Gli assiomi di Teoria della Categoria come fondamenti per la matematica

Leo Liberti

Luglio 1996

Abstract

Si prova che se l'universo è ristretto ai ben fondati, ovvero se $\mathcal{V} = \mathcal{WF}$, allora gli assiomi di Teoria della Categoria (CatAx) sono equivalenti agli assiomi posti da Zermelo e Fraenkel più l'assioma di scelta (Zfc).

Gli assiomi di Teoria della Categoria come fondamenti per la matematica

1 Introduzione

Il ruolo che la teoria della categoria riveste nella matematica è solitamente quello di strumento per la soluzione di questioni che possono essere meglio comprese attraverso una visualizzazione concreta. In particolare questo approccio è valido nell'algebra commutativa classica e dovunque si possano applicare le tecniche del "diagram chasing". Vi è altresì una nutrita schiera di matematici che considerano la teoria della categoria come una disciplina a sè stante e in qualche modo equivalente a ZFC, senza che tuttavia, a mia migliore conoscenza, sia stato pubblicato alcun risultato realmente significativo sull'argomento. L'unico articolo di qualche rilievo che abbia letto sul tentativo di porre gli assiomi di teoria della categoria (CATAX) come fondamenti della matematica è [Lawvere], che ha il grande merito di aver definito il linguaggio e gli assiomi di teoria della categoria in modo estremamente felice ma il difetto di non aver mosso un passo nella direzione della dimostrazione d'equivalenza con ZFC.

I vantaggi del dimostrare l'equivalenza di CATAX e ZFC sono soprattutto d'interesse teorico, non essendoci nessun altro beneficio evidente nel voler ricostruire la matematica e poi dimostrare che la matematica così costruita è equivalente a quella data da ZFC.

L'unica nozione introdotta dal linguaggio di teoria della categoria è il concetto di freccia. Non ci sono oggetti concreti da cui la freccia può partire o arrivare. Si tratta perciò di cercare di usare le frecce al posto degli insiemi e al posto della relazione di appartenenza. Basilarmente ci sono due tipi di frecce: le frecce identità (che non cambiano nulla) e le frecce non identità. In questa trattazione le prime "funzioneranno" da insiemi e le seconde da relazioni fra insiemi. La relazione di appartenenza sarà definita grazie alle frecce non identità che hanno sè stesse come unica fattorizzazione. In generale nessuno dei diagrammi considerati avrà proprietà di commutatività.

2 Assiomi

Diamo in questa sezione un'esposizione del linguaggio, degli assiomi e di alcuni risultati elementari delle due teorie CatAx e Zfc.

2.1 Gli assiomi di Teoria della Categoria

Il linguaggio di CatAx è formato dai simboli $\exists, , \neg, (,), =, \circ$, dai simboli che rappresentano le frecce (tutte le lettere dell'alfabeto, indicizzate anche, all'occorrenza, con i numeri ordinali), e dal simbolo "$g_0, \ldots, g_\alpha$", che descrive una freccia $f = g_0 \circ \cdots \circ g_\alpha$.

Le formule sono $x = y$, $u = x \circ y$, tutte le loro combinazioni con e $\neg$ e tutte le loro chiusure universali. Per formule ϕ e ψ e per frecce x e y, si hanno anche le seguenti abbreviazioni:

$\forall x(\phi)$	abbrevia	$\neg(\exists x(\neg(\phi)))$
$(\phi) \vee (\psi)$	abbrevia	$\neg((\neg(\phi))(\neg(\psi)))$
$(\phi) \rightarrow (\psi)$	abbrevia	$(\neg(\phi)) \vee (\psi)$
$(\phi) \leftrightarrow (\psi)$	abbrevia	$((\phi) \rightarrow (\psi))((\phi) \rightarrow (\psi))$
$x \neq y$	abbrevia	$\neg(x = y)$
$\exists! x(\phi)$	abbrevia	$\exists x(\phi)\forall y(y \neq x \rightarrow \neg\phi)$

Inoltre, quando il significato sarà chiaro dal contesto, si potranno omettere le parentesi e il simbolo $\circ$, cosicché, ad esempio, la formula $\forall x(\exists y(\exists z(x \circ y = z)))$ si abbrevierà in $\forall x \exists y \exists z(xy = z)$.

Il sistema di assiomi CatAx$^-$ è così composto:

CatAx 0: $\forall x \exists! y \exists! z(y \circ x = xx \circ z = x)$

2.1 (Defn.) *L'unico y descritto da* CatAx *0 è indicato con Dom(x) e l'unica z con Ran(x).*

CatAx 1: $\forall x(\mathrm{Dom}(\mathrm{Dom}(x)) = \mathrm{Dom}(x)\mathrm{Dom}(\mathrm{Ran}(x)) = \mathrm{Ran}(x)\mathrm{Ran}(\mathrm{Dom}(x)) =$
$= \mathrm{Dom}(x)\mathrm{Ran}(\mathrm{Ran}(x)) = \mathrm{Ran}(x))$
CatAx 2: $\forall x \forall y(\exists u(xy = u) \leftrightarrow \mathrm{Ran}(y) = \mathrm{Dom}(x))$
CatAx 3: $\forall x \forall y \exists u \exists v(xy = uxy = v \rightarrow u = v)$
CatAx 4: $\forall x \forall y \exists u(xy = u \rightarrow \mathrm{Dom}(y) = \mathrm{Dom}(u)\mathrm{Ran}(x) = \mathrm{Ran}(u))$
CatAx 5: $\forall x \forall y \forall z \forall w \forall u \forall f \forall g(xy = uyz = wxw = fuz = g \rightarrow f = g)$

2.2 (Defn.) *Una fattorizzazione di una freccia f è una stringa di frecce $g_0, \ldots, g_\alpha$ tale che $f = g_0 \circ \cdots \circ g_\alpha$*

Ogni freccia f ha almeno una fattorizzazione, ovvero $f = f$.

2.3 (Defn.) $\forall f(Atom(f) \leftrightarrow \neg \exists g \exists h(g \neq fh \neq f(f = g \circ h)))$

Le frecce f tali che $\mathrm{Atom}(f)$ sono chiamate frecce atomiche.

2.4 (Defn.) $\forall x(Obj(x) \leftrightarrow Dom(x) = x \vee Ran(x) = x)$

Le frecce f tali che $\mathrm{Obj}(f)$ sono chiamate oggetti o insiemi.

2.5 (Defn.) $\forall f \forall x \forall y(\exists(f : x \to y) \leftrightarrow \exists f(Dom(f) = x Ran(f) = y))$

Questa definizione sta a significare che restringiamo la nostra attenzione alle frecce che sono solitamente chiamate "suriettive" (nel linguaggio della teoria degli insiemi). Per fare un esempio, secondo la definizione 2.5, se G e H sono gruppi e H non è il gruppo $\{1\}$, l'omomorfismo $f : G \to H$ tale che $\forall g \in G(f(g) = 1_H)$ non è una freccia permessa in questa trattazione. Dagli assiomi non è derivabile alcuna contraddizione ad assumere che esista una freccia non "suriettiva", pertanto la definizione 2.5 è equivalente a dire che l'espressione $f : x \to y$ vuol dire che $\mathrm{Dom}(f) = x \mathrm{Ran}(f) = y f$ è "suriettiva".

Si noti che secondo CatAx$^-$ una freccia $f : x \to y$ non è analoga a una funzione di Zfc bensì a una relazione fra x e y, ovvero a un sottoinsieme di $x \times y$.

Per costruire una struttura "a diagramma" che si comporti come $\mathcal{WF}$ (la classe degli insiemi ben fondati) abbiamo bisogno di altri tre assiomi, che aggiunti ai cinque precedenti formano il sistema CatAx.

CatAx 6: $\exists! y \forall x(\mathrm{Obj}(x) \to \exists!(f : x \to y)(\mathrm{Atom}(f)))$

2.6 (Defn.) *L'unico y descritto dall'assioma* CatAx *6 viene indicato con $\emptyset$.*

Vale la pena di ricordare a questo punto che nel linguaggio di teoria della categoria un oggetto con le proprietà descritte da CatAx 6 viene chiamato un oggetto finale.

2.7 (Lemma) $Obj(\emptyset)$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\neg\mathrm{Obj}(\emptyset)$. Sia $x = \mathrm{Dom}(\emptyset)$ e $y = \mathrm{Ran}(\emptyset)$. Si ha allora che $x \neq y, x \neq \emptyset$ e $y \neq \emptyset$. Per CatAx 6 esistono frecce atomiche $f : x \to \emptyset$ e $g : y \to \emptyset$. Per CatAx 1 si ha che

$$\mathrm{Ran}(\emptyset) = \mathrm{Ran}(\mathrm{Ran}(f)) = \mathrm{Ran}(f) = \emptyset = \mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(\mathrm{Dom}(g)) = \mathrm{Dom}(\emptyset)$$

e dunque, stante la definizione 2.4, $\mathrm{Obj}(\emptyset)$. □

CatAx 7: $\forall g_0, \ldots, g_\alpha(\exists f = g_0 \circ \cdots \circ g_\alpha \mathrm{Obj}(g_0) \to \exists x(\mathrm{Obj}(x)$
$\forall i \leq \alpha(\exists(h : \mathrm{Dom}(g_i) \to x)(\mathrm{Atom}(h) \neg\mathrm{Obj}(h)))$
$\forall y \forall i \leq \alpha(\mathrm{Dom}(g_i) \neq y \to \forall(h : y \to x)(\neg\mathrm{Atom}(h)))))$

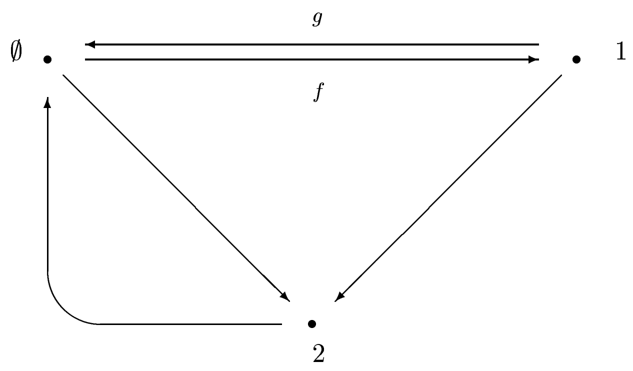
2.8 (Defn.) *La x descritta da* CatAx *6 è indicata con $Set(g_0, \ldots, g_\alpha)$, ed è un insieme. Gli oggetti $Dom(g_i)$ sono detti elementi di x.*

2.9 (Defn.) $\forall x \forall y (x \in y \leftrightarrow x \neq y y \neq \emptyset \exists (f : x \to y)(Atom(f)))$

Secondo questa definizione, la relazione di appartenenza $x \in y$ sussiste se e solo se esiste una freccia $f : x \to y$ la cui unica fattorizzazione è $f = f$, se $x \neq y$ e infine se $y \neq \emptyset$. Questa definizione evita le anomalie del tipo $x \in x$.

$$\text{CatAx 8:} \quad \forall x \forall y (\mathrm{Obj}(x) \mathrm{Obj}(y) \forall z (\mathrm{Obj}(z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \to x = y)$$

L'assioma CatAx 8 è analogo all'assioma Zfc di estensionalità. Il fatto che sia necessario per questa costruzione è dimostrato con il seguente esempio. La freccia oggetto che rappresenta il numero ordinale 2 deve contenere 0 (la freccia oggetto $\emptyset$) e la freccia oggetto 1.



Per CatAx 6 esistono (uniche) frecce atomiche da $\emptyset$ a $\emptyset$ (la freccia oggetto $\emptyset$ stessa) e da 1 a $\emptyset$ (denominata g nel diagramma). Consideriamo la freccia $1 \circ f$. Per CatAx 7 deve esistere un oggetto (chiamato 2 nel diagramma) tale che esistano frecce atomiche da $\mathrm{Dom}(1) = 1$ a 2 e da $\mathrm{Dom}(f) = \emptyset$ a 2. Ora prendiamo la freccia $\emptyset \circ g$. CatAx 7 asserisce che deve esistere un oggetto, che chiameremo $2'$, tale che esistano frecce atomiche da $\mathrm{Dom}(\emptyset) = \emptyset$ a $2'$ e da $\mathrm{Dom}(g) = 1$ a $2'$. Poiché vogliamo avere un unico oggetto che rappresenti il numero ordinale 2, postuliamo che l'oggetto "creato" da CatAx 7 dipenda interamente soltanto dai dominî delle frecce g_i menzionate nell'assioma.

In breve, ciò che gli assiomi CatAx 6, 7 e 8 fanno, insieme alla definizione 2.9, è mimare la relazione di appartenenza degli insiemi ben fondati. L'assioma CatAx 6 serve ad assicurare che esistano abbastanza frecce perché CatAx 7 riesca a costruire i ben fondati. È facile intuire la necessità di CatAx 6 dall'esempio seguente. Cerchiamo di costruire l'insieme $\{\{0, 2\}, \{1\}\}$ senza CatAx 6.

$$\begin{tikzcd}
\overset{\emptyset}{\bullet} \arrow[r, "f"'] \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \overset{1}{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{\{1\}}{\bullet} \\
\underset{\{0,2\}}{\bullet} & \underset{2}{\bullet} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Per il momento, per semplicità, postuliamo l'esistenza della freccia oggetto $\emptyset$ (vedremo nella sezione 4.1 che questo non è necessario). Questa garantisce, grazie a CatAx 7 e 8, l'esistenza della struttura

$$\emptyset\bullet \longrightarrow \bullet 1$$

che è analoga, vista la definizione 2.9 di appartenenza, alla struttura degli insiemi $\emptyset, 1 := \{\emptyset\}$. Usiamo la freccia oggetto 1, CatAx 7 e 8 per creare l'oggetto $\{1\}$; usiamo f (vedi diagramma sopra), CatAx7 e 8 per creare l'oggetto 2; usiamo g (vedi diagramma), CatAx7 e 8 per creare l'oggetto $\{0,2\}$. È ora evidente che con quello che abbiamo costruito non è possibile creare l'oggetto $\{\{0,2\},\{1\}\}$, perché non vi è alcuna freccia che parte da $\{0,2\}$ e arriva a $\{1\}$ nè alcuna che parte da $\{1\}$ e arriva a $\{0,2\}$. L'assioma CatAx 6 ovvia proprio a questo inconveniente, introducendo una freccia che da ogni oggetto torna a $\emptyset$. La definizione 2.9 di appartenenza tiene conto di questo e limita il significato di $x \in y$ solo quando $y \neq \emptyset$.

2.2 Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel

Il linguaggio di Zfc è formato dai simboli $\exists, , \neg, (,), \in, =$ e dai simboli che rappresentano gli insiemi (lettere dell'alfabeto indicizzate secondo i numeri ordinali).

Gli assiomi di Zfc sono i seguenti (cfr. [Kunen], pag. xv):

Zfc 0	$\exists x(x = x)$	*(Esistenza)*
Zfc 1	$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$	*(Estensionalità)*
Zfc 2	$\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \neg \exists z(z \in x z \in y)))$	*(Fondazione)*
Zfc 3	$\forall \phi(x, z, w_1, \ldots, w_n) \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \phi)$	*(Comprensione)*
Zfc 4	$\forall x \forall y \exists z(x \in z y \in z)$	*(Coppia)*
Zfc 5	$\forall F \exists A \forall Y \forall x(x \in Y Y \in F \to x \in A)$	*(Unione)*
Zfc 6	$\forall \phi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)(\forall x \in A \exists! y \phi \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi)$	*(Rimpiazzamento)*

2.10 (Defn.) $\forall x \forall y(x \subset y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y))$

Per Zfc 0, 1, 3 si può definire $\emptyset$. Inoltre si definisce $\forall x(\mathrm{S}(x) = x \cup \{x\})$.

ZFC 7 $\exists x(\emptyset \in x \forall y \in x(\mathrm{S}(y) \in x))$ *(Infinito)*
ZFC 8 $\forall x \exists y \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y)$ *(Potenza)*

Si definisce nel modo usuale il prodotto cartesiano di due insiemi (cfr. [Kunen], pag. 13). Una relazione R su un insieme x è un sottoinsieme di $x \times x$. Un ordine totale su x è una relazione R su x che è transitiva, non riflessiva e rispetta la legge di tricotomia. Un buon ordine R su x è un ordine totale tale che ogni sottoinsieme di x ha un elemento R-minimo.

ZFC 9 $\forall x \exists R(R$ è un buon ordine su $x)$ *(Scelta)*

3 Consistenza di CatAx

Prima di iniziare qualsiasi costruzione con gli assiomi di CatAx è d'uopo sincerarsi che non siano inconsistenti, ovvero che non si possano derivare da CatAx le formule χ e $\neg\chi$. Ci serviamo a questo proposito del teorema citato da [Kunen] a pag. 113, che fornisce una tecnica per provare la consistenza di una teoria.

3.1 Tecniche elementari di prove di consistenza

Serve innanzitutto un po' di terminologia. Una formula chiusa è una formula ϕ tale che la chiusura universale di ϕ è ϕ. Se T è un insieme di formule chiuse il fatto che T sia consistente si esprime con $\mathrm{Con}(T)$. Per ogni formula ϕ e per ogni classe $\mathcal{M}$ esiste un'unica formula $\psi = \phi^{\mathcal{M}}$ che esprime la relativizzazione di ϕ a $\mathcal{M}$. ψ si costruisce per ricorsione dalle seguenti regole (nel linguaggio di Zfc):

$$\begin{array}{rcl} (x = y)^{\mathcal{M}} & = & x = y \\ (x \in y)^{\mathcal{M}} & = & x \in y \\ (\zeta\xi)^{\mathcal{M}} & = & \zeta^{\mathcal{M}}\xi^{\mathcal{M}} \\ (\neg\zeta)^{\mathcal{M}} & = & \neg(\zeta^{\mathcal{M}}) \\ (\exists x\zeta)^{\mathcal{M}} & = & \exists x(x \in \mathcal{M}\zeta^{\mathcal{M}}) \end{array}$$

Se S è un insieme di formule chiuse, $\mathcal{M}$ è un modello per S significa che $\forall\phi \in S(\phi^{\mathcal{M}})$.

3.1 (Teorema) *Siano S e T due insiemi di formule chiuse nel linguaggio di* Zfc*. Se esiste una classe $\mathcal{M}$ tale che T prova che $\mathcal{M} \neq \emptyset$ e $\mathcal{M}$ è un modello per S, allora $Con(T) \rightarrow Con(S)$.*

Dimostrazione. Se S fosse inconsistente, potremmo provare $\chi\neg\chi$ da S per ogni formula chiusa χ. Poi da T potremmo provare che le formule di S sono vere in $\mathcal{M}$, e quindi anche $\chi^{\mathcal{M}}\neg\chi^{\mathcal{M}}$, e quindi T sarebbe inconsistente. Contraddizione. $\square$

3.2 Applicazione a CatAx

La strategia per provare Con(CatAx) è quella di porre $T =$ Zfc, $S =$ CatAx, trovare una classe $\mathcal{M} \neq \emptyset$ che sia un modello per S e ricordare che il sistema Zfc è consistente (cfr. [Kunen], pag. 125). La tesi seguirà poi dal teorema 3.1. Dimostreremo che la classe $\mathcal{M}$ richiesta è quella degli insiemi ben fondati $\mathcal{WF}$. In particolare avremo anche provato che se l'universo è ristretto ai ben fondati, Zfc $\Rightarrow$ CatAx. Ma che l'universo sia costituito dai ben fondati è già un assioma di Zfc (fondazione), e dunque Zfc $\Rightarrow$ CatAx$^{\mathcal{WF}}$.

Si prenda come $\mathcal{M}$ tutto l'universo di ZFC, ovvero, per fondazione, $\mathcal{M} = \mathcal{WF}$. Abbiamo visto che esistenza, estensionalità e comprensione provano che $\exists\emptyset$, quindi $\mathcal{WF}$ è non vuoto. Per la costruzione induttiva di $\mathcal{WF}$ da ZFC rimandiamo il lettore a [Kunen], capitolo III. Tramite gli insiemi ben fondati si possono definire le frecce.

3.2 (Defn.)
- *Una freccia f da x a y è un sottoinsieme di $x \times y$.*
- *Per ogni freccia f da x a y si definiscono Left$(f) = \{a | \exists b \in y (< a, b > \in f\}$ e Right$(f) = \{b | \exists a \in x (< a, b > \in f)\}$.*
- *Se f è una freccia da x a y tale che Right$(f) = y$ allora si scrive $f : x \to y$.*
- *$\forall (f : x \to y)($Dom$(f) = \{< a, a > | a \in$ Left$(f)\}$ Ran$(f) = \{< b, b > | b \in$ Right$(f)\})$.*
- *Una freccia x per cui esiste un'altra freccia f tale che Dom$(f) = x$ o Ran$(f) = x$ si chiama freccia identità.*

ZFC prova inoltre il seguente

3.3 (Lemma) $\forall (f : x \to y) \forall (g : y \to z) \exists ! h = \{< a, c > | a \in x c \in z \exists b \in y (< a, b > \in f$
$< b, c > \in g)\}$

ovvero che date due frecce $f : x \to y$ e $g : y \to z$ esiste un'unica freccia $h : x \to z$ che ha lo stesso effetto che applicare f a x e poi g a $f(x)$.

3.4 (Defn.) *L'unica freccia h definita sopra è indicata con $g \circ f$.*

3.5 (Teorema) ZFC $\Rightarrow$ CATAX$^{\mathcal{WF}}$

Dimostrazione.

CATAX 0: Per ZFC (assioma di estensionalità) si ha che $\forall f (\exists !\text{Left}(f) \exists !\text{Right}(f))$ e dunque $\exists !\text{Dom}(f) \exists !\text{Ran}(f)$. Ora per definizione di Dom(f) e Ran(f) (3.2) e dell'operazione $\circ$ (3.4) si ha che $\text{Dom}(f) \circ f = f$ e che $f \circ \text{Ran}(f) = f$.

CATAX 1: Immediato, per la definizione (3.2).

CATAX 2: $(\to)$ immediato dalla definizione di $\circ$ (3.4) e $(\leftarrow)$ per (3.3).

CATAX 3: Per il lemma 3.3 la composizione di due frecce è unica.

CATAX 4: Sempre per il lemma 3.3.

CATAX 5: Se $f = x \circ (y \circ z)$ e $g = (x \circ y) \circ z$ per definizione si ha:

$$\begin{aligned} f &= x \circ (y \circ z) = \{< d, a > | \exists c (< d, c > \in x < c, a > \in y \circ z)\} \\ &= \{< d, a > | \exists c (< d, c > \in x \exists b (< c, b > \in y < b, a > \in z))\} \\ &= \{< d, a > | \exists c \exists b (< d, c > \in x < c, b > \in y < b, a > \in z)\} \\ &= \{< d, a > | \exists b (< d, b > \in x \circ y < b, a > \in z)\} = (x \circ y) \circ z = g \end{aligned}$$

Per gli assiomi 6,7,8 prendiamo la definizione 2.9 per esprimere $x \in y$.

CatAx 6: Sia l'unico y di cui parla l'assioma l'insieme vuoto. Allora per ogni insieme x esiste un'unica relazione con $\emptyset$, ovvero la relazione vuota.

CatAx 7: L'esistenza di $\mathrm{Set}(g_0, \ldots, g_\alpha)$ è garantita da coppia, unione, rimpiazzamento, infinito e potenza.

CatAx 8: Immediato, per l'assioma di estensionalità di Zfc. $\square$

4 CatAx prova Zfc

Dopo aver verificato la consistenza degli assiomi di CatAx, ci proponiamo ora di usarli per costruire una categoria $\mathcal{WF}'$ analoga alla classe insiemistica $\mathcal{WF}$ dei ben fondati. Proveremo che gli assiomi di Zfc sono validi in $\mathcal{WF}'$ e concluderemo perciò che CatAx prova $\text{Zfc}^{\mathcal{WF}}$. Ma poiché Zfc asserisce che l'universo è $\mathcal{WF}$ (assioma di fondazione), si deduce che $\text{Zfc}^{\mathcal{WF}} = \text{Zfc}$ e quindi che CatAx prova Zfc.

4.1 Costruzione di $\mathcal{WF}$

Per [Kunen], pag. 10, dagli assiomi di logica del linguaggio si può derivare il teorema $\exists x(x = x)$, dunque la categoria $\mathcal{WF}'$ è non vuota. Per l'assioma CatAx 6 esiste un unico oggetto finale chiamato $\emptyset$. Per CatAx 7 esiste un oggetto $\{\emptyset\}$ e per CatAx 8 quest'oggetto è unico e viene indicato con 1. Procedendo induttivamente in questo modo si ottengono gli ordinali: si definisce per ogni x l'oggetto $\mathrm{S}(x) = x \cup \{x\}$ e per CatAx 7 e 8 esiste un unico oggetto ω che contiene $\emptyset$ e per ogni x, il suo successore.

Il passo successivo è costruire l'insieme potenza. Cominciamo con la seguente definizione.

4.1 (Defn.) $\forall x \forall y(x \subset y \leftrightarrow Obj(x)\, Obj(y) \forall z(z \in x \to z \in y))$

Gli assiomi CatAx 6, 7 e 8 garantiscono l'esistenza dell'insieme dei sottoinsiemi di un insieme dato.

4.2 (Lemma) $\forall x \exists! y \forall z(z \subset x \leftrightarrow z \in y)$

4.3 (Defn.) *L'unica y descritta dal lemma precedente si indica con $\mathcal{P}(x)$.*

Analogamente all'insieme potenza, si definisce l'insieme unione. Per ogni x, seguendo le frecce al contrario si trovano gli elementi degli elementi di x e poi i soliti assiomi CatAx 6, 7 e 8 garantiscono l'esistenza di $\bigcup x$. Ora si può definire $\mathrm{R}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{R}(\mathrm{S}(\alpha)) = \mathcal{P}(\mathrm{R}(\alpha))$ e per λ ordinale limite, $\mathrm{R}(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{R}(\alpha)$.

Gli oggetti della categoria $\mathcal{WF}'$ sono tutti quegli x tali che esiste un ordinale α tale che $x \in \mathrm{R}(\alpha)$. Per ogni x oggetto in $\mathcal{WF}'$ e per ogni $y \in x$ esiste una freccia atomica da y a x e una da x a $\emptyset$. La costruzione appena data è analoga alla costruzione della classe $\mathcal{WF}$ in Zfc.

4.2 CatAx implica $\text{Zfc}^{\mathcal{WF}}$

4.4 (Teorema) CatAx $\Rightarrow \text{Zfc}^{\mathcal{WF}}$

Dimostrazione. ZFC 0: L'esistenza di un insieme è, come si è già detto, una conseguenza degli assiomi del linguaggio. È comunque possibile vedere questo assioma come una conseguenza di CATAX 6.

ZFC 1: L'estensionalità segue immediatamente da CATAX 8.

ZFC 2: Fondazione. Il fatto che limitiamo ZFC a $\mathcal{WF}$ è precisamente l'assioma di fondazione.

ZFC 3: Comprensione. Per ogni collezione di oggetti $x_0, \ldots, x_\alpha$ esiste l'insieme che li ha come elementi, dunque esiste una freccia che passa per tutti gli x_i. Pertanto per ogni formula ϕ esiste una freccia che passa per tutti gli oggetti z tali che ϕ, e dunque per CATAX 7 e 8 esiste un unico insieme y tale che $\forall x(x \in y \leftrightarrow \phi)$.

ZFC 4, 5, 6, 7, 8: Coppia, unione, rimpiazzamento, infinito, potenza sono tutte istanze dell'applicazione di CATAX 6, 7, 8.

ZFC 9: Scelta. Per ogni collezione di oggetti $x_0, \ldots, x_\alpha$ esiste una freccia che passa per tutti gli x_i, e dunque definisce un buon ordine sull'insieme che contiene $x_0, \ldots, x_\alpha$. $\square$

References

[Kunen] Kunen, *Set theory: an introduction to Independence Proofs*, North Holland

[Lawvere] Lawvere, William, F. *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*, 1964, from Eilenberg, S. et al. (ed.) *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, Springer-Verlag, Berlin 1966