha$ con queste caratteristiche. Si definisce per ricorsione β_p per $p \in \omega$ come segue: sia $\beta_0 = \alpha$ e

$$\beta_p = \max\{\beta_p + 1, \mathbb{F}_1(\beta_p), \ldots, \mathbb{F}_n(\beta_p)\}$$

Sia $\beta = \sup\{\beta_p \mid p \in \omega\}$. Poiché $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \ldots$, β è un ordinale limite maggiore di α. Si noti che $\xi < \xi' \to \mathbb{F}_i(\xi) \leq \mathbb{F}_i(\xi')$. Se $\xi < \beta$ allora esiste un p tale che $\xi < \beta_p$ e quindi $\mathbb{F}_i(\xi) \leq \mathbb{F}_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta$. $\square$

Completa la tesi una dimostrazione formale dell'argomento schematizzato a pagina 6.

7 Teorema

ZFC non è finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione. Siano $\theta_1, \ldots, \theta_n$ enunciati che soddisfano alle condizioni 1 e 2 a pagina 3. Il principio di riflessione (teorema 6) garantisce che per ogni ordinale

γ esiste un $\delta > \gamma$ tale che per ogni $i \leq n$ θ_i è assoluta per $R(\delta)$. Sia β il minimo dei possibili δ. Poiché $\theta_1, \ldots, \theta_n$ dimostrano ogni teorema di ZFC e ZFC dimostra l'esistenza di un α tale che $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sono assolute per $R(\alpha)$ (sempre per il principio di riflessione), e dato che ZF dimostra che la funzione $R(\alpha)$ è assoluta in $R(\beta)$ per ogni $\alpha < \beta$ si ha che l'asserzione

$$\exists \alpha \textit{ tale che } \theta_1, \ldots, \theta_n \textit{ sono assolute per } R(\alpha)$$

è assoluta per $R(\beta)$, e quindi

$$\exists \alpha < \beta \textit{ tale che } \theta_1, \ldots, \theta_n \textit{ sono assolute per } R(\alpha)$$

contraddicendo alla scelta minimale di β. $\square$

Riferimenti bibliografici

[DCS80] Maria Luisa Dalla Chiara Scabia. *Logica.* Mondadori, Milano, 1980.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory: an Introduction to Independence Proofs.* North Holland, Amsterdam, 1980.