ФГБОУ ВО
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.628.2

ПОГУДИН Глеб Александрович

Первичные дифференциальные алгебры и ассоциированные с ними алгебры Ли

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Ю.П. Размыслов

Москва
2015

Содержание

1 Введение

1.0 Основные теоремы диссертации

Теорема (3.1.2)**.** *Минимальная степень* q_k *такая, что* $\left(x^{(k)}\right)^{q_k} \in [x^m]$*, равна* $(k+1)m - k$*.*

Теорема (4.1.3)**.** *Пусть* $E = k\langle a_1, \dots, a_m\rangle$*,* $\operatorname{trdeg}_k E < \infty$ *и* E *содержит неконстанту. Тогда существует* $a \in E$ *такой, что* $E = k\langle a\rangle$*.*

Следствие (4.4.1)**.** *Пусть* L *— простая конечно порожденная* k*-алгебра Ли, удовлетворяющая стандартному тождеству степени* 5*. Тогда существуют элементы* $g, h \in L$ *такие, что* $\operatorname{trdeg}_k R(L) = \operatorname{trdeg}_k R(L_0)$*, где через* L_0 *обозначена подалгебра Ли в* L*, порожденная элементами* g *и* h*.*

1.1 Актуальность темы

В настоящей диссертации изучается ряд вопросов дифференциальной алгебры, возникающих естественным образом при изучении алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству St_5:

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \operatorname{ad} x_{\sigma(1)} \operatorname{ad} x_{\sigma(2)} \operatorname{ad} x_{\sigma(3)} \operatorname{ad} x_{\sigma(4)} z = 0.$$

Тем не менее, почти все результаты представляют самостоятельный интерес с точки зрения дифференциальной алгебры. Все алгебры, если не оговорено противное, считаются алгебрами над полем k нулевой характеристики.

Изучение алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени 5, началось в конце 1970-х, когда было обнаружено (независимо Е.Н. Суменковым, Дж. Бергманом, Ю.П. Размысловым и Б.В. Лидским), что в алгебре Ли векторных полей на прямой $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ выполняется тождество St_5. Отметим, что $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ может рассматриваться как алгебра Ли специальных дифференцирований алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$. В работе [32] было доказано, что многие тождества алгебры $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ следуют из St_5, и была построена универсальная алгебра в категории подалгебр $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ с m порождающими, которая при ближайшем рассмотрении оказывается подалгеброй алгебры Ли специальных дифференцирований свободной дифференциальной алгебры. Была выдвинута гипотеза, что все тождества алгебры $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$

(или, что равносильно, все тождества алгебры Ли полиномиальных векторных полей на прямой W_1) следуют из тождества St_5.

Эта гипотеза доказана в случае простых алгебр над полем характеристики отличной от двух Ю.П. Размысловым в работе [35]. Для этого в работе [35] было показано, что всякая простая алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству St_5, вкладывается в алгебру специальных дифференцирований дифференциальной алгебры с одним сигнатурным дифференцированием[1], в которой, в свою очередь, выполняются все тождества алгебры W_1. Это вложение было осуществлено при помощи следующей конструкции. Пусть L — алгебра Ли над полем k, удовлетворяющая St_5, тогда в алгебре $\mathrm{End}_k L$ можно рассмотреть ассоциативную подалгебру, порожденную элементами вида

$$\langle g_1, g_2, g_3 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \operatorname{ad} g_{\sigma(1)} \operatorname{ad} g_{\sigma(2)} \operatorname{ad} g_{\sigma(3)}.$$

Оказывается, что эта подалгебра коммутативна, и элементы L действует на ней дифференцированиями. Далее будем обозначать эту алгебру через $R(L)$.

В работе К.А. Зубрилина показано, что для любого тождества $f = 0$ в алгебре W_1 существует такое n, что равенство $([x_0, \langle x_1, x_2, x_3 \rangle])^n f = 0$ следует из St_5. Опираясь на эти идеи и результаты работы [37], автор и Ю.П. Размыслов доказали (см. теорему 2.4.2), что всякая первичная алгебра, удовлетворяющая St_5, вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований некоторой первичной дифференциальной алгебры.

В этой связи естественными являются следующие вопросы: как связаны первичность дифференциальной алгебры с одним сигнатурным дифференцированием и первичность алгебры Ли её специальных дифференцирований, насколько «плохой» может быть первичная дифференциальная алгебра и, соответственно, первичная алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству St_5.

Первый вопрос достаточно подробно изучен в литературе (см. [2, 15] и ссылки в этих работах) для алгебр с единицей. Случай алгебр без единицы оказывается ощутимо труднее, он исследуется в разделе 2.2 настоящей диссертации (см. предложение 2.2.4).

[1] всюду далее, если не оговорено противное, рассматриваются дифференциальные алгебры с одним сигнатурным дифференцированием

Второй вопрос оказывается связан с достаточно старой открытой проблемой в дифференциальной алгебре. В 1942 г. в работе [14] Г. Леви первым начал изучать комбинаторные свойства дифференциального идеала $[x^m]$. Его структура оказалась весьма нетривиальной, в частности, в монографии [21] Дж. Риттом сформулирована следующая проблема: для всяких i и m найти такое минимальное j, что $\left(x^{(i)}\right)^j \in [x^m]$. В течение последующих 60 лет были получены некоторые частичные продвижения (см., например, [19]). Автору удалось решить эту задачу полностью (см. теорему 3.1.2) и доказать, что фактор свободной дифференциальной алгебры по идеалу $[x^m]$ первичен (см. теорему 3.1.1). Более того, если рассматривать свободную дифференциальную алгебру без единицы, то фактор по идеалу $[x^m]$ окажется первичной дифференциальной ниль-алгеброй, а алгебра Ли специальных дифференцирований будет первичной и энгелевой (см. теорему 3.2.1).

Интересным является также вопрос, какую часть алгебры $R(L)$ можно получить, если вместо L рассматривать её подалгебру, порожденную двумя элементами. Геометрически этот вопрос можно сформулировать так: насколько большую подалгебру можно восстановить в алгебре функций на аффинном многообразии, если для восстановления используется алгебра Ли, порожденная двумя векторными полями, коллинеарными в каждой точке (подробнее о геометрическом подходе и восстановлении алгебры функций см. [34]). Такой вопрос оказывается естественным образом связан с дифференциальной теоремой о примитивном элементе. Колчин в работе [12] доказал, что если расширение дифференциальных полей $F \subset E$ таково, что $\operatorname{trdeg}_F E < \infty$, E конечнопорождено над F, и в F имеется неконстанта, то E можно породить над F одним элементом. Эта теорема была усилена автором (см. теорему 4.1.3): достаточно требовать наличия неконстанты не в F, а в поле E. Пользуясь этим усилением, удается доказать, что в алгебре специальных дифференцирований целостной дифференциальной k-алгебры B конечной степени трансцендентности, можно выбрать такие два элемента, что восстановленная ими подалгебра в B будет иметь ту же степень трансцендентности, что и B (см. теорему 4.4.1). Более того, с использованием результатов работы [37] доказано, что в простой конечно порожденной алгебре Ли L, удовлетворяющей St_5, можно выбрать элементы $g, h \in L$ такие, что $\operatorname{trdeg}_k R(L) = \operatorname{trdeg}_k R(L_0)$, где через L_0 обозначена подалгебра Ли, порожденная g и h.

Вопрос о такого рода восстановлении алгебры функций по подалгебре Ли алгебры векторных полей интересен не только для алгебр, соответствующих одномерным распределениям (то есть алгебр, удовлетворяющих St_5). В работе [34] доказано существование лиева полинома, который по гладкому m-мерному инволютивному распределению восстанавливает алгебру функций на аффинном алгебраическом многообразии. Автором построен такой полином в явном виде для двумерных распределений (см. раздел 5.4 диссертации). Кроме того, в разделах 5.2 и 5.3 диссертации исследуются некоторые вложения конечномерных алгебр Ли в алгебры Ли $\widetilde{W}_m = \operatorname{Der} k[[x_1, \ldots, x_m]]$, соответствующие m-мерным распределениям.

1.2 Цель работы

Целью настоящей работы является изучение первичных дифференциальных алгебр, первичных алгебр Ли, удовлетворяющих тождеству St_5, и их взаимосвязей. Перед автором возникли следующие задачи:

• Доказать, что всякая первичная алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству St_5, вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований некоторой первичной алгебры Ли.

• Доказать первичность алгебры $k\{x\}/[x^m]$, изучить комбинаторную структуру идеала $[x^m]$.

• Усилить теорему Колчина о примитивном элементе для случая, когда основное поле состоит из констант. Вывести отсюда подобного рода результат для алгебр Ли специальных дифференцирований целостных дифференциальных алгебр.

• Изучить некоторые вложения конечномерных алгебр Ли в алгебры $\operatorname{Der} k[[x_1, \ldots, x_m]]$.

• Построить полилинейный ассоциативный полином, который по гладкому двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстанавливал бы алгебру функций на многообразии.

Эти задачи успешно решены автором в данной работе.

1.3 Научная новизна

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

• Доказано, что первичная алгебра Ли, удовлетворяющая стандартному тождеству степени 5 вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований первичной дифференциальной алгебры. Доказано, что алгебра Ли специальных дифференцирований первичной дифференциальной алгебры первична (в отличие от работ [2, 15] не требуется наличие единицы).

• Доказана первичность алгебры $k\{x\}/[x^m]$, доказано, что поле констант этой алгебры совпадает с полем k. Доказано, что минимальное j такое, что $\left(x^{(i)}\right)^j \in [x^m]$, равно $(i+1)m-i$.

• Теорема Колчина о примитивном элементе ([12]) усилена: предположение о наличии неконстанты в основном поле заменено предположением о наличии неконстанты в расширении.

• Построены вложения n-мерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики в $\operatorname{Der} k[[x_1, \ldots, x_n]]$ такие, что все коэффициенты у дифференцирований являются рациональными функциями от квазимногочленов.

• Построен в явном виде полилинейный ассоциативный полином, который по гладкому двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстанавливает алгебру функций на многообразии. Существование таких полиномов было доказано в [34].

1.4 Основные методы исследования

В работе используются результаты и методы теории алгебр многообразий $\operatorname{var} W_n$ и дифференциальной алгебры. Результаты диссертации опираются на работы Ю.П. Размыслова о восстанавливающих полиномах ([34]) и структуре алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени 5 ([35]), работы Колчина ([12]) и Зайденберга ([22]) о дифференциальной теореме о примитивном элементе, понятие α-мономов и основные результаты о них, полученные Леви ([14]). Результаты главы 3 оказались возможны благодаря переходу от коммутативных дифференциальных алгебр к антикоммутативным.

1.5 Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Однако, доказательства многих результатов конструктивны. Результаты и методы могут быть применены в дифференциальной алгебре, теории дифференциальных уравнений, при изучении тождеств алгебр Ли, в алгебраической и дифференциальной геометрии.

1.6 Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

• на международных конференциях «Polynomial Computer Algebra» в г. Санкт-Петербурге в 2013 и 2014 гг.;

• на международной концеренции «Model Theory, Difference/Differential Equations and Applications» в г. Люмини в 2015 г.;

• на научно-исследовательском семинаре и на семинаре «Теория колец» кафедры высшей алгебры МГУ.

1.7 Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце библиографии.

1.8 Структура и объем работы

Диссертация состоит из пяти глав, заключения и списка литературы из 46 наименований. Общий объем диссертации составляет 61 страницу.

1.9 Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю Ю.П. Размыслову за многочисленные и плодотворные беседы, повлиявшие не только на содержание диссертации, но и на стиль мышления диссертанта. Автор также очень признателен коллективу кафедры высшей алгебры за прекрасную атмосферу, многочисленную помощь в самых разных вопросах и интересные математические дискуссии. Особенно хотелось бы поблагодарить Е.С. Голода, А.И. Зобнина, Д.В. Трушина, Е.И. Бунину и И.В. Аржанцева. Автор выражает огромную благодарность своим школьным учителям математики С.Б. Трепаковой и В.З. Шаричу, подтолкнувших его к активным занятиям математикой и всемерно поддерживавших на этом пути.

2 Основные определения и конструкции

2.1 Дифференциальные алгебры

Мы приведем необходимые сведения из дифференциальной алгебры [30]. Фиксируем основное поле k нулевой характеристики.

Определение 2.1.1. Аддитивное отображение D из кольца A в себя называется *дифференцированием*, если удовлетворяет тождеству Лейбница: $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.

Обычно мы будем обозначать $D(x)$ и $D^n(x)$ через x' и $x^{(n)}$ соответственно.

Определение 2.1.2. Коммутативное кольцо с выделенным дифференцированием будем называть *дифференциальным кольцом.*

Дифференциальным полем называется дифференциальное кольцо, являющееся полем.

Если дифференциальное кольцо A является k-алгеброй, и дифференцирование k-линейно, то A называется *дифференциальной k-алгеброй.* В случае, когда основное поле понятно из контекста, мы будем говорить просто о дифференциальной алгебре.

Пример 2.1.1. Любое коммутативное кольцо является дифференциальным кольцом относительно тривиального дифференцирования (то есть $x' = 0$ для любого x).

Пример 2.1.2. Алгебра многочленов $k[x]$ (степенных рядов $k[[x]]$) от переменной x является дифференциальной алгеброй относительно стандартного дифференцирования $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$. Заметим, что любое дифференцирования этой алгебры имеет вид $f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$, где $f(x) \in k[x]$ ($f(x) \in k[[x]]$).

Пример 2.1.3. Пусть A — дифференциальная k-алгебра. Рассмотрим алгебру многочленов от счетного числа переменных $A[x = x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots]$. Введем на переменных дифференцирование по формуле $\left(x^{(i)}\right)' = x^{(i+1)}$, продолжим его на остальные элементы по линейности и тождеству Лейбница. Построенная таким образом дифференциальная алгебра называется алгеброй *дифференциальных многочленов от переменной* x и обозначается через $A\{x\}$. Операцию присоединения дифференциальной переменной можно произвести несколько раз и получить алгебру дифференциальных многочленов от нескольких переменных. Многочлен из $A\{x_1, \ldots, x_n\}$ называется *полилинейным*, если он линеен по каждой своей переменной.

Определение 2.1.3. Элемент дифференциального кольца $a \in A$ называется *константой*, если $a' = 0$.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения:

Предложение 2.1.1. *Множество констант дифференциального кольца является подкольцом. Множество констант дифференциального поля является подполем.*

Для проверки линейной зависимости элементов дифференциального поля над подполем констант используется понятие определителя Вронского:

Определение 2.1.4. Пусть $f_1, \ldots, f_n \in A$ — элементы дифференциального кольца A. *Определителем Вронского* элементов $f_1, \ldots, f_n$ называется следующий определитель:

$$\operatorname{wr}(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Предложение 2.1.2 ([16], prop. 2.8). *Элементы дифференциального поля линейно зависимы над полем констант тогда и только тогда, когда их определитель Вронского равен нулю.*

Определение 2.1.5. Отображение $\varphi\colon A \to B$ дифференциального кольца A в дифференциальное кольцо B называется *гомоморфизмом дифференциальных колец*, если φ — гомоморфизм колец, и для любого $a \in A$ выполнено $\varphi(a') = \varphi(a)'$.

Подмножество I дифференциального кольца A называется *дифференциальным идеалом*, если оно является идеалом в смысле коммутативной алгебры и для всякого $a \in I$ выполнено $a' \in I$. Наименьший идеал, содержащий элементы $a_1, \ldots, a_m \in A$, называется *идеалом, порожденным* $a_1, \ldots, a_m$ и обозначается $[a_1, \ldots, a_m]$.

Несложно убедиться в том, что дифференциальные идеалы — это в точности ядра дифференциальных гомоморфизмов. Радикал (в смысле коммутативной алгебры) дифференциального идеала в алгебре над полем нулевой характеристики также является идеалом.

Предложение 2.1.3 ([30], лемма 1.7)**.** *Если $a \in A$ нильпотентен, то a' тоже нильпотентен.*

Определение 2.1.6. Дифференциальный идеал называется *радикальным*, если он совпадает со своим радикалом. Наименьший радикальный дифференциальный идеал, содержащий элементы $a_1, \ldots, a_m \in A$, обозначается через $\{a_1, \ldots, a_m\}$.

Определение 2.1.7. Дифференциальное кольцо A называется *первичным* (*полупервичным*), если для любых двух ненулевых идеалов I и J (любого ненулевого идеала I) выполнено $I \cdot J \neq 0$ ($I^2 \neq 0$).

Идеал в дифференциальном кольце называется *первичным* (*полупервичным*), если фактор по нему первичен (полупервичен).

Отметим, что данное выше определение первичности является частным случаем общего определения первичных алгебр произвольной сигнатуры (см. [36, §3]), где дифференциальная алгебра рассматривается как алгебра с одной бинарной операцией (умножением) и одной унарной операцией (дифференцированием). Однако, в случае дифференциальных алгебр можно сформулировать более удобный на практике критерий первичности (полупервичности).

Лемма 2.1.1. *Дифференциальная алгебра A является первичной (полупервичной) тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in A$ (любого $a \in A$) найдется такое n, что $a^{(n)}b \neq 0$ ($a^{(n)}a \neq 0$).*

Доказательство. Необходимость условия очевидна.

Заметим, что достаточно проверять первичность на идеалах, порожденных одним элементом. Пусть A первична (полупервична), тогда существуют i и j такие, что $a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$ ($a^{(i)}a^{(j)} \neq 0$). Среди возможных пар (i, j) выберем пару с наименьшей суммой, а среди таких пар выберем пару с наименьшим j. Пусть $j > 0$. Тогда $a^{(i)}b^{(j-1)} = 0$ ($a^{(i)}a^{(j-1)} = 0$), то есть $\left(a^{(i)}b^{(j-1)}\right)' = a^{(i+1)}b^{(j-1)} + a^{(i)}b^{(j)} = 0$ ($\left(a^{(i)}a^{(j-1)}\right)' = a^{(i+1)}a^{(j-1)} + a^{(i)}a^{(j)} = 0$). Значит $a^{(i+1)}b^{(j-1)} = -a^{(i)}b^{(j)} \neq 0$ ($a^{(i+1)}a^{(j-1)} = -a^{(i)}a^{(j)} \neq 0$), что противоречит минимальности j. Таким образом, $j = 0$, что и требовалось. □

Лемма 2.1.2. *Пусть A — первичная дифференциальная k-алгебра, и $B \subset A$ её подалгебра. Тогда алгебра B первична.*

Доказательство. Пусть ненулевые идеалы $I, J \subset B$ таковы, что $IJ = 0$. Заметим, что множества $A \cdot I$ и $A \cdot J$ являются ненулевыми дифференциальными идеалами в A. Однако, $AI \cdot AJ = 0$, что противоречит первичности A. □

2.2 Алгебра Ли специальных дифференцирований

Определение 2.2.1. *Алгеброй дифференциальных операторов* на дифференциальной k-алгебре A будем называть алгебру некоммутативных многочленов $A[\partial]$ с соотношением $\partial a = a' + a\partial$ для любого $a \in A$.

Алгебра $A[\partial]$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования. Пространство линейных однородных по ∂ элементов является подалгеброй Ли. Она нас будет интересовать особо.

Определение 2.2.2. Для дифференциальной k-алгебры A определим *алгебру Ли специальных дифференцирований* $\operatorname{Diff} A = \{a\partial | a \in A\}$. Скобку Ли определим по формуле:

$$[a\partial, b\partial] = (ab' - a'b)\partial$$

Замечание. В работе [20] эта алгебра Ли называлась оболочкой Вронского дифференциальной алгебры. Мы придерживаемся терминологии [36, §46].

Далеко не любая алгебра Ли может быть представлена как подалгебра алгебры специальных дифференцирований некоторой дифференциальной алгебры. Хорошо известен следующий факт:

Предложение 2.2.1. *Пусть A — дифференциальная k-алгебра. Тогда алгебра $\operatorname{Diff} A$ удовлетворяет стандартному лиеву тождеству степени 5:*

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \operatorname{ad} x_{\sigma(1)} \operatorname{ad} x_{\sigma(2)} \operatorname{ad} x_{\sigma(3)} \operatorname{ad} x_{\sigma(4)} z,$$

где $(-1)^\sigma$ — знак перестановки σ, $\operatorname{ad} x$ — действие элемента x в присоединенном представлении.

Предложение 2.2.2. *Для всякого дифференциального идеала $I \subset A$ в дифференциальной алгебре A множество $I\partial = \{a\partial | a \in I\} \subset \operatorname{Diff} A$ является идеалом алгебры Ли $\operatorname{Diff} A$.*

Доказательство. Легко видеть, что из $a \in I$ следует $ba' - b'a \in I$ для любого $b \in A$. □

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, если дифференцирование на A было нулевым, алгебра $\operatorname{Diff} A$ будет абелевой, и любое подпространство будет являться идеалом. Однако, некоторые более слабые результаты в обратном направлении можно получить (см., например, работу [2, th. 3.2]).

Определение 2.2.3. Алгебра Ли L называется *первичной* (*полупервичной*), если для любых двух ненулевых идеалов $A, B \subset L$ (любого ненулевого идеала $A \subset L$) выполнено $[A, B] \neq 0$ ($[A, A] \neq 0$).

Первичность A и $\operatorname{Diff} A$ взаимосвязаны. Следующий результат получен в работе [2]:

Теорема 2.2.1. *Пусть R — первичное дифференциальное кольцо с единицей, ненулевым дифференцированием и без 2-кручения. Тогда кольцо Ли* $\operatorname{Diff} R$ *первично.*

Случай наличия 2-кручения исследуется в работе [15]. Заметим, что наличие единицы в кольце существенно — оно позволяет считать, что всякий идеал $\operatorname{Diff} R$ вместе с $r\partial$ содержит $r'\partial$. Чтобы убрать это условие в случае полей нулевой характеристики, нам потребуется интересный сам по себе результат о тождествах, выполняющихся в первичной дифференциальной алгебре.

Для $p \in A\{x_1, \dots, x_m\}$ будем говорить, что в алгебре A выполняется тождество $p(x_1, \dots, x_m) = 0$, если p равен нулю при подстановке любых элементов A вместо переменных $x_1, \dots, x_m$.

Предложение 2.2.3. *Пусть A — первичная дифференциальная k-алгебра над полем характеристики нуль с ненулевым дифференцированием. Тогда в A не выполняется ни одно тождество.*

Доказательство. Иначе говоря, требуется доказать, что для любого ненулевого многочлена $p \in A\{x_1, \dots, x_m\}$ существуют такие элементы $a_1, \dots, a_m \in A$, что $p(a_1, \dots, a_m) \neq 0$. Так как $\operatorname{char} k = 0$, можно считать, что p полилинеен. Обозначим через $T(m, n)$ утверждение «для любого полилинейного многочлена p от переменных $x_1, \dots, x_m$ такого, что порядок входящих в него производных не превосходит n, существуют $a_1, \dots, a_m \in A$, для которых $p(a_1, \dots, a_m) \neq 0$».

Докажем, что $T(m-1, n) \& T(1, n) \Rightarrow T(m, n)$. Действительно, рассмотрим многочлен $p(x_1, \dots, x_m)$ как многочлен от x_1 с коэффициентами из

$A\{x_2, \ldots, x_m\}$. В силу $T(m-1, n)$ существует подстановка элементов алгебры вместо переменных $x_2, \ldots, x_m$ такая, что в результате получится ненулевой многочлен от одной лишь x_1. Для него существует подстановка в силу $T(1, n)$.

Докажем, что при $n \geqslant 1$ утверждение $T(1, n)$ следует из справедливости $T(m, n-1)$ при всех m. Пусть $p(x) = c_n x^{(n)} + \ldots + c_0 x$ является тождеством на A. Рассмотрим выражение $p(xy) - xp(y) - yp(x)$. Оно не равно нулю, так как моном $x^{(n-1)}y'$ входит в него с коэффициентом nc_n, и в него не входят производные n-го порядка. В силу $T(n-1, 2)$ оно не является тождеством, что и требовалось.

Докажем справедливость $T(1, 0)$ и $T(1, 1)$. Любой линейный многочлен, куда не входят производные кроме нулевой, имеет вид ax_1 для некоторого $a \in A$. В силу первичности A существует $a_1 \in A$ такой, что $aa_1 \neq 0$. Любой линейный многочлен, куда не входят производные выше первой имеет вид $ax_1' + bx_1$. Пусть он является тождеством. Тогда для любых x и y выполнены соотношения $a(xy)' + bxy = ax'y + axy' + bxy = 0$ и $ax' + bx = 0$. Вычитая из первого второе, умноженное на y, получаем тождество axy'. Существуют $a_1, a_2 \in A$ такие, что $aa_1 \neq 0$ и $a_2' \neq 0$. В силу первичности, существует k такое, что $aa_1 a_2^{(k+1)} \neq 0$, что и требовалось.

Из $T(1, 0)$ и $T(1, 1)$, согласно доказанному выше, следуют все утверждения вида $T(m, n)$. □

Замечание. Для полупервичной алгебры это утверждение, вообще говоря, не верно. Рассмотрим алгебру $A = k[a] \oplus k[b]$ с $a' = 0$ и $b' = 1$. В ней выполняется тождество $ax' = 0$. Несложно видеть, что от алгебры A в предложении 2.2.3 требуется на самом деле $I \cdot I' \neq 0$ для любого идеала $I \subset A$.

Доказанное предложение позволяет нам усилить результат о первичности алгебры Ли специальных дифференцирований для дифференциальных алгебр над полем нулевой характеристики:

Предложение 2.2.4. *Пусть A — первичная дифференциальная k-алгебра над полем характеристики нуль с ненулевым дифференцированием. Тогда* $\mathrm{Diff}\, A$ *первична.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для главных идеалов порожденных элементами $a\partial$ и $b\partial$. Обозначим через A_{id} алгебру, получающуюся из A присоединением единицы. Так как алгебра $\mathrm{Diff}\, A_{id}$ первична, существует лиев полином $L(x, y, z)$ линейный по x и y с коэффициентами из $\operatorname{Diff} A$ такой, что $L(a\partial, b\partial, \partial) \neq 0$. Рассмотрим алгебру $A\{t\}$, получающуюся присоединением дифференциальной переменной t. Тогда $0 \neq L(a\partial, b\partial, t\partial) = p(a, b, t)\partial$ для некоторого $p(x, y, t) \in A\{x, y, t\}$. В силу предложения 2.2.3 существует $c \in A$ такой, что $p(a, b, c) \neq 0$, а значит $L(a\partial, b\partial, c\partial) \neq 0$. Таким образом, произведение ненулевых главных идеалов в $\operatorname{Diff} A$ не равно нулю, что и требовалось. □

2.3 Наличие единицы в простой дифференциальной алгебре

В прошлом разделе мы столкнулись с некоторыми трудностями, которые возникают, когда в первичной дифференциальной алгебре нет единицы. В этом разделе мы покажем, что в случае простых алгебр такого не случится.

Лемма 2.3.1. *Пусть R — простое дифференциальное кольцо. Существуют такие $b_1, \ldots, b_m \in R$, что $R = Rb_1 + \ldots + Rb_m$.*

Доказательство. Покажем, что для всякого ненулевого $a \in R$ верно $R[\partial]a = R$. Так как умножение в R ненулевое, существуют такие $b, c \in R$, что $bc = 0$. Так как R простое, найдется $D \in R_{id}[\partial]$ такой, что $Da = c$. Тогда $bD \in R[\partial]$ и $(bD)a \neq 0$. Стало быть, $R[\partial]a \neq 0$. Это идеал и в силу простоты R требуемое равенство $R[\partial]a = R$ верно.

Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $a \in R$. Существует $D \in R[\partial]$ такой, что $Da = a$. Пусть $D = a_0 + a_1\partial + \ldots + a_n\partial^n$. Рассмотрим набор из $a, a_0, \ldots, a_n$ и их производных вплоть до $(n+1)$-го порядка включительно. Покажем, что этот набор порождает R как идеал в коммутативном кольце. Рассмотрим произвольный $b \in R$. Существует $D_b \in R[\partial]$ такой, что $D_b a = b$. Пусть максимальная степень вхождения оператора дифференцирования ∂ в D_b равна N. Тогда перепишем равенство $D_b a = b$ в виде $D_b D^{N+1} a = b$. Левая часть равенства представляет из себя сумму произведений, степень которых относительно $a, a_0, \ldots, a_n$ и их производных равна $2 + N$. Вес каждого такого произведения (суммарное количество примененных операторов дифференцирования) не больше $n(N + 1) + N$. По принципу Дирихле, в каждом из таких произведений одна из производных будет иметь порядок не больше n, то есть каждое из произведений лежит в $Ra^{(k)}$ или $Ra_i^{(k)}$, где $k \leqslant n$. □

Предложение 2.3.1. *Во всяком простом дифференциальном кольце есть единица.*

Доказательство. Рассмотрим $x = (x_1, \dots, x_m)$ из предыдущей леммы. Существует матрица $A \in \mathrm{Mat}_m(R)$ такая, что $Ax^T = x^T$. Это равенство переписывается в виде $(A-E)x^T = 0$. Домножив на матрицу из алгебраических дополнений, получаем, что $\det(A-E)x_i = 0$ для всех i. Так как x_i являются образующими модуля R, отсюда следует $\det(A-E) = 0$. Если раскрыть это равенство, то получится выражение для единицы через элементы матрицы A. Что и требовалось. $\square$

Следствие 2.3.1. *Простых дифференциальных нильалгебр не существует (чего нельзя сказать о первичных, см. [43]).*

2.4 Вложение первичной алгебры Ли в алгебру Ли специальных дифференцирований

В силу предложения 2.2.1 любая подалгебра алгебры Ли специальных дифференцирований должна удовлетворять стандартному лиеву тождеству. В этом разделе мы опишем конструкцию, позволяющую во многих случаях вложить алгебру Ли в алгебру Ли специальных дифференцирований дифференциальной алгебры. Будем считать, что $\mathrm{char}\, k = 0$.

Рассмотрим алгебру формальных степенных рядов $k[[x]]$ со стандартным дифференцированием $\frac{\partial}{\partial x}$. Алгебру Ли специальных дифференцирований $k[[x]]$ будем обозначать через $\widetilde{W}_1(k)$. Ю.П.Размысловым в [35] был доказан следующий результат:

Теорема 2.4.1. *Пусть L — простая k-алгебра Ли. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *алгебра L удовлетворяет стандартному тождеству степени 5:*
$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \operatorname{ad} x_{\sigma(1)} \operatorname{ad} x_{\sigma(2)} \operatorname{ad} x_{\sigma(3)} \operatorname{ad} x_{\sigma(4)} z;$$
2. *алгебра L удовлетворяет всем тождествам алгебры $\widetilde{W}_1(k)$;*
3. *алгебра L вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований некоторой дифференциальной алгебры.*

Рассмотрим алгебру L, удовлетворяющую стандартному тождеству степени 5. Для элементов $g_1, g_2, g_3 \in L$ через $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ будем обозначать

$\sum_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma \operatorname{ad} g_{\sigma(1)} \operatorname{ad} g_{\sigma(2)} \operatorname{ad} g_{\sigma(3)} \in \operatorname{End}_k L$. Обозначим ассоциативную подалгебру в $\operatorname{End}_k L$, порожденную элементами такого вида, через $R(L)$. В работе [35] показано, что $R(L)$ коммутативна, и для любого $g \in L$ формула

$$^{g}\langle g_1, g_2, g_3\rangle \overset{\text{def}}{=} [\operatorname{ad} g, \langle g_1, g_2, g_3\rangle] = \langle [g, g_1], g_2, g_3\rangle + \langle g_1, [g, g_2], g_3\rangle + \langle g_1, g_2, [g, g_3]\rangle$$

задает дифференцирование на $R(L)$.

Предложение 2.4.1 ([36], предл. 46.3)**.** *Пусть алгебра Ли L удовлетворяет стандартному тождеству степени 5. Тогда:*

1. *для любых $g, h \in L$ и $a \in R(L)$ выполнено $^{g}ah = {}^{h}ag$;*
2. *для любых $g \in L$ и $a, b \in R(L)$ выполнено $^{bg}a = b\,({}^{g}a)$.*

Следующий результат был получен автором совместно с Ю.П.Размысловым.

Теорема 2.4.2. *Пусть L — первичная алгебра Ли, в которой выполняется стандартное тождество степени 5. Тогда она вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований первичной алгебры Ли.*

Доказательство. Для начала построим вложение в алгебру Ли специальных дифференцирований хоть какой-нибудь дифференциальной алгебры. Рассмотрим алгебру $\bar{L}$ — свободную алгебру от переменной $\mathbf{g}$ в многообразии, порожденном алгеброй L. Иначе говоря, $\bar{L}$ является фактором свободной алгебры Ли ранга 1 над L по идеалу, состоящему из тех лиевых полиномов, которые являются тождествами на L. По построению, в $\bar{L}$ выполнены все те тождества, которые выполняются в L.

Через $\bar{I}$ обозначим обозначим идеал в $\bar{L}$ порожденный элементами вида $^{\mathbf{g}}\langle x, y, z\rangle$ для любых $x, y, z \in L$. Через I обозначим идеал в L порожденный элементами вида $^{g}\langle x, y, z\rangle$ для любых $x, y, z, g \in L$.

Если $\bar{I} = 0$, то в L выполнено тождество $^{g}\langle x, y, z\rangle = 0$. С другой стороны, $R(L) \neq 0$, так как тождество $\langle x, y, z\rangle = 0$ равносильно метабелевости алгебры Ли, что противоречит первичности. Более того, в $R(L)$ нет делителей нуля. Действительно, пусть $a, b \in R(L)$ таковы, что $ab = 0$, а $f, g \in L$ таковы, что $af \neq 0$ и $bg \neq 0$. Тогда $[[L, af], [L, bg]] = [a[L, f], b[L, g]] = 0$, что противоречит первичности алгебры L. Обозначим через Q поле частных $R(L)$. В силу тождества $\langle g_1, g_2, g_3\rangle g = \langle g, g_2, g_3\rangle g_1 + \langle g_1, g, g_3\rangle g_2 + \langle g_1, g_2, g\rangle g_3$, справедливого в любой алгебре Ли, алгебра QL трехмерна над Q. Перейдя к алгебраическому замыканию Q, можно считать, что L вкладывается в алгебру Ли $\mathrm{sl}_2(K)$ для некоторого поля $K \supset k$. Эта алгебра изоморфна подалгебре $\langle \partial, x\partial, x^2\partial \rangle \subset K[x]\partial$ алгебры специальных дифференцирований алгебры многочленов $K[x]$.

Пусть теперь $\bar{I} \neq 0$. Рассмотрим алгебру Ли $\tilde{L} = \prod_{a\in\bar{I}} \bar{L}$. Эта алгебра является модулем над алгеброй $\tilde{R} = \prod_{a\in\bar{I}} R(\bar{L})$. Через s обозначим элемент алгебры $\tilde{R}$ такой, что его координата, соответствующая элементу $a \in \bar{I}$ равна a. Рассмотрим локализацию $\tilde{R}$ и $\tilde{R}$-модуля $\tilde{L}$ по элементу s. На $s^{-1}\tilde{L}$ естественным образом продолжается структура алгебры Ли.

Лемма 2.4.1. *Если рассматривать $s^{-1}\tilde{R}$ как дифференциальную алгебру, где дифференцированием является покомпонентное действие* $\operatorname{ad}\mathbf{g}$, *то* $\operatorname{Diff} s^{-1}\tilde{R} = s^{-1}\tilde{L}$.

Доказательство. Включение $\operatorname{Diff} s^{-1}\tilde{R} \subset s^{-1}\tilde{L}$ очевидно. Рассмотрим произвольный элемент $g \in s^{-1}\tilde{L}$. Будем обозначать его компоненту, соответствующая элементу $a = \sum c_i{}^{\mathbf{g}}\langle x_i, y_i, z_i\rangle \in \bar{I}$, через g_a. Тогда:

$$g_a = a^{-1}ag_a = a^{-1}\sum c_i{}^{\mathbf{g}}\langle x_i, y_i, z_i\rangle g_a = a^{-1}\sum c_i{}^{g_a}\langle x_i, y_i, z_i\rangle \mathbf{g}$$

Если через b обозначить такой элемент $s^{-1}\tilde{R}$, что $b_a = \sum c_i{}^{g_a}\langle x_i, y_i, z_i\rangle$, то получаем равенство $g = s^{-1}b\mathbf{g}$, откуда $g \in \operatorname{Diff} s^{-1}\tilde{R}$. □

Алгебра Ли L допускает естественное вложение в $\tilde{L}$: элементу $g \in L$ можно сопоставить элемент $\tilde{g}$, все координаты которого равны g. Вместе с отображением локализации это вложение даёт нам гомоморфизм$\varphi\colon L \to s^{-1}\tilde{L} = \operatorname{Diff} s^{-1}\tilde{R}$. Ядро этого гомоморфизма состоит из тех $f \in L$, для которых существует такое n, что для любого $a \in \bar{I}$ выполнено $a^n f = 0$. Это равносильно тому, что для этого n и любого $a \in I$ выполнено $a^n f = 0$. Линеаризуя по a, получаем, что $\operatorname{Ker}\varphi$ состоит из тех f, для которых существует n такое, что для любых $a_1, \ldots, a_n \in I$ выполнено $a_1 \ldots a_n f = 0$. Если $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, то мы уже получили искомое вложение.

Если $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$, то рассмотрим произвольный ненулевой элемент $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Пусть n — минимальное натуральное число такое, что для любых $a_1, \ldots, a_n \in I$ выполнено $a_1 \ldots a_n f = 0$. Значит, существуют такие $a_2, \ldots, a_n \in I$, что $a_2 \ldots a_n f \neq 0$, но для любого $a \in I$ выполнено $aa_2 \ldots a_n f = 0$. Таким образом, множество таких $f \in L$, что $If = 0$, непусто. Обозначим его через A.

Лемма 2.4.2. *1. Для любого $g \in L$ выполнено $[\operatorname{ad} g, I] \subset I$;*

2. A является идеалом;

3. $B = IL$ является идеалом.

Доказательство. 1. Любой элемент $a \in I$ можно записать в виде $\sum c_i{}^{g_i}\langle x_i, y_i, z_i\rangle$, где $c_i \in R(L)$ и $x_i, y_i, z_i, g_i \in L$. Тогда

$$[\operatorname{ad} g, a] = \sum([g, c_i]^{g_i}\langle x_i, y_i, z_i\rangle + c_i{}^{[g,g_i]}\langle x_i, y_i, z_i\rangle + \\ + c_i{}^{g_i}\langle [g, x_i], y_i, z_i\rangle + c_i{}^{g_i}\langle x_i, [g, y_i], z_i\rangle + {}^{g_i}\langle x_i, y_i, [g, z_i]\rangle) \quad (1)$$

Что и требовалось.

2. Пусть $g \in L$, $f \in A$, $a \in I$. Тогда $0 = [g, af] = [\operatorname{ad} g, a]f + a[f, g]$. Так как $[\operatorname{ad} g, a] \in I$, первое слагаемое равно нулю, а значит равно нулю и второе слагаемое.

3. Пусть $f, g \in L$ и $a \in I$. Тогда $[g, af] = [\operatorname{ad} g, a]f + a[f, g]$ — оба слагаемых лежат в B, а значит там лежит и сумма.

□

Заметим теперь, что $[A, B] = 0$. Действительно, пусть $g \in L$, $f \in A$ и $a \in I$: $[f, ag] = {}^f ag + a[f, g] = {}^g af + a[f, g] = 0$. Однако, мы предположили, что оба эти идеала не равны нулю, что противоречит первичности L.

Итак, мы получили вложение $\varphi\colon L \to \operatorname{Diff} A$ в алгебру Ли специальных дифференцирований некоторой дифференциальной алгебры A. Для любого подмножества $X \subset L$ введем обозначение $\mu(X) = \{a \in A | a\partial \in \varphi(X)\}$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество дифференциальных идеалов $I \subset A$ таких, что $I \cap \mu(L) = 0$. Множество $\mathfrak{N}$ частично упорядочено по включению и удовлетворяет условиям леммы Цорна. Пусть I — некоторый максимальный элемент $\mathfrak{N}$. Из определения $\mathfrak{N}$ следует, что L вкладывается и в $\operatorname{Diff} A/I$.

Осталось показать, что алгебра A/I первична. Пусть J_1, J_2 — идеалы в A/I такие, что $J_1 J_2 = 0$. Тогда $0 = [J_1\partial, J_2\partial] \supset [L \cap J_1\partial, L \cap J_2\partial]$. В силу первичности L, одно из множеств $\mu(L) \cap J_1$ и $\mu(L) \cap J_2$ содержит только нуль. В силу максимальности I один из идеалов J_1 и J_2 равен нулю. Что и требовалось. □

3 Первичные дифференциальные нильалгебры

3.1 Алгебры $k\{x\}/[x^m]$

Всюду в этой главе предполагается, что характеристика основного поля k равна нулю.

Изучение идеала $[x^m]$ в свободной дифференциальной алгебре $k\{x\}$ началось с работы Леви [14]. Там было сформулировано достаточное условие принадлежности монома идеалу, выраженное в терминах веса и степени. В монографии Ритта [21] была сформулирована задача: в какую наименьшую степень надо возвести x_i, чтобы попасть в $[x^m]$. В работе [19] она решена для $i = 1, 2$. В этом параграфе мы приведем решение этой задачи.

В диссертации А.И. Зобнина [26] было отмечено, что процесс редукции, который использовал Леви в своей работе, является просто процессом редукции относительно дифференциального базиса Грёбнера, состоящего из одного элемента x^m. Там же была сформулирована гипотеза об интегральности идеала $[x^m]$. Это утверждение было доказано М.В. Кондратьевой (устное сообщение А.И. Зобнина). Более подробно о базисе Грёбнера идеала $[x^m]$ написано в работе [27].

Наряду с $k\{x\}$ мы будем рассматривать также алгебру $k_+\{x\}$, состоящую из мономов положительной степени. Заметим, что $k_+\{x\}$ не содержит единицы.

Определение 3.1.1. Следуя Леви ([14]), будем называть моном из $k_+\{x\}$ *α_m-мономом*, если для любого i сумма степеней $x^{(i)}$ и $x^{(i+1)}$ меньше m. α_m -свойство можно переформулировать следующим образом: моном $x^{(k_n)} \cdot \ldots \cdot x^{(k_0)}$ $(k_n \geqslant k_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant k_0)$ обладает α_m -свойством, если для любых i и i' таких, что $i - i' = m - 1$, выполнено $k_i - k_{i'} > 1$.

Докажем следующий известный факт:

Лемма 3.1.1. *Всякий элемент $k_+\{x\}$ по модулю $[x^m]$ сравним с линейной комбинацией α_m-мономов.*

Доказательство. Введем на мономах упорядочение degrevlex (см. [26]). Рассмотрим мономы $M = x^{(\alpha_1)} \cdot \ldots \cdot x^{(\alpha_m)}$ и $N = x^{(\beta_1)} \cdot \ldots \cdot x^{(\beta_n)}$, где $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m$ и $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$. Будем говорить, что M старше N, если:

1. $m > n$;

2. $m = n$ и существует j такое, что для всех $1 \leqslant i < j$ $\alpha_i = \beta_i$ и $\alpha_j > \beta_j$.

Множество мономов оказывается вполне упорядоченным относительно этого порядка.

Старшим мономом многочлена $(x^m)^{(n)}$ является моном $\left(x^{(q)}\right)^{m-r}\left(x^{(q+1)}\right)^r$, где q и r — неполное частное и остаток при делении n на m. Любой моном, не являющийся α_m-мономом, делится на выражение $\left(x^{(q)}\right)^{m-r}\left(x^{(q+1)}\right)^r$ для некоторых q и r, то есть эквивалентен линейной комбинации меньших мономов по модулю $[x^m]$. Так как мономы вполне упорядочены, возможно лишь конечное число таких редукций, а значит в какой-то момент все мономы станут α_m-мономами. □

Введем основную конструкцию данной главы. Для изучения идеала $[x^m]$ рассмотрим векторное пространство V_m с $m-1$ парой счетных серий базисных векторов: ξ_i^k и η_i^k $(k = 0, \ldots, m-2,\ i \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Внешнюю алгебру этого пространства будем обозначать через $\Lambda(V_m)$, а её четную и нечетную компоненты через $\Lambda_0(V_m)$ и $\Lambda_1(V_m)$ соответственно. Введем на $\Lambda(V_m)$ дифференцирование, которое на образующих будет действовать увеличением на единицу нижнего индекса, то есть $(\xi_i^k)' = \xi_{i+1}^k$ и $(\eta_i^k)' = \eta_{i+1}^k$. Заметим, что $\Lambda_0(V_m)$ является коммутативной дифференциальной алгеброй.

Вернемся к нашему основному объекту — фактору свободной дифференциальной алгебры $k_+\{x\}$ по дифференциальному идеалу $[x^m]$. Обозначим его через D_m, образ x при факторизации обозначим через $\bar{x}$. Построим гомоморфизм дифференциальных алгебр $\varphi_m\colon D_m \to \Lambda_0(V_m)$, положив $\varphi_m(\bar{x}) = \sum\limits_{k=0}^{m-2} \xi_0^k \wedge \eta_0^k$. Продолжение этого гомоморфизма до $k\{x\}/[x^m] \to \Lambda_0(V_m)$ мы будем обозначать тоже через φ_m.

Предложение 3.1.1. *φ_m — инъективный гомоморфизм.*

Доказательство. Сначала проверим, что φ_m — гомоморфизм. Для этого достаточно убедиться в том, что $(\varphi_m(\bar{x}))^m = 0$. Действительно, в $\varphi_m(\bar{x})$ входят $2(m-1)$ антикоммутирующих переменных, а степень всех мономов в $(\varphi_m(\bar{x}))^m$ будет равна $2m$. В силу кососимметричности получаем 0.

В силу леммы 3.1.1 достаточно проверить, что ни одна нетривиальная линейная комбинация α_m-мономов не лежит в ядре φ_m. Рассмотрим какую-нибудь линейную комбинацию α_m-мономов. Рассмотрим наибольший относительно degrevlex моном в линейной комбинации, и пусть он имеет вид

$M = \bar{x}^{(k_n)} \dots \bar{x}^{(k_0)}$, где $k_n \geqslant \dots \geqslant k_0$. Отсюда, в частности, следует неравенство $k_i \geqslant 2\left[\frac{i}{m-1}\right]$. Тогда укажем в $\varphi_m(M)$ такой моном, который не появится ни из какого другого монома исходной линейной комбинации. Из сомножителя, соответствующего $\bar{x}^{(k_j)}$, мы возьмем в этот моном произведение $\xi^r_{k_j-q} \wedge \eta^r_q$, где q и r — соответственно неполное частное и остаток от деления j на $m-1$. В силу доказанного неравенства на k_i, это выражение корректно определено. Кроме того, из переформулированного α_m-свойства следует такая цепочка неравенств для любого j:

$$k_j - q < k_{j+m-1} - q - 1 < k_{j+2m-2} - q - 2 < \dots \qquad (2)$$

Из этих неравенств в свою очередь следует, что все образующие, входящие в этот антикоммутативный моном, различны, а значит сам моном не равен нулю.

Докажем, что этот антикоммутативный моном мог появиться только из M. Пусть он появился из ещё какого-то α_m-монома M', и младшая производная в M' имеет порядок k. Очевидно, что степени мономов M и M' должны совпадать. Так как наш моном был наибольшим относительно degrevlex, то $k \leqslant k_0$. С другой стороны, k должна дать в антикоммутативный моном произведение вида $\xi^c_a \wedge \eta^c_b$, но наименьшее возможное значение $a+b$ достигается в силу (2) при $a = k_0$ и $b = 0$ и равно k_0, то есть $k = k_0$, причем в антикоммутативный моном младшая производная M и M' дает одинаковый вклад. Повторяя аналогичные рассуждения для оставшихся производных, получаем $M = M'$, что и требовалось.

Таким образом, инъективность φ_m доказана. □

Из доказательства вытекает также следующий факт:

Следствие 3.1.1. *α_m-мономы образуют k-базис факторалгебры $k_+\{x\}/[x^m]$.*

Отсюда, в частности, получаем альтернативное доказательство того факта, что многочлен x^m является стандартным базисом идеала $[x^m]$ относительно порядка degrevlex. Доказательство, использующее критерий Бухбергера, написано в работе [27].

Теорема 3.1.1. *Алгебра D_m первична.*

Доказательство. В силу леммы 2.1.2 достаточно доказать первичность $\Lambda_0(V_m)$. Пусть существуют идеалы A и B такие, что $AB = 0$. Рассмотрим ненулевые $a \in A$ и $b \in B$. Тогда их можно домножить на такие мономы, чтобы a и b стали мономами. Теперь продифференцируем a столько раз, чтобы среди полученных слагаемых было такое, в котором все производные имеют порядок больше любой производной в b. Соответственно, произведение b и этой производной a не будет равно нулю. $\square$

Замечание. D_m оказывается первичной дифференциальной ниль-алгеброй. Пример ассоциативной первичной нильалгебры приведен в теореме 1 второго параграфа монографии [23].

Из предложения 3.1.1 можно без труда получить ответ на вопрос Ритта об идеале $[x^m]$ (см. [21]).

Теорема 3.1.2. *Минимальная степень q_k такая, что $\left(x^{(k)}\right)^{q_k} \in [x^m]$, равна $(k+1)m-k$.*

Доказательство. Проверим, что при возведении в эту степень выражения $\varphi_m(\bar{x}^{(k)})$ получится 0. Действительно, в $\varphi_m(\bar{x}^{(k)})$ входят ровно $2(m-1)(k+1) = 2(q_k-1)$ порождающих, а степень $\varphi_m\left(\bar{x}^{(k)}\right)^l$ равна $2l$. В силу кососимметричности получим нуль.

Докажем, что $((k+1)m-k-1)$ -ая степень не равна нулю. Действительно, $\left(\varphi_n\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)^{q_k-1}$ будет мономом из произведения всех $2(n-1)(k+1)$ образующих на некоторую константу. Она будет ненулевой по двум следующим причинам:

1. Все коэффициенты в сомножителях положительны (если считать, что в мономе второй степени сначала идет переменная типа ξ, а потом переменная типа η).

2. Все подобные, из приведения которых получается этот коэффициент, имеют одну четность перестановки образующих, так как каждая образующая типа ξ всегда идёт в паре с одной и той же образующей типа η и наоборот. Таким образом, при приведении подобных достаточно переставлять пары образующих, что не влияет на знак перестановки.

$\square$

Определение 3.1.2. *Весом* монома $M = x^{(k_1)} \cdot \ldots \cdot x^{(k_n)} \in k\{x\}$ будем называть число $w(M) = k_1 + \ldots + k_n$.

Аналогичным образом можно доказать следующее утверждение:

Предложение 3.1.2. *Обозначим через q и r неполное частное и остаток от деления n на $m-1$. Если вес монома M степени n меньше, чем $(m-1)q(q-1)+2rq$, то $M \in [x^m]$.*

Кроме того, для любого n существует моном $M \notin [x^m]$ степени n и веса $(m-1)q(q-1)+2rq$

Доказательство. Докажем, что $\varphi_m(M)=0$. Степень этого кососимметричного однородного полинома равна $2n$. Если он не нулевой, то в некоторый его моном для каждого i в него входит не более $2m-2$ производных порядка i. Таким образом, минимальный вес будет достигнут, если входят ровно $2m-2$ нулевых производных, $2m-2$ первых производных, …, $2m-2$ производных порядка $q-1$ и $2r$ производных порядка q. Сумма порядков этих производных равна как раз $(m-1)q(q-1)+2rq$, то есть вес никак не может быть меньше этого выражения.

Для доказательства второй части утверждения достаточно взять $M = x^{m-1}\left(x^{(2)}\right)^{m-1}\cdot\ldots\cdot\left(x^{(2(q-1))}\right)^{m-1}\left(x^{(2q)}\right)^{r}$. Легко видеть, что $w(M)=(m-1)q(q-1)+2rq$. Покажем, что $\varphi_m(M)\neq 0$. Для этого достаточно по индукции проверить следующее соотношение (при $r=0$ последний сомножитель считается равным единице):

$$\varphi_m(M) = ((m-1)!)^q\, r! \bigwedge_{\substack{0\leqslant i<m-1\\ 0\leqslant j<q}} \xi^i_j \wedge \eta^i_j \left(\sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_r<m-1} \left(\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant r} \xi^{i_j}_q \wedge \eta^{i_j}_q \right)\right). \tag{3}$$

База при $n=1$ очевидна. Моном для степени $n+1$ отличается от M умножением на $x^{(2q)}$. Так как производные всех грассмановых переменных порядка меньше q уже входят в каждый моном, то вместо $\varphi_m\left(x^{(2q)}\right)$ достаточно рассматривать $\sum\limits_{0\leqslant i<m-1} \xi^i_q \wedge \eta^i_q$. Индукционный переход теперь следует из следующего соотношения:

$$r!\left(\sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_r<m-1} \left(\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant r} \xi^{i_j}_q \wedge \eta^{i_j}_q \right)\right)\cdot\left(\sum_{0\leqslant i<m-1} \xi^i_q\wedge\eta^i_q\right) = \\ = (r+1)!\left(\sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_{r+1}<m-1} \left(\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant r+1} \xi^{i_j}_q \wedge \eta^{i_j}_q \right)\right) \tag{4}$$

В случае, когда $r+1=m-1$ в сумме остается лишь одно слагаемое — произведение всех производных порядка q от грассмановых переменных — и оно становится таким же, как первые q сомножителей из правой части равенства (3). $\square$

Замечание. Это утверждение — в точности теорема 1.2 из работы [14]. Мы привели альтернативное доказательство.

Теорема 3.1.3 (интегральное свойство)**.** *Если $f' \in [x^m]$, то и $f \in [x^m]$.*

Этот результат был получен М.В. Кондратьевой (устное сообщение). Вот другое доказательство.

Доказательство. Утверждение об интегральности идеала равносильно отсутствию констант в факторе. Докажем, что во всей алгебре $\Lambda(V_m)$ нет констант. Пусть такая есть, обозначим её через C. Без ограничения общности можно считать, что в неё входит образующая типа ξ^0. Тогда достаточно рассмотреть старшую производную образующей этого типа — пусть это ξ^0_j. Но тогда в C' будет несократившийся член при ξ^0_{j+1}. $\square$

3.2 Локальная нильпотентность специальных дифференцирований $k_+\{x\}/[x^m]$

Определение 3.2.1. Дифференцирование D алгебры A (возможно, неассоциативной) называется *локально нильпотентным*, если для любого элемента $a \in A$ существует натуральное n такое, что $D^n a = 0$.

Теорема 3.2.1. *Всякое специальное дифференцирование алгебры $k_+\{x\}/[x^m]$ локально нильпотентно.*

Для любого $g \in \operatorname{Diff} k_+\{x\}/[x^m]$ дифференцирование $\operatorname{ad} g$ локально нильпотентно.

Доказательство. Из предложения 3.1.2 следует, что минимально возможный вес ненулевого по модулю $[x^m]$ монома степени n не меньше $(m-1)\left(\frac{n}{m-1}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right) > c_m n^2$, где c_m — некоторая константа, зависящая от m.

Рассмотрим дифференцирование $a\partial \in \operatorname{Diff} k_+\{x\}/[x^m]$ и элемент $b \in k_+\{x\}/[x^m]$ (дифференцирование $b\partial \in \operatorname{Diff} k_+\{x\}/[x^m]$). Пусть минимальная степень среди мономов в a и b равна n, а максимальный вес равен w. Тогда минимальная степень у $(a\partial)^N b$ (соответственно, $(\operatorname{ad} a\partial)^N b\partial$) не меньше $nN+n$, а максимальный вес не больше $wN+N$.

Для некоторого достаточно большого N будет выполнено неравенство $wN + N < c_m(nN+n)^2$, а значит всё выражение будет равно нулю по модулю $[x^m]$. Что и требовалось.

$\square$

3.3 Идеалы вида $[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2]$ и гомоморфизмы $\psi_{m,s}$

Построенный в разделе 3.1 гомоморфизм φ_m допускает естественное обобщение. Целью этого раздела является построение более общего гомоморфизма $\psi_{m,s}$, определение $\alpha_{m,s}$ -мономов и доказательство того, что образы $\alpha_{2,s}$ -мономов образуют базис образа $\psi_{2,s}$ как векторного пространства. Кроме того, будет доказано, что ядро $\psi_{2,s}$ — это в точности идеал $[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2]$.

Для построения $\psi_{m,s}$ рассмотрим векторное пространство $V_{m,s}$, базис которого состоит из $2(m-1)(s+1)$ счетных серий: $\eta_i^{k,l}$ и $\xi_i^{k,l}$, где $i = 0,1,2,\ldots$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$ и $0 \leqslant l \leqslant s$. Определим дифференцирование на внешней алгебре $\Lambda(V_{m,s})$ по формулам $\left(\eta_i^{k,l}\right)' = \eta_{i+1}^{k,l}$ и $\left(\xi_i^{k,l}\right)' = \xi_{i+1}^{k,l}$. Гомоморфизм $\psi_{m,s}\colon k\{x\} \to \Lambda(V_{m,s})$ задается формулой:

$$\psi_{m,s}(x) = \sum_{k=0}^{m-2} \bigwedge_{l=0}^{s} \eta_0^{k,l} \wedge \xi_0^{k,l}$$

Отметим, что при $s = 0$ гомоморфизм $\psi_{m,s}$ есть композиция факторизации по $[x^m]$ и гомоморфизма φ_m.

Определение 3.3.1. Будем говорить, что моном $x^{(k_n)} \cdot \ldots \cdot x^{(k_0)}$ ($k_n \geqslant k_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant k_0$) обладает α_m свойством, если для любых i и i' таких, что $i - i' = m-1$, выполнено $k_i - k_{i'} > 2s+1$. При $s = 0$ получаем обычное α_m-свойство.

Теорема 3.3.1. *Образы $\alpha_{2,s}$-мономов образуют базис образа $\psi_{2,s}$ как векторного пространства. Ядром $\psi_{2,s}$ является идеал $\left[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2\right]$.*

Доказательство. Проверим, что для всякого $l \leqslant s$ выполнено $\psi_{2,s}\left((x^{(l)})^2\right) = 0$. Действительно, элемент $\psi_{2,s}\left((x^{(l)})^2\right)$ имеет степень $4(s+1)$, а вес всего $2l$. Отсюда следует, что хотя бы $4(s+1) - 2l > 2(s+1)$ переменных входящих в него принадлежат множеству $\{\eta_0^{2,0}, \ldots, \eta_0^{2,s}, \xi_0^{2,0}, \ldots, \xi_0^{2,s}\}$, то есть среди них есть повторяющиеся. Стало быть, $I_s = \left[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2\right] \subset \operatorname{Ker} \psi_{2,s}$.

Теперь покажем, что каждый моном из $k\{x\}$ эквивалентен линейной комбинации $\alpha_{2,s}$-мономов по модулю идеала I_s. Доказательство будет по сути таким же, что и в случае леммы 3.1.1, но ощутимо техниченее. Рассмотрим семейство матриц:

$$M_{t,r} = \begin{pmatrix} C_t^{\lfloor t/2 \rfloor} & C_t^{\lfloor t/2 \rfloor -1} & \dots & C_t^{\lfloor t/2 \rfloor - r} \\ C_{t-2}^{\lfloor t/2 \rfloor -1} & C_{t-2}^{\lfloor t/2 \rfloor -2} & \dots & C_{t-2}^{\lfloor t/2 \rfloor - r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{t-2r}^{\lfloor t/2 \rfloor - r} & C_{t-2r}^{\lfloor t/2 \rfloor - r-1} & \dots & C_{t-2r}^{\lfloor t/2 \rfloor - 2r} \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.3.1. $\det M_{t,r} \neq 0$ *при* $r \leqslant \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$.

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями $a^{\underline{b}} = a(a-1)\dots(a-b+1)$ (полагая, что $a^{\underline{0}} = 1$). Для всех i вынесем из i-ой строки множитель $\frac{(t-2i+2)!}{(\lfloor t/2 \rfloor - i+1)!(\lceil t/2 \rceil - i+1+r)!}$. После этого j-ый элемент i-ой строки будет равен:

$$(\lfloor t/2 \rfloor - i + 1)^{\underline{j-1}} (\lceil t/2 \rceil - i + 1 + r)^{\underline{r+1-j}}.$$

Полученный определитель будем вычислять пользуясь следующей леммой:

Лемма 3.3.2 ([11], лемма 3)**.** *Для переменных* $x_1, \dots, x_n$*,* $a_2, \dots, a_n$ *и* $b_2, \dots, b_n$ *выполнено следующее равенство:*

$$\det_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left((x_i + a_n)(x_i + a_{n-1}) \dots (x_i + a_{j+1})(x_i + b_j) \dots (x_i + b_2) \right) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j) \prod_{2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (b_i - a_j). \quad (5)$$

Положив $n = r + 1$, $x_i = \lfloor t \rfloor - i + 1$, $a_j = j - r - 1$ и $b_j = \lceil t/2 \rceil - \lfloor t/2 \rfloor + r + 2 - j$, получим в точности наш определитель. Что и требовалось. □

Построим семейство полиномов $f_{r,t} \in I_s$, где $0 \leqslant r \leqslant s$ и $t \geqslant 2r$. Рассмотрим полиномы $(x^2)^{(t)}$, $\left((x')^2\right)^{(t-2)}$, …, $\left((x^{(r)})^2\right)^{(t-2r)}$. Если записать в строках матрицы коэффициенты в этих многочленах при $x^{(\lfloor t/2 \rfloor)} x^{(\lceil t/2 \rceil)}$, $x^{(\lfloor t/2 \rfloor - 1)} x^{(\lceil t/2 \rceil + 1)}$, …, $x^{(\lfloor t/2 \rfloor - r)} x^{(\lceil t/2 \rceil + r)}$ (это будут $r + 1$ их старших мономов относительно degrevlex), то получится матрица $M_{t,r}$, столбцы которой (кроме, быть может, первого) будут умножены на 2. По лемме 3.3.1 эта матрица невырождена, а значит существует такая линейная комбинация этих полиномов, в которой старшим относительно degrevlex порядка будет моном $x^{(\lfloor t/2\rfloor - r)}x^{(\lceil t/2\rceil + r)}$. Эту линейную комбинацию мы и обозначим через $f_{r,t}$.

Для любого монома M, не являющегося $\alpha_{2,s}$-мономом, найдется такой $f_{r,t}$, что M делится на старший член $f_{r,t}$ относительно упорядоченья degrevlex, а значит эквивалентен по модулю I_s линейной комбинации меньших мономов. Так как этот процесс редукции однажды завершится, мы получим линейную комбинацию $\alpha_{2,s}$-мономов, сравнимую с M по модулю I_s.

Теперь покажем, что никакая линейная комбинация $\alpha_{2,s}$-мономов не лежит в ядре $\psi_{2,s}$. Доказательство будет идейно аналогично доказательству предложения 3.1.1.

Моном степени из $\Lambda(V_{m,s})$ будем называть *скособоченным* степени $(a_0, \ldots, a_n)$ $(a_0 < a_1 < \ldots < a_n)$, если он имеет вид:

$$\left(\bigwedge_{\substack{i=0,\ldots,n \\ l=0,\ldots,s}} \eta_i^{0,l}\right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=0,\ldots,n \\ l=0,\ldots,s-1}} \xi_i^{0,l}\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=0,\ldots,n} \xi_{a_i}^{0,s}\right)$$

Сравнивать скособоченные мономы будем сначала по общей степени, а потом соответствующие наборы $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ лексикографически.

Рассмотрим $\alpha_{2,s}$-моном $M = x^{(k_0)} \cdot \ldots \cdot x^{(k_n)}$ $(k_0 < k_1 < \ldots < k_n)$. Аналогично рассуждению из 3.1.1, легко видеть, что самым старшим скособоченным мономом в $\psi_{2,s}(M)$ будет моном степени $(k_0, k_1 - (2s+1), k_2 - 2(2s+1), \ldots, k_n - n(2s+1))$. Кроме того, заметим, что если $\alpha_{2,s}$-моном N больше M относительно упорядоченья degrevlex, то наибольший скособоченный моном в $\psi_{2,s}(N)$ больше наибольшего скособоченного монома в $\psi_{2,s}(M)$. Таким образом, образ ненулевой линейной комбинации $\alpha_{2,s}$-мономов при гомоморфизме $\psi_{2,s}$ не будет нулевым, так как наибольший скособоченный моном из образа наибольшего $\alpha_{2,s}$-монома в этой линейной комбинации ни с чем не сократится.

$\square$

Замечание. Первичность фактора свободной алгебры по идеалу $[x^2, (x')^2, \ldots, (x^{(s)})^2]$ доказывается ровно так же, как в теореме 3.1.1.

3.4 Асимптотические свойства алгебр $k\{x\}/[x^m]$

Рассмотрим дифференциальную алгебру вида $A = k\{x\}/I$, где I — некоторый дифференциальный идеал.

Через $A|_n$ будем обозначать подалгебру в A, порожденную образами $x, \ldots, x^{(n)}$. Нас будут интересовать размерности алгебр $k\{x\}/[x^m]|_n$. Отметим, что вопрос об этих размерностях идейно созвучен понятию дифференциального размерностного полинома (см., например, [9]).

Теорема 3.4.1. *Выполнено равенство* $\dim_k k\{x\}/[x^m]|_N = m^{N+1}$.

Доказательство. Будем называть ω_m-мономами мономы вида $M = x^{k_n} \cdot \ldots \cdot x^{k_0}$, где $k_n \geqslant \ldots \geqslant k_0$ и для всякого j выполнено $k_{n-j} \geqslant \left[\frac{j}{m-1}\right]$. Покажем, что образы ω_m-мономов образуют k-базис $k\{x\}/[x^m]|_N$. Действовать будем аналогично доказательству предложения 3.1.1. Мы построим взаимно-однозначное соответствие между ω-мономами и скособоченными мономами (см. определение скособоченного монома в доказательстве теоремы 3.3.1), причем сделаем это так, чтобы лексикографически большему ω_m-моному соответствовал лексикографически больший скособоченный моном.

В мономе M из сомножителя, соответствующего $\bar{x}^{(k_{n-j})}$, мы возьмем в этот моном произведение $\xi^r_{k_{n-j}-q} \wedge \eta^r_q$, где q и r — соответственно неполное частное и остаток от деления j на $m-1$. Заметим, что в силу условия на k_j это определение корректно, полученный моном не равен нулю и является скособоченным. Также легко убедиться в монотонности при лексикографическом упорядоченьи, из которой автоматически следует линейная независимость ω_m-мономов.

Для того, чтобы доказать, что всякий моном из $k\{x\}/[x^m]|_N$ по модулю $[x^m]$ эквивалентен линейной комбинации ω_m-мономов, заметим, что из доказательства предложения 3.1.1 следует, что для всякого $p \in k\{x\}/[x^m]|_N$ в $\varphi_m(p)$ входит скособоченный моном, причем максимальный порядок производной в нем не превосходит максимального порядка производной в p. Так как каждому скособоченному моному соответствует свой ω_m-моном с тем же максимальным порядком производной, получаем требуемое.

Осталось посчитать количество ω_m-мономов, куда входят производные порядка не больше N. Производных каждого порядка можно взять от 0 до $m-1$, то есть общее количество вариантов равно m^{N+1}. □

Следствие 3.4.1. *ω_m-мономы образуют k-базис алгебры* $k\{x\}/[x^m]$.

4 Теоремы о примитивном элементе

4.1 Теоремы о примитивном элементе в расширениях дифференциальных полей

В этой главе все поля предполагаются полями нулевой характеристики.

Определение 4.1.1. Дифференциальное кольцо, являющееся полем, называется *дифференциальным полем.* Пусть $F \subset E$ — расширение дифференциальных полей и $a \in E$. Мы будем обозначать дифференциальное подполе в E, порожденное a и F, через $F\langle a\rangle$.

Элемент $a \in E$ называется *примитивным элементом* для расширения дифференциальных полей $F \subset E$, если $E = F\langle a\rangle$.

Колчин доказал ([12]) дифференциальный аналог теоремы о примитивном элементе:

Теорема 4.1.1. *Пусть* $E = F\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ *и* $\operatorname{trdeg}_F E < \infty$*. Пусть также* F *содержит неконстанту. Тогда существует* $b \in E$ *такой, что* $E = F\langle b\rangle$*.*

Следствие 4.1.1. *Пусть* $E = F\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ *и* $\operatorname{trdeg}_F E < \infty$*. Пусть также* E *содержит неконстанту. Тогда существуют* $b, c \in E$ *такие, что* $E = F\langle b, c\rangle$*.*

Замечание. В [12] Колчин рассматривал более общий случай нескольких коммутирующих дифференцирований. Мы рассматриваем случай только одного дифференцирования.

Последнее условие теоремы не может быть исключено. Действительно, рассмотрим поле $E = \mathbb{Q}(x, y)$ с нулевым дифференцированием. Легко видеть, что у расширения $F = \mathbb{Q} \subset E$ нет примитивного элемента.

Теорема Колчина была расширена на случай положительной характеристики Зайденбергом в [22]. Случаи обеих характеристик были собраны воедино Колчиным в монографии [13] с использованием понятия дифференциальной сепарабельности. В работе [1] Бабаханиан предъявил в явном виде примитивный элемент для некоторых конкретных расширений дифференциальных полей.

Целью следующих двух разделов будет доказательство следующих двух теорем, усиливающих результат Колчина:

Теорема 4.1.2. *Пусть* $E = k\langle a, b\rangle$*,* $\operatorname{trdeg}_k E < \infty$ *и* $b' \neq 0$*. Тогда существует* $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *такой, что* $\operatorname{trdeg}_k k\langle a + p(b)\rangle = \operatorname{trdeg}_k k\langle a, b\rangle$*.*

Теорема 4.1.3. *Пусть* $E = k\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, $\operatorname{trdeg} E < \infty$ *и* E *содержит неконстанту. Тогда существует* $a \in E$ *такой, что* $E = k\langle a\rangle$.

Замечание. В отличие от доказательства Колчина, в данном случае не всегда существует примитивный элемент вида $a + \lambda b$ ($\lambda \in k$). Рассмотрим, например, поле $\mathbb{Q}(x, y)$ с дифференцированием $x' = 1$, $y' = 0$. Ни один из элементов вида $x + \lambda y$ не порождает всего поля, но $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{Q}\langle x^2 + y\rangle$.

Из доказательств теорем 4.1.2 и 4.1.3 вытекает также следствие:

Следствие 4.1.2. *Пусть* $E = F\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ *и* $\operatorname{trdeg}_F E < \infty$. *Пусть также* F *содержит неконстанту. Тогда в дифференциальной* F*-подалгебре, порожденной* $a_1, \ldots, a_n$, *найдется такой элемент* b, *что* $E = F\langle b\rangle$.

4.2 Существование элемента, порождающего плотное подполе

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 4.1.2.

Доказательство. Нам потребуются следующие известные леммы:

Лемма 4.2.1. *Если* $\operatorname{trdeg}_k k\langle a\rangle = n$, *то* $k\langle a\rangle = k\left(a, a', \ldots, a^{(n)}\right)$.

Доказательство. Обозначим через m минимальное натуральное число такое, что $a, \ldots, a^{(m)}$ алгебраически зависимы над k. Пусть $R(a, \ldots, a^{(m)}) = 0$ — алгебраическая зависимость между ними.

Тогда

$$0 = \left(R(a, \ldots, a^{(m)})\right)' = \sum_{i=0}^{m} a^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial a^{(i)}} R,$$

то есть $a^{(m+1)} \in k(a, \ldots, a^{(m)})$.

Аналогично, $a^{(N)} \in k(a, \ldots, a^{(m)})$ для всех натуральных N. Значит $n = m$ и $k\langle a\rangle = k\left(a, \ldots, a^{(n)}\right)$. □

Лемма 4.2.2 ([21], p.35). *Пусть* $q(x, x', \ldots, x^{(n)})$ *— ненулевой дифференциальный многочлен над дифференциальным полем* E *и* $f \in E$ *— неконстанта. Тогда существует такой* $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$, *что*

$$q(x, x', \ldots, x^{(n)})\Big|_{x=p(f)} \neq 0.$$

Введем алгебраически независимые переменные $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$. Продолжим дифференцирование с E на $E[\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots]$ по формулам $(\Lambda_i)' = b'\Lambda_{i+1}$.

Эту конструкцию объясняет следующее наблюдение: рассмотрим многочлен $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$; тогда формулы $\varphi_p(\Lambda_i) = p^{(i)}(b)$ задают гомоморфизм дифференциальных k-алгебр $\varphi_p\colon E[\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots] \to E$.

Пусть $c = a + \Lambda_0$ и $K = k(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots) \subset E(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots)$. Так как $K\langle c\rangle \subset K\langle a, b\rangle$, выполнено равенство $\operatorname{trdeg}_K K\langle c\rangle = n < \infty$. Значит существует ненулевой многочлен $R(x_0, \ldots, x_n) \in K[x_0, \ldots, x_n]$ такой, что $R(c, c', \ldots, c^{(n)}) = 0$. Заметим, что он существенно зависит от переменной x_n. Домножив его на соответствующий элемент $k[\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots]$, мы получим многочлен относительно $c, c', \ldots, c^{(n)}$ и $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_N$ над k. Обозначим его $Q(c, \ldots, c^{(n)}, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_N)$. Кроме того, мы будем предполагать, что Q удовлетворяет следующим условиям минимальности:

1. $\deg_{c^{(n)}} Q$ минимально возможная;
2. при данном $\deg_{c^{(n)}} Q$ значение N является минимальным возможным;
3. при данных $\deg_{c^{(n)}} Q$ и N степень $\deg_{\Lambda_N} Q$ является минимально возможной.

Лемма 4.2.3. *$N = n$.*

Доказательство. Пусть $N > n$. Запишем Q как многочлен относительно переменной Λ_N: $Q = q_m \Lambda_N^m + \ldots + q_0$, где q_i являются многочленами над k относительно $c, \ldots, c^{(n)}, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_{N-1}$. Так как $N > n$, $c, \ldots, c^{(n)} \in E(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{N-1})$ и Λ_N трансцендентна над $k(c, \ldots, c^{(n)}, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_{N-1})$. Тогда из равенства $Q = 0$ следует $q_i = 0$ для всех i, что противоречит минимальности N.

Пусть $N < n$. Легко видеть, что $c^{(n)}$ имеет вид $(b')^n \Lambda_n + c_0$, где $c_0 \in E(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{n-1})$. Таким образом, $c^{(n)}$ трансцендентен над $k(c, \ldots, c^{(n-1)}, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_N) \subset E(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{n-1})$. Но Q зависит $c^{(n)}$. Противоречие. □

Лемма 4.2.4. *$\frac{\partial}{\partial \Lambda_n} Q \neq 0$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из свойств минимальности Q и неравенств $\deg_{c^{(n)}} Q \geqslant \deg_{c^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \Lambda_n} Q$ и $\deg_{\Lambda_n} Q > \deg_{\Lambda_n} \frac{\partial}{\partial \Lambda_n} Q > -\infty$. □

Вернемся к доказательству теоремы 4.1.2.

Рассмотрим $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Применив гомоморфизм φ_p к $Q(c, \ldots, c^{(n)}, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_n)$, мы получим алгебраическую зависимость между

$\varphi_p(\Lambda_0), \ldots, \varphi_p(\Lambda_n) \in \mathbb{Q}[b]$ над $k\left(\varphi_p(c), \ldots, \varphi_p(c^{(n)})\right)$, которая, в свою очередь, является алгебраической зависимостью для b над $k\left(\varphi_p(c), \ldots, \varphi_p(c^{(n)})\right)$. Осталось подобрать такой многочлен $p(x)$, чтобы эта зависимость была нетривиальной. Найдем её производную по b:

$$\frac{\partial}{\partial b} Q\left(\varphi_p(c), \ldots, \varphi_p(c^{(n)}), p(b), \ldots, p^{(n)}(b)\right) = \\ = \sum_{i=0}^{n} \varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial \Lambda_i} Q\right) p^{(i+1)}(b) = \varphi_p\left(\sum_{i=0}^{n} \Lambda_{i+1} \frac{\partial}{\partial \Lambda_i} Q\right). \quad (6)$$

По лемме 4.2.4 многочлен $T = \sum\limits_{i=0}^{n} \Lambda_{i+1} \frac{\partial}{\partial \Lambda_i} Q$ не равен нулю. Учитывая, что $c = a + \Lambda_0$, мы можем переписать T как многочлен относительно $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{n+1}$ над полем $k\langle a, b\rangle$. Обозначим дифференцирование на E через D. Тогда $\tilde{D} = \frac{1}{b'} D$ также является дифференцированием на E. Заметим, что $\tilde{D}\Lambda_i = \Lambda_{i+1}$.

Таким образом, мы можем применить лемму 4.2.2, взяв в качестве дифференциального поля E относительно дифференцирования $\tilde{D}$, в качестве неконстантного элемента — элемент $b \in E$, и в качестве многочлена — многочлен T относительно переменных относительно $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{n+1}$. Это даст нам многочлен $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такой, что $\varphi_p(T) \neq 0$.

Так как и $\varphi_p(c) = a + p(b)$ и b алгебраичны над $k\langle \varphi_p(c)\rangle$, a также алгебраичен над $k\langle \varphi_p(c)\rangle$. Стало быть, $\operatorname{trdeg}_k k\langle \varphi_p(c)\rangle = \operatorname{trdeg} k\langle a, b\rangle$.

□

При помощи таких же рассуждений можно доказать также следующее:

Следствие 4.2.1. *Пусть $E = k\langle a, b\rangle$, $\operatorname{trdeg}_k E < \infty$, $b' \neq 0$ и $c \in k\langle a, b\rangle$. Тогда существует такой многочлен $p(x) \in k[x]$, что $\operatorname{trdeg} k\langle a + c \cdot p(b)\rangle = \operatorname{trdeg} k\langle a, b\rangle$.*

4.3 Теорема о примитивном элементе для дифференциальных полей

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 4.1.3.

Доказательство теоремы 4.1.3. В силу теоремы 4.1.2 найдется такой $a \in E$, что $\operatorname{trdeg}_k E = \operatorname{trdeg}_k k\langle a\rangle = n$. Так как $\dim_{k\langle a\rangle} E < \infty$, существует также такой $b \in E$, что $E = k\langle a, b\rangle$. Мы будем искать примитивный элемент в виде $b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_{n+2} a^{n+2}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2} \in \mathbb{Q}$.

Для этого мы воспользуемся техникой, развитой Колчиным в [12, стр.729]. Напомним некоторые определения.

Пусть $K_1 \supset L$ — расширение дифференциальных полей. *Изоморфизмом K_1 над L* мы будем называть такой изоморфизм K_1 и поля K_2, что:

1. $K_2 \supset L$ — расширение дифференциальных полей;

2. отображение оставляет L на месте;

3. поля K_1 и K_2 имеют общее расширение.

Лемма 4.3.1 (Колчин, ([12], стр.726))**.** *Пусть $E \supset F$ — расширение дифференциальных полей, и $\gamma \in E$. Для того, чтобы выполнялось равенство $E = F\langle\gamma\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нетождественный изоморфизм E над F не оставлял γ на месте.*

Пусть $R(x, x', \ldots, x^{(n)}) \in k\{x\}$ имеет корень $x = a$, и $Q(x, x', \ldots, x^{(n-1)}, y) \in k\{x, y\}$ имеет корни $x = a$, $y = b$. Будем искать $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что элемент $z = y + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n$ принимает различные значения на различных решениях $\{R(x), Q(x, y)\}$. В этом случае z будет удовлетворять условиям леммы 4.3.1.

Введем дифференциальные неизвестные $t_1, \ldots, t_{n+2}$ и в $E\{x, y, t_1, \ldots, t_{n+2}\}$ рассмотрим радикальный дифференциальный идеал (см. необходимые определения [21, стр.2, стр.7])

$$I = \{R(x), Q(x, y), t_1', \ldots, t_{n+2}', b - y + t_1(a - x) + t_2(a^2 - x^2) + \ldots + t_{n+2}(a^{n+2} - x^{n+2})\}$$

Пусть $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ — разложение идеала I в пересечение минимальных дифференциальных простых идеалов (см. [21, стр.13]). Пусть также они занумерованы так, что каждый из $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ содержит и $a - x$, и $b - y$, а каждый из $\mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_s$ не содержит или $a - x$, или $b - y$. Рассмотрим $\mathfrak{p}_j$ при $j > r$. Если $(b - y) \notin \mathfrak{p}_j$, то и $a - x \notin \mathfrak{p}_j$. Таким образом, $a - x \notin \mathfrak{p}_j$ для всех $j > r$. Через $\overline{x}, \overline{y}, \overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_n$ обозначим общее решение $\mathfrak{p}_j$ (см. [12, стр.725]). Дифференцируя $n + 1$ раз равенство

$$b - \overline{y} + \overline{t}_1(a - \overline{x}) + \overline{t}_2(a^2 - \overline{x}^2) + \ldots + \overline{t}_n(a^n - \overline{x}^n) = 0,$$

мы получим систему линейных уравнений относительно $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_{n+2}$. Исследуем некоторые её свойства.

Обозначим через $\mathrm{wr}(f_1, \ldots, f_N)$ вронскиан $f_1, \ldots, f_N$ (см. [16, гл. 2]).

Через $W_{k,l}(x, y)$ обозначим $\mathrm{wr}(x-y, \ldots, \widehat{x^l - y^l}, \ldots, x^{k+1}-y^{k+1})$, где $k \geqslant 2$ и $1 \leqslant l \leqslant k+1$.

Лемма 4.3.2. *Если $W_{k,l}(a, \overline{x}) = 0$ для всех $1 \leqslant l \leqslant k+1$, то $\operatorname{trdeg}_k k\langle a, \overline{x}\rangle \leqslant n + k - 2$.*

Доказательство. Пусть x и y независимые дифференциальные переменные. Докажем несколько утверждений о дифференциальном многочлене $W_{k,l}(x, y)$.

Лемма 4.3.3. *$W_{k,l}(x, y) = A_l(x, y) + x^{(k-1)}B_l(x, y) + y^{(k-1)}C_l(x, y)$, где $A_l, B_l, C_l \in \mathbb{Q}[x, \ldots, x^{(k-2)}, y, \ldots, y^{(k-2)}]$.*

Если при этом $k \geqslant 3$, то $B_l(x, y) = -y'D_l(x, y)$ и $C_l(x, y) = x'D_l(x, y)$, где D_l принадлежит $\mathbb{Q}[x, \ldots, x^{(k-2)}, y, \ldots, y^{(k-2)}]$.

Доказательство. Для упрощения выкладок рассмотрим только случай $l = k+1$, остальные рассматриваются аналогично. Последняя строка матрицы, соответствующей $W_{k,k+1}(x, y)$, представляется в виде суммы трех строк: $x^{(k-1)}(1, 2x, \ldots, kx^{k-1})$, $-y^{(k-1)}(1, 2y, \ldots, y^{k-1})$ и $(a_1, \ldots, a_k)$ где $a_i \in \mathbb{Q}[x, \ldots, x^{(k-2)}, y, \ldots, y^{(k-2)}]$ для всех i. Значит сам определитель $W_{k,k+1}(x, y)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-y & \ldots & x^k - y^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x-y)^{(k-2)} & \ldots & (x^k-y^k)^{(k-2)} \\ a_1 & \ldots & a_k \end{vmatrix} + x^{(k-1)} \begin{vmatrix} x-y & \ldots & x^k - y^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x-y)^{(k-2)} & \ldots & (x^k-y^k)^{(k-2)} \\ 1 & \ldots & kx^{k-1} \end{vmatrix} - y^{(k-1)} \begin{vmatrix} x-y & \ldots & x^k - y^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x-y)^{(k-2)} & \ldots & (x^k-y^k)^{(k-2)} \\ 1 & \ldots & ky^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Это равенство доказывает первое утверждение леммы.

Предположим теперь, что $k \geqslant 3$. Вторая строка соответствующей матрицы является суммой $x'(1, 2x, \ldots, kx^{k-1})$ и $-y'(1, 2y, \ldots, ky^{k-1})$. Вычитая последнюю строку из второй, получаем:

$$B_l = \begin{vmatrix} x-y & \ldots & x^k - y^k \\ x'-y' & \ldots & x'kx^{k-1} - y'ky^{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & kx^{k-1} \end{vmatrix} = -y' \begin{vmatrix} x-y & \ldots & x^k - y^k \\ 1 & \ldots & ky^{k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & kx^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель обозначим через D_l. Это даёт нам представление $B_l = -y'D_l$ и, аналогично, $C_l = x'D_l$. □

Лемма 4.3.4. *По крайней мере одна из рациональных функций* $\frac{W_{k,1}(x,y)}{W_{k,k+1}(x,y)}$, $\ldots$, $\frac{W_{k,k}(x,y)}{W_{k,k+1}(x,y)}$ *зависит существенно от* $x^{(k-1)}$ *и* $y^{(k-1)}$.

Доказательство. В силу симметрии относительно x и y, достаточно доказать зависимость хотя бы от одной из переменных $x^{(k-1)}$ и $y^{(k-1)}$. Предположим противное, то есть $(-1)^{k-l}\frac{W_{k,l}(x,y)}{W_{k,k+1}(x,y)} \in \mathbb{Q}(x,\ldots,x^{(k-2)},y,\ldots,y^{(k-2)})$. Согласно правилу Крамера, эти выражения являются решениями следующей системы линейных уравнений относительно $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$:

$$\begin{pmatrix} x-y & \ldots & x^k-y^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x-y)^{(k-1)} & \ldots & \left(x^k-y^k\right)^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{k+1}-y^{k+1} \\ \vdots \\ \left(x^{k+1}-y^{k+1}\right)^{(k-1)} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Так как $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{Q}(x,\ldots,x^{(k-2)},y,\ldots,y^{(k-2)})$, и $x^{(k-1)}$ и $y^{(k-1)}$ трансцендентны над этим полем, последнее уравнение влечет следующие равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2x\alpha_2 + \ldots + kx^{k-1}\alpha_k = (k+1)x^k; \\ \alpha_1 + 2y\alpha_2 + \ldots + ky^{k-1}\alpha_k = (k+1)y^k. \end{cases} \qquad (**)$$

Осталось присвоить x и y конкретные значения, чтобы прийти к противоречию. А именно, рассмотрим поле $\mathbb{C}(t)$ со стандартным дифференцированием ($t' = 1$), и пусть ξ — примитивный корень из единицы $(k+1)$-ой степени. Положим $x = t$ и $y = \xi t$. Матрица (*) невырожденна, так как её определитель равен $\operatorname{wr}\left((1-\xi)t,\ldots,(1-\xi^k)t^k\right)$. Этот определитель не равен нулю, так как $(1-\xi)t$, $\ldots$, $(1-\xi^k)t^k$ линейно независимы над полем констант ([16, предл. 2.8]). Легко видеть, что единственным решением системы (*) является $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Однако, равенства (**) не выполнены. Противоречие. $\square$

Следствие 4.3.1. *Пусть* $k \geqslant 3$. *Найдется такой индекс* $1 \leqslant l \leqslant k$, *что*

$$W_{k,l}(x,y)D_{k+1}(x,y) - W_{k,k+1}(x,y)D_l(x,y) = \\ = A_l(x,y)D_{k+1}(x,y) - A_{k+1}(x,y)D_l(x,y) \neq 0.$$

Доказательство. По лемме 4.3.4 существует такой индекс $1 \leqslant l \leqslant k$, что $\frac{W_{k,l}(x,y)}{W_{k,k+1}(x,y)}$ зависит существенно и от $x^{(k-1)}$, и от $y^{(k-1)}$. Это означает, что вектора (A_l,B_l,C_l) и $(A_{k+1},B_{k+1},C_{k+1})$ не пропорциональны. Значит

$D_{k+1}(A_l, B_l, C_l) - D_l(A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}) = (A_l D_{k+1} - A_{k+1} D_l, 0, 0) \neq 0$. Что и требовалось. $\square$

Вернемся к доказательству леммы 4.3.2.

Рассмотрим два случая:

1. $k \leqslant 3$. Через l обозначим индекс из следствия 4.3.1. Так как $W_{k,l}(a, \overline{x}) = 0$ и $W_{k,k+1}(a, \overline{x}) = 0$, то $W_{k,l}(a, \overline{x}) D_{k+1}(a, \overline{x}) - W_{k,k+1}(a, \overline{x}) D_l(a, \overline{x})$ является алгебраической зависимостью между $a, \ldots, a^{(k-2)}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{(k-2)}$. Значит, $\overline{x}^{(j)}$ алгебраичен над $k(a, \ldots, a^{(n-1)}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{(k-3)})$ для всех j. Таким образом, $k\langle a, \overline{x}\rangle$ алгебраично над $k(a, \ldots, a^{(n-1)}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{(k-3)})$, откуда $\operatorname{trdeg}_k k(a, \ldots, a^{(n-1)}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{(k-3)}) \leqslant n + k - 2$.

2. $k = 2$. В этом случае $W_{2,2}(x, y)$ и $W_{2,3}(x, y)$ могут быть вычислены непосредственно:

$$W_{2,3}(x, y) = (x - y)^2 (x' + y');$$

$$W_{2,2}(x, y) = (x - y)(x'(2x^2 - xy - y^2) + y'(x^2 + xy - 2y^2)).$$

   Если $W_{2,3}(a, \overline{x})$ и $W_{2,2}(a, \overline{x})$ равны нулю, то либо $a' = \overline{x}' = 0$, либо определитель системы линейных уравнений $W_{2,3}(a, \overline{x}) = W_{2,2}(a, \overline{x}) = 0$ относительно a' и $\overline{x}'$ равен нулю, то есть $-(a - \overline{x})^5 = 0$. Но это невозможно в силу $a \neq \overline{x}$.

$\square$

Лемма 4.3.5. $\operatorname{trdeg}_k k\langle a, b, \overline{x}, \overline{y}, \overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_{n+2}\rangle \leqslant 2n + 1$.

Доказательство. Дифференцируя равенство $\overline{y} - b = \overline{t}_1(a - \overline{x}) + \ldots + \overline{t}_{n+2}(a^{n+2} - \overline{x}^{n+2})$, получаем следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} \overline{y} - b \\ \overline{y}' - b' \\ \vdots \\ \overline{y}^{(n+1)} - b^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \overline{x} & \ldots & a^{n+2} - \overline{x}^{n+2} \\ a' - \overline{x}' & \ldots & \left(a^{n+2} - \overline{x}^{n+2}\right)' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{(n+1)} - \overline{x}^{(n+1)} & \ldots & \left(a^{n+2} - \overline{x}^{n+2}\right)^{(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{t}_1 \\ \overline{t}_2 \\ \vdots \\ \overline{t}_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Через k обозначим минимальное число такое, что для всех $1 \leqslant l \leqslant k + 1$ выполнено $W_{k,l}(a, \overline{x}) = 0$. Рассмотрим два случая:

1. $k < n+2$. Тогда по крайней мере один из $(k-1)\times(k-1)$-миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} a-\overline{x} & \dots & a^{n+2}-\overline{x}^{n+2} \\ \dots & \ddots & \vdots \\ a^{(k-2)}-\overline{x}^{(k-2)} & \dots & \left(a^{n+2}-\overline{x}^{n+2}\right)^{(k-2)} \end{pmatrix}$$

невырожден. Пусть $W_{k-1,l}(a,\overline{x}) \neq 0$. Домножив на обратную матрицу, мы получим формулы, выражающие $\overline{t}_j$ как рациональные функции относительно a, b, $\overline{x}$, $\overline{y}$ и их производных, $\overline{t}_l$, $\overline{t}_{k+1},\dots,\overline{t}_{n+2}$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k$, $j \neq l$.

Отсюда $\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_{l-1},\overline{t}_{l+1},\dots,\overline{t}_k \in k\langle a,b,\overline{x},\overline{y}\rangle(\overline{t}_l,\overline{t}_{k+1},\dots,\overline{t}_{n+2})$. По лемме 4.3.2, $\operatorname{trdeg}_k k\langle a,b,\overline{x},\overline{y}\rangle \leqslant n+k-2$. Стало быть,

$$\operatorname{trdeg}_k k\langle a,b,\overline{x},\overline{y},\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_{n+2}\rangle \leqslant \operatorname{trdeg}_k k\langle a,b,\overline{x},\overline{y}\rangle + n-k+3 \leqslant$$
$$\leqslant (n+k-2)+(n-k+3) = 2n+1.$$

2. $k \geqslant n+2$. В этом случае $\operatorname{trdeg}_k k\langle a,b,\overline{x},\overline{y}\rangle \leqslant 2n$. Существует индекс $1 \leqslant l \leqslant n+2$ такой, что $W_{n+1,l}(a,\overline{x}) \neq 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\overline{t}_1,\dots,\overline{t}_{l-1},\overline{t}_{l+1},\dots,\overline{t}_{n+2} \in k\langle a,b,\overline{x},\overline{y}\rangle(\overline{t}_l)$. Отсюда следует требуемое неравенство.

□

Из леммы 4.3.5 следует, что $\overline{t}_1$, …, $\overline{t}_{n+2}$ алгебраически зависимы над $k\langle a,b\rangle$. Обозначим эту зависимость через $P_j(t_1,\dots,t_{n+2}) \in E[t_1,\dots t_{n+2}]$. Рассмотрим многочлен $P = P_{r+1}\cdot\ldots\cdot P_s$. Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2} \in \mathbb{Q}$ таковы, что $P(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}) \neq 0$. Тогда для всякого решения $\{R(x),Q(x,y)\}$, отличного от (b,a), выполнено $b-y+\lambda_1(a-x)+\ldots+\lambda_{n+2}(a^{n+2}-a^{n+2}) \neq 0$. Что и требовалось доказать.

□

4.4 Порождение плотной подалгебры в алгебре Ли двумя элементами

Пусть L — алгебра Ли, удовлетворяющая стандартному тождеству степени 5. В этом разделе мы будем использовать обозначение $R(L)$, введенное в разделе 2.4 для обозначения подалгебры в $\mathrm{End}_k L$, порожденной элементами вида $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle = \sum\limits_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma \operatorname{ad} g_{\sigma(1)} \operatorname{ad} g_{\sigma(2)} \operatorname{ad} g_{\sigma(3)}$, где $g_1, g_2, g_3 \in L$.

Теорема 4.4.1. *Пусть A — целостная дифференциальная алгебра конечной степени трансцендентности (как коммутативная алгебра). Тогда существуют $a, b \in A$ такие, что $\operatorname{trdeg} A$ равна $\operatorname{trdeg} R(A_0)$, где через A_0 обозначена подалгебра Ли в $\mathrm{Diff}\, A$, порожденная $a\partial$ и $b\partial$.*

Доказательство будет основано на следующем утверждении, представляющем самостоятельный интерес.

Предложение 4.4.1. *Пусть $E \supset k$ — расширение дифференциальных полей, причем $\operatorname{trdeg}_k E < \infty$, и $b \in E$ таков, что $b' \neq 0$ и $\operatorname{trdeg}_k k\langle b\rangle = \operatorname{trdeg}_k E$. Тогда для любого дифференциального многочлена $P(x) \in k\{x\}\backslash k$ найдется многочлен $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ такой, что $\operatorname{trdeg}_k k\langle P(q(b))\rangle = \operatorname{trdeg}_k k\langle b\rangle$*

Доказательство. Доказательство будет похоже на доказательство теоремы 4.1.2. Введем алгебраически независимые переменные $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$. Продолжим дифференцирование с E на $E[\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots]$ по формулам $(\Lambda_i)' = b'\Lambda_{i+1}$. Пусть $K = k(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots)$. Так как $\operatorname{trdeg}_k E < \infty$, $\operatorname{trdeg}_K E(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots) < \infty$.

Пусть $c = P(\Lambda_0)$, тогда существует такое минимальное n, что $c, c', \ldots, c^{(n)}$ алгебраически зависимы над K. Эту алгебраическую зависимость можно считать многочленом от $c, c', \ldots, c^{(n)}$ и $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_N$ с коэффициентами из k. Выберем эту зависимость R такой, чтобы:

1. N было минимальным возможным;
2. при выполнении первого условия степень относительно Λ_N была минимальной возможной.

Пусть порядок дифференциального многочлена $P(x)$ (то есть наибольшая входящая степень производной) равен r.

Лемма 4.4.1. $N = n + r$.

Доказательство. Пусть $N > n + r$. Тогда Λ_N не входит ни в одно из выражений $c^{(k)}$, то есть коэффициент при любой степени Λ_N также является требуемым соотношением, но с меньшим N.

Пусть $N < n+r$. Так как Λ_{n+r} входит в $c^{(n)}$, но не входит в более младшие производные c, то $c^{(n)}$ трансцендентна над $k\left(c, \ldots, c^{(n-1)}, \Lambda_0, \ldots, \Lambda_N\right)$, чего не может быть. $\square$

Заметим также, что $\frac{\partial}{\partial \Lambda_{n+r}} R \neq 0$, так как иначе это было бы соотношение меньшей степени. Значит, аналогично доказательству теоремы 4.1.2, мы можем выбрать такой многочлен $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$, что после постановки в R вместо Λ_i выражения $q^{(i)}(b)$ мы получим алгебраическую зависимость для b над $c, \ldots, c^{(n)}$ (строго говоря, имеются в виду значения $c^{(i)}$ после соответствующей подстановки).

Таким образом, E алгебраично надо $k\langle b\rangle$, а $k\langle b\rangle$ алгебраично над $k\langle P(q(b))\rangle$. Что и требовалось.

$\square$

Теперь докажем саму теорему.

Доказательство. Согласно теореме 4.1.2 в A можно выбрать элемент b такой, что степень трансцендентности подалгебры, порожденной b, равна степени трансцендентности A. Теперь в качестве $P(x)$ из предыдущего предложения возьмем $x'x^{(3)} - \left(x^{(2)}\right)^2$. Пусть $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ — соответствующий многочлен.

Рассмотрим подаглебру Ли в $\operatorname{Diff} A$, порожденную ∂ и $q(b)\partial$. Тогда в $R(A_0)$ лежит элемент $\operatorname{wr}(1, q(b), (q(b))') = P(q(b))$. Но этот элемент порождает подалгебру той же степени трансцендентности, что и A. Что и требовалось. $\square$

Комбинируя результаты этого раздела с результатами работы [37], получаем следующее следствие.

Следствие 4.4.1. *Пусть L — простая конечно порожденная алгебра Ли, удовлетворяющая стандартному тождеству степени* 5. *Тогда существуют элементы $g, h \in L$ такие, что $\operatorname{trdeg}_k R(L) = \operatorname{trdeg}_k R(L_0)$, где через L_0 обозначена подалгебра Ли в L, порожденная элементами g и h.*

Доказательство. Согласно теореме [37, Теорема 2] алгебра $R(L)$ целостна и имеет конечную степень трансцендентности над k. Фиксируем ненулевой элемент $l \in L$. Тогда в $R(L)$ найдется l-дифференциально конечно порожденная подалгебра подалгебра A_0 той же степени трансцендентности, что и A. Из теоремы 4.4.1 следует, что в A_0 найдутся элементы a и b такие, что

$\operatorname{trdeg}_k A_0 = \operatorname{trdeg}_k R(L_0)$, где L_0 — подалгебра Ли в L, порожденная al и bl. Положим $g = al$, $h = bl$. Что и требовалось. $\square$

5 Случай нескольких дифференцирований

5.1 Введение

Содержание этой главы стоит несколько особняком от остальных. В ней собраны некоторые результаты, касающиеся алгебры Ли специальных дифференцирований алгебры формальных степенных рядов от n переменных.

В разделах 5.2 и 5.3 будут описаны конструкции, позволяющие вложить любую конечномерную алгебру Ли в алгебру Ли такого типа. В разделе 5.4 построен лиев полином, позволяющий восстановить по гладкому двумерному распределению на аффинном многообразии алгебру функций этого многообразия.

В первых двух разделах основным объектом является алгебра Хохшильда. Эта коммутативная алгебра Хопфа была впервые введена Хохшильдом в [7, 8]. Там она появляется по аналогии с его совместными работами с Мостовым (например, [6]), которые касались групп Ли. Они рассматривали для группы Ли алгебру матричных элементов конечномерных представлений.

Нас будет интересовать случай алгебр Ли. Зафиксируем конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ на полем k, обозначим её универсальную обертывающую через $U(\mathfrak{L})$, а двойственное пространство к обертывающей — через $U^*(\mathfrak{L})$. Введем на $U(\mathfrak{L})$ коумножение, задав его формулой $\Delta l \stackrel{\text{def}}{=} l \otimes 1 + 1 \otimes l$ для $l \in \mathfrak{L}$ и продолжив по дистрибутивности на всю $U(\mathfrak{L})$. Несложно получить следующую общую формулу (здесь $e_1, \ldots, e_n$ — базис $\mathfrak{L}$):

$$\Delta(e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n}) = \sum_{m_i' + m_i'' = m_i} C_{m_1}^{m_1'} \ldots C_{m_n}^{m_n'} e_1^{m_1'} \ldots e_n^{m_n'} \otimes e_1^{m_1''} \ldots e_n^{m_n''}. \qquad (7)$$

Это коумножение индуцирует умножение на $U^*(\mathfrak{L})$, задаваемое формулой

$$\langle f * g; u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \otimes g; \Delta u \rangle,$$

где $f, g \in U^*(\mathfrak{L})$ и $u \in U(\mathfrak{L})$. Тогда $U^*(\mathfrak{L})$ становится коммутативной ассоциативной алгеброй, где единицей является функционал, сопоставляющий каждому элементу $U(\mathfrak{L})$ его свободный член.

Она также является $\mathfrak{L}$-модулем относительно действия ($l \in \mathfrak{L}$, $f \in U^*(\mathfrak{L})$ и $u \in U(\mathfrak{L})$):

$$\langle l \times f; u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f; ul \rangle. \qquad (8)$$

Более того, элементы $\mathfrak{L}$ являются дифференцированиями $U^*(\mathfrak{L})$: $\langle l \times (f * g); u\rangle = \langle (l \times f) * g; u\rangle + \langle f * (l \times g); u\rangle$.

Хохшильд определяет $R(\mathfrak{L})$ как подпространство функционалов из $U^*(\mathfrak{L})$, содержащих в ядре идеал $U(\mathfrak{L})$ конечной коразмерности. То, что это подалгебра, непосредственно вытекает из определения $R(\mathfrak{L})$ как прямой суммы всех конечномерных $\mathfrak{L}$-подмодулей в $U^*(\mathfrak{L})$ (это определение из [39, 33]).

Замечание. Эта конструкция на самом деле является частным случаем конечного дуала (см. [18, разд. 9.1]). Конечный дуал алгебры Хопфа S определяется как подпространство функционалов в S^*, ядро которых содержит идеал конечной коразмерности. Даже в таких общих предположениях это будет алгебра Хопфа.

В своих работах Хохшильд использовал $R(\mathfrak{L})$ для построения алгебраических групп, касательная алгебра Ли которых содержит данную. В частности, из этих групп может быть выделена одна каноническая. Последующие исследователи (например, [5]) изучали $R(\mathfrak{L})$ именно в этом аспекте. Позже были получены некоторые результаты, которые рассматривали $R(\mathfrak{L})$ как инвариант алгебры $\mathfrak{L}$.

В результатах, изложенных в двух первых разделах, мы будем рассматривать алгебры Хохшильда с несколько иной стороны — с точки зрения Гейзенберговых оболочек. Дело в том, что структура алгебры на $U^*(\mathfrak{L})$ не зависит от скобки Ли на пространстве $\mathfrak{L}$ и определяется только размерностью $\mathfrak{L}$. Структура алгебры Ли отражается только в действии (8). Эта алгебра известна и называется пополненной алгеброй разделенных степеней $\widetilde{O}_n$. При $\operatorname{char} k = 0$ она изоморфна алгебре формальных степенных рядов от n переменных $\widetilde{\mathcal{E}_n} \stackrel{\text{def}}{=} k[[x_1, \ldots, x_n]]$ (см. [36, §44]). Нас будет интересовать поведение алгебры Хохшильда при этих изоморфизмах. Оказывается, так можно построить довольно наглядные реализации этой алгебры, а также получить некоторые интересные результаты об исходной алгебре Ли.

5.2 Гейзенберговы оболочки в базисе Пуанкаре—Биркгофа—Витта

Введем на $R(\mathfrak{L})$ коумножение, которое сделает её алгеброй Хопфа и будет индуцировать на $U(\mathfrak{L})$ стандартное умножение. Для начала, следуя Диксимье [25, гл. 2.7], заметим, что для конечномерного $\mathfrak{L}$ -модуля V формула $\theta(v, v^*)(u) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u \times v; v^*\rangle$ сопоставляет любой паре $v \in V$ и $v^* \in V^*$ элемент $R(\mathfrak{L})$. Более того, все элементы $R(\mathfrak{L})$ имеют такой вид (для $f \in R(\mathfrak{L})$ в качестве V можно выбрать орбиту f). Переписав формулу для действия (8) в этих обозначениях, получим $u \times \theta(v; v^*) = \theta(u \times v; v^*)$.

Зададим $\delta\colon R(\mathfrak{L}) \to R(\mathfrak{L}) \otimes R(\mathfrak{L})$. Рассмотрим $f \in R(\mathfrak{L})$. Пусть $f = \theta(v, v^*)$ (где $v \in V, v^* \in V^*$). Фиксируем некоторый базис $v_1, \dots, v_k$ в V, а $v_1^*, \dots, v_k^*$ — двойственный к нему. Тогда

$$\delta(\theta(v, v^*)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \theta(v_i, v^*) \otimes \theta(v, v_i^*). \tag{9}$$

Лемма 5.2.1. *Коумножение δ корректно определено, ассоциативно и задает на $U(\mathfrak{L})$ стандартное умножение.*

Доказательство. Чтобы установить корректность, в данном случае необходимо проверить независимость определения от выбора представления V и выбора базиса в нем. Второе почти очевидно, так как тензор $\sum v_i \otimes v_i^*$ есть тождественный оператор, а правая часть формулы (9) ведет себя при замене базиса так же, как этот тензор. Для доказательства первого утверждения заметим, что орбита v в V изоморфна орбите f в $R(\mathfrak{L})$. Тогда можно выбрать базис $v_1, \dots, v_k$ в V так, что $v_1 = v$ и $v_1, \dots, v_{k'}$ — базис орбиты v (k' — размерность этой орбиты). Легко видеть, что при таком выборе базиса δ, определенная с помощью V совпадает с δ, определенной с помощью орбиты f, а от выбора базиса δ не зависит.

Теперь докажем, что δ задает на $U(\mathfrak{L})$ стандартное умножение. Достаточно проверить $\langle f; u_1 \cdot u_2\rangle = \langle \delta f; u_1 \otimes u_2\rangle$, где u_1 и u_2 — мономы из $U(\mathfrak{L})$:

$$\langle \delta f; u_1 \otimes u_2\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \theta(e_i; v^*) \otimes \theta(v; e_i^*); u_1 \otimes u_2\rangle.$$

Так как $\langle u_1 \times e_i; v^*\rangle = \langle e_i; u_1^* \times v^*\rangle$ (здесь допущена некоторая вольность в обозначении — под u_1^* подразумевается сопряженный к оператору в пространстве V, соответсвующему u_1), то

$$\langle \sum_{i=1}^{k} \theta(e_i; v^*) \otimes \theta(v; e_i^*); u_1 \otimes u_2\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i; u_1^* \times v^*\rangle \langle u_2 \times v; e_i^*\rangle.$$

В силу двойственности базисов $e_1, \dots, e_n$ и $e_1^*, \dots, e_n^*$

$$\sum_{i=1}^{k} \langle e_i; u_1^* \times v^*\rangle \langle u_2 \times v; e_i^*\rangle = \langle u_2 \times v; u_1^* \times v^*\rangle = \langle u_1 u_2 \times v; v^*\rangle = \langle f; u_1 u_2\rangle.$$

□

Замечание. Формула для δ и идея доказательства леммы навеяны леммой 2.7.14 из [25].

Замечание. Согласно теореме 9.1.3 из [18], вместе с отображениями $\varepsilon^*(\theta(v; v^*)) = \langle v; v^*\rangle \cdot 1$ (коединица) и $S^*(\theta(v; v^*)) = \theta(v^*; v)$ (антипод) δ задает на $R(\mathfrak{L})$ структуру алгебры Хопфа.

Пусть зафиксировано конечномерное подпредставление ρ алгебры $\mathfrak{L}$ в подпространстве $V \subset R(\mathfrak{L})$. Рассмотрим подалгебру с единицей S_ρ, порожденную V и V^*. Легко видеть, что S_ρ — подалгебра Хопфа. Структура алгберы Хопфа задает на $k - \mathrm{Spec}(S_\rho)$ структуру алгебраической группы (см. [40, гл.2,разд. 7.6]), чья касательная алгебра содержит $\rho(\mathfrak{L})$. Та же группа была построена в [7] из иных соображений.

Сформулируем основную теорему этого раздела. Пусть далее $e_1, \ldots, e_n$ — базис $\mathfrak{L}$. Сопоставим формальный ряд $\sum\langle f; e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n}\rangle(e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n})^*$ каждому элементу $f \in U^*(\mathfrak{L})$. Определим два отображения. Первое — преобразование Бореля $B \colon \widetilde{\mathcal{E}_n} \to U^*(\mathfrak{L})$:

$$B\left(\sum a_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}\right) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n}(e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n})^*.$$

Второе определено только в случае $\mathrm{char}\, k = 0$ и является изоморфизмом алгебр:

$$\varphi\left(\sum a_{m_1,\ldots,m_n}(e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n})^*\right) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

Теорема 5.2.1. *Для каждого $l \in \mathfrak{L}$ определим n «степенных рядов» $\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_n} \in \widetilde{O}_n$ по формуле*

$$\overline{l_i} = \sum_{m_1,\ldots,m_n} \langle e_i^*; (e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n}) \times l\rangle(e_1^{m_1} \ldots e_n^{m_n})^* \tag{10}$$

1. *Отображение*
$$\rho(l) = \overline{l_1}\partial_1 + \ldots + \overline{l_n}\partial_n \tag{11}$$
из $\mathfrak{L}$ в специальные дифференцирования алгебры $\widetilde{O}_n$ есть точное представление $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ -модуль, определямый данным представлением, инъективен, и ρ определяет точное представление $\mathfrak{L}$ и $U(\mathfrak{L})$ в операторах в подпространстве $R(\mathfrak{L})$. Кроме того, $\mathfrak{L}$ задает n -мерное распределение на $k - \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{L}))$.

2. *Обратное преобразование Бореля B^{-1} переводит $R(\mathfrak{L})$ в степенные ряды вида $\frac{p(x_1,\dots,x_n)}{q_1(x_1)\dots q_n(x_n)}$ (где p и q_i — многочлены). В случае, когда* $\operatorname{char} k = 0$ *и k алгебраически замкнуто, $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ лежит в алгебре квазиполиномов, и $\varphi(\overline{l_i})$ выражаются через квазиполиномы рационально.*

3. *Если в $\mathfrak{L}$ можно выбрать базис из элементов, которые нильпотентны в любом конечномерном представлении[2], то в этом базисе $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ лежит в многочленах, а $\varphi(\overline{l_i})$ будут рациональными функциями.*

Прежде чем перейти к доказательству, приведем пример. Пусть $\mathfrak{L}$ — одномерная абелева алгебра Ли над $\mathbb{C}$. В этом случае образующая алгебры действует на рядах как обычная производная, и алгебра $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ совпадает с алгеброй квазиполиномов. То, что она там лежит, следует напрямую из теоремы. С другой стороны, легко проверить, что орбита любого квазиполинома конечномерна. Выпишем для этой алгебры формулы для δ: $\delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ и $\delta(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \otimes e^{\lambda x}$. Тогда подалгебре многочленов соответствует группа $\mathbb{C}$ по сложению, а каждой подалгебре вида $\mathbb{C}[e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}]$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{C}^*$.

Заметим также, что в случае абелевой группы размерности n алгебра $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ снова будет совпадать с алгеброй квазиполиномов.

Доказательство. 1. Утверждение о том, что формула (11) задает вложение алгебры $\mathfrak{L}$ в дифференцирования алгебры $\widetilde{O}_n$, тривиально следует из того соображения, что действия, определенные формулами (11) и (8), совпадают. То, что этот модуль инъективен, известно (см., например, [38, теор. 10.1]). Как было отмечено выше, любой паре $v \in V, v^* \in V^*$, где V — конечномерное представление, соответствует элемент $R(\mathfrak{L})$. По теореме Хариш-Чандры (см. [24, гл.4]), для любого элемента $U(\mathfrak{L})$ существует конечномерное представление, в котором он действует не нулем. Отсюда вытекает точность $\rho|_{R(\mathfrak{L})}$ на $U(\mathfrak{L})$.

В $k-\operatorname{Spec}(R(\mathfrak{L}))$ есть выделенный элемент $\varepsilon^*(f) \overset{\text{def}}{=} \langle f; 1\rangle$. Докажем сначала, что $\mathfrak{L}$ задает n -мерное распределение в точке ε^*. Рассмотрим для $\mathfrak{L}$ точное конечномерное представление в пространстве V (оно существует согласно теоремам Адо и Ивасавы, см [24, гл. 4]). Как было отмечено в начале раздела, каждой паре $v \in V, v^* \in V^*$ соответствует элемент $\theta(v, v^*) \in R(\mathfrak{L})$, значение которого вычисляется по формуле $\theta(v, v^*)(u) = \langle u \times v; v^*\rangle$. В частности, $\varepsilon^*(\theta(v, v^*)) = \langle v; v^*\rangle$. Нам достаточно показать, что найдутся такие

[2]Такой базис может быть выбран, например, при условии $\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$(см. [24])

$f_1, \dots, f_n \in R(\mathfrak{L})$, что $\det(\varepsilon^*(\rho(e_i) \times f_j)) \neq 0$. Будем выбирать эти f_i из подпространства, порожденного элементами вида $\theta(v, v^*)$ ($v \in V, v^* \in V^*$). Это подпространство есть образ $V \otimes V^*$ при отображении $\theta(v \otimes v^*) \overset{\text{def}}{=} \theta(v, v^*)$. В свою очередь, $V \otimes V^*$ естественным образом изоморфно $\mathrm{End}_k(V)^*$, причем отображение θ есть просто ограничение $\mathrm{End}_k(V)^*$ на образ алгебры $U(\mathfrak{L})$ в $\mathrm{End}_k(V)$. Так как $\mathfrak{L}$ вложена в $\mathrm{End}_k(V)$ изоморфно, в $\mathrm{End}_k(V)^*$ найдутся такие $\hat{e}_i$, что $\langle \hat{e}_i; e_j \rangle = \delta_i^j$. Для завершения доказательства осталось положить $f_i = \theta(\hat{e}_i)$.

Замечание. Заметим, что теорема Адо помимо точности гарантирует нам, что нильрадикал алгебры $\mathfrak{L}$ в представлении V (а значит, и в $\mathrm{End}_k(V)^*$, а значит и в $\theta(\mathrm{End}_k(V)^*)$) нильпотентен.

Пусть теперь задан произвольный элемент $\lambda \in k - \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{L}))$. Тогда обозначим $\lambda^{-1} \overset{\text{def}}{=} \lambda \circ S^*$. Это тоже элемент $k - \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{L}))$, причем $(\lambda \otimes \lambda^{-1}) \circ \delta = \varepsilon^*$. Модифицируем f_i, определенные выше: $f_i' \overset{\text{def}}{=} (\lambda^{-1} \otimes 1 \circ \delta)(f_i)$. Тогда

$$\begin{aligned}\det(\lambda(\rho(e_i) \times f_j')) &= \det(((\lambda^{-1} \otimes (\lambda \circ \rho(e_i))) \circ \delta)(f_j)) \\ &= \det((\lambda^{-1} \otimes \lambda) \circ (1 \otimes \rho(e_i)) \circ \delta)(f_j)).\end{aligned}$$

Преобразуем выражение $(1 \otimes \rho(e_i)) \circ \delta(f_j)$. Пусть $f_j = \theta(v, v^*)$. Тогда, согласно формуле (9),

$$\begin{aligned}(1 \otimes \rho(e_i)) \circ \delta(f_j) &= (1 \otimes \rho(e_i)) \sum_{i=1}^{k} \theta(v_i, v^*) \otimes \theta(v, v_i^*) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \theta(v_i, v^*) \otimes \theta(e_i \times v, v_i^*) = \delta(\rho(e_i) \times f_j).\end{aligned}$$

Подставим получившееся:

$$\det(((\lambda^{-1} \otimes \lambda) \circ \delta)(\rho(e_i) f_j)) = \det(\varepsilon^*(\rho(e_i) \times f_j)) \neq 0.$$

Что и требовалось.

Замечание. Как было замечено выше, структура алгебры Хопфа на $R(\mathfrak{L})$ задает на $k - \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{L}))$ структуру группы, причем эта группа действует на $R(\mathfrak{L})$ (для $\lambda \in k - \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{L}))$ это действие задается как $(\lambda \otimes 1) \circ \delta$). По сути, во второй части доказательства мы такими сдвигами переносим полученное распределение из единицы группы (то есть ε^*) в любую другую точку.

2. Рассмотрим $f \in R(\mathfrak{L})$. Достаточно показать, что для каждого i существует $q_i(x_i)$, что $q_i(x_i)B^{-1}(f)$ есть многочлен от x_i. Пусть F — конечномерный подмодуль $R(\mathfrak{L})$, содержащий f. Тогда оператор $e_i\times$ имеет на нем характеристический многочлен $a_m t^m + \cdots + a_0$, где $a_m \neq 0$. А это значит, что $\langle f; u_1(a_m e_i^m + \cdots + a_0)u_2\rangle = 0$ для любых $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{L})$. Положим $q_i(x_i) = a_0 x_i^m + \cdots + a_m$. Тогда

$$q_i(x_i)B^{-1}(f) = q_i(x_i) \sum_{k_1,\ldots,k_n} \langle f; e_1^{k_1} \ldots e_n^{k_n}\rangle x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Теперь сгруппируем слагаемые при одних и тех же мономах. Те мономы, куда x_i входит в степени не меньшей m сократятся, так как коэффициент при них будет иметь вид $\langle f; e_1^{k_1} \cdots e_{i-1}^{k_{i-1}}(a_m e_i^m + \cdots + a_0) \cdots e_n^{k_n}\rangle = 0$. Что и требовалось.

Если теперь основное поле имеет характеристику 0 и алгебраически замкнуто, то $q_1(x_1) \cdots q_n(x_n)$ раскладывается на линейные множители, а соответствующая рациональная функция — на простейшие дроби. Тогда утверждение о попадании $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ в квазиполиномы следует из того, что преобразование Бореля переводит многочлены в многочлены, и из соотношения $\varphi \circ B\left(\frac{1}{(1-x)^k}\right) = e^x r(x)$, где $r(x)$ — многочлен степени $k-1$.

Замечание. Заметим, что корни многочленов $q_i(x_i)$ (а значит, и показатели экспонент) отнюдь не всегда могут принимать произвольные значения. Они все являются собственными числами оператора, соответствующего e_i. Эти значения, в свою очередь, в полупростой алгебре Ли определяются весами представлений. Отсюда, в частности, следует конечнопорожденность $R(\mathfrak{L})$ в случае полупростой алгебры $\mathfrak{L}$.

Утверждение о том, что $\varphi(\overline{l_i})$ рационально выражаются через квазиполиномы, следует из того, что $\mathfrak{L}$ задает на $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{L}))$ n -мерное распределение. Действительно, это означает, что найдутся такие ряды $f_1, \ldots, f_n$ из $\varphi(R(\mathfrak{L}))$, что $\det|e_i \times f_j|$ имеет ненулевой свободный член (так как свободный член и есть значение функционала ε^*), а значит обратим в кольце степенных рядов. Но тогда обратим в кольце степенных рядов (и является квазиполиномом) определитель матрицы $(\delta_{x_j} f_i)_{i,j}$, так как матрица $(e_i \times f_j)$ есть произведение этой матрицы на матрицу из коэффициентов $\overline{(e_i)}_j$. Для любого $l \in \mathfrak{L}$ ряды $\overline{l}_i$ находятся из решения системы линейных уравнений с матрицей $(\delta_{x_j} f_i)$ и правой частью $l \times f_i$. Все коэффициенты и правая часть — квазимногочлены, определитель обратим в кольце степенных рядов, а значит $\overline{l}_i$ действительно выражаются через квазимногочлены рационально.

3. Доказательство будет основано на следующей лемме:

Лемма 5.2.2. *Пусть в* $\mathfrak{L}$ *выбран базис так, что его элементы действуют в подпредставлении* $V \subset R(\mathfrak{L})$ *нильпотентно. Тогда в этом базисе* $\varphi(V)$ *лежит в подалгебре многочленов.*

Доказательство. Пусть N таково, что при ограничении на V оператор e_i^N действует нулем при всех i. Тогда, очевидно, коэффициент при $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ обращается и нуль, если хотя бы одно m_i больше N. □

Если же в $\mathfrak{L}$ можно выбрать базис как в формулировке теоремы, то по лемме 5.2.2 $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ лежит в многочленах. Теперь то, что $\overline{l_i}$ — рациональные функции, получается дословным повторением рассуждения из предыдущего пункта.

Замечание. В силу замечания 5.2, в $\mathfrak{L}$ можно выбрать базис, элементы которого будут нильпотентны в представлении $\theta(V \otimes V^*)$. Тогда f_i будут многочленами, а значит результат этого пункта можно было бы обобщить на алгебры Ли с нильпотентным радикалом.

□

5.3 Гейзенберговы оболочки в симметризованном базисе

В этом разделе мы продолжаем изучение алгебры $R(\mathfrak{L})$. Однако будем рассматривать её поведение при других изоморфизмах $U^*(\mathfrak{L})$ с алгеброй формальных степенных рядов. Основная теорема этого раздела была сформулирована в докладе [39]. Все доказательства приведены в статье [45].

Пусть снова $\mathfrak{L}$ — конечномерная алгебра Ли над полем нулевой характеристики с базисом $e_1, \dots, e_n$. Тогда обозначим через $\overline{E}$ симметрический базис в $U^*(\mathfrak{L})$, состоящий из элементов

$$\overline{e_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{m_n}} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{m!} \operatorname{Sym}_m(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{m_n}).$$

Здесь $m = m_1 + \ldots + m_n$ и $\operatorname{Sym}_m(y_1, \dots, y_m) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{\sigma \in S_m} y_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma(m)}$ — симметрический полилинейный полином от некоммутирующих переменных $y_1, \dots, y_m$. Пусть $\mathrm{ad}\colon U(\mathfrak{L}) \to \operatorname{End}_K \mathfrak{L}$ — присоединенное представление универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{L})$ в $\mathfrak{L}$. Кроме того, рассмотрим функцию $M(z) = \frac{z}{1-e^{-z}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \dots$ и обозначим через $\mu(k)$ коэффициент при

z^k в ее разложении в ряд Тейлора в точке $z = 0$. Также введем в рассмотрение симметричное преобразование Бореля $B_{sym}\colon \widetilde{\mathcal{E}_n} \to \widetilde{\mathcal{E}_n}$, определяемое формулой $B_{sym}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f_m$, где f_m — однородная компонента f степени m.

Теорема 5.3.1. *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$. *Для любого* $l \in \mathfrak{L}$ *определим* n *степенных рядов* $\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_n} \in \widetilde{\mathcal{E}_n}$, *полагая*

$$\overline{l_i}(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} \mu(m) \langle e_i^*, m! \operatorname{ad}(\overline{e_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{m_n}}) \times l \rangle \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}, \tag{12}$$

где $m = m_1 + \ldots + m_n$. *Тогда*

1. *отображение* $\rho\colon \mathfrak{L} \to \operatorname{Der} \widetilde{\mathcal{E}_n}$, *при котором* $\rho(l) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{l_1} \partial_{x_1} + \ldots + \overline{l_n} \partial_{x_n}$, *является точным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{L}$ *и ассоциативной алгебры* $U(\mathfrak{L})$. *Кроме того,* $\mathfrak{L}$*-модуль, определяемый этим представлением, инъективен;*

2. *отображение* $\varphi\colon U^*(\mathfrak{L}) \to \widetilde{\mathcal{E}_n}$, *для которого при* $f \in U^*(\mathfrak{L})$
$$\varphi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} \langle f, \overline{e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n}} \rangle \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}, \tag{13}$$
задает изоморфизм ассоциативной алгебры $*\colon U^*(\mathfrak{L}) \otimes U^*(\mathfrak{L}) \to U^*(\mathfrak{L})$ *с* $\widetilde{\mathcal{E}_n}$ *и* $\mathfrak{L}$*-модуля* $\widetilde{\mathcal{E}_n}$ *с* $U^*(\mathfrak{L})$;

3. *композиция отображений* $B_{sym}^{-1} \circ \varphi\colon U^*(\mathfrak{L}) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\mathcal{E}_n} \xrightarrow{B_{sym}^{-1}} \widetilde{\mathcal{E}_n}$ *переводит* $R(\mathfrak{L})$ *в подпространство алгебры рациональных функций. Более того, для любого конечномерного* $\mathfrak{L}$*-модуля* $M \subset R(\mathfrak{L})$ *знаменатель можно выбрать общим для всех элементов образа и степени, не превосходящей* $\dim M$.

Доказательство. Начнем с того, что проверим изоморфизм ассоциативных алгебр. Для этого перепишем (13) в несколько иной форме. Рассмотрим алгебру Ли степенных рядов $\overline{\mathfrak{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{L} \otimes_k \widetilde{\mathcal{E}_n}$ от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами в $\mathfrak{L}$, причем x_i коммутируют с элементами $\mathfrak{L}$. Аналогично обозначим $\overline{U(\mathfrak{L})} \stackrel{\text{def}}{=} U_{\text{id}} \otimes_k \widetilde{\mathcal{E}_n}$. Тогда $f\colon U_{\text{id}} \to k$ поднимается до $\overline{f}\colon \overline{U(\mathfrak{L})} \to \widetilde{\mathcal{E}_n}$ по формуле

$$\overline{f}\left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} u_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=0}^{\infty} f(u_{m_1,\ldots,m_n}) x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$$

Тогда правую часть (13) можно переписать в виде $\langle \overline{f}, \exp(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \rangle$. Заметим также, что оператор Δ поднимается с $\mathfrak{L}$ на $\overline{\mathfrak{L}}$ и с $U(\mathfrak{L})$ на $\overline{U(\mathfrak{L})}$ как коумножение. Обозначим $h \stackrel{\text{def}}{=} x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in \overline{\mathfrak{L}}$. Теперь проверим, что (13) действительно задает изоморфизм ассоциативных алгебр:

$$\varphi(f_1 f_2) = \langle \overline{f_1 f_2}, e^h \rangle = \langle \overline{f_1} \otimes \overline{f_2}, e^{1 \otimes h + h \otimes 1} \rangle = \\ \langle \overline{f_1} \otimes \overline{f_2}, e^h \otimes e^h \rangle = \langle \overline{f_1}, e^h \rangle \langle \overline{f_2}, e^h \rangle = \varphi(f_1)\varphi(f_2) \quad (14)$$

Сюръективность и инъективность этого отображения очевидны.

Благодаря отображению φ на $\widetilde{\mathcal{E}_n}$ появилась структура $\mathfrak{L}$-модуля. Необходимо проверить, что она задается формулой для ρ. Для этого достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\langle \widehat{e}_i^*, e^h l \rangle = \langle \widehat{e}_i^*, \frac{\operatorname{ad} h}{1 - e^{-\operatorname{ad} h}} l \rangle.$$

Действительно, в новых обозначениях ($\overline{\mathfrak{L}}$, $\overline{U(\mathfrak{L})}$) правая часть формулы (12) переписывается в виде $\langle \widehat{e}_i^*, \frac{\operatorname{ad} h}{1 - e^{-\operatorname{ad} h}} l \rangle$. Введем в рассмотрение еще одну формальную переменную t, которая коммутирует со всеми элементами алгебры, и относительно умножения на которую $\widehat{f}$ линейно. Тогда нас интересует коэффициент при t в $\langle \widehat{e}_i^*, e^h e^{lt} \rangle$. Он равен $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(e^h e^{lt})|_{t=0}$. По теореме [31, стр. 120] эта производная как раз равна $M(\operatorname{ad} h)l$, что и требовалось установить.

Для доказательства третьего пункта теоремы рассмотрим конечномерный $\mathfrak{L}$-подмодуль M ($\dim M = m$) в $U^*(\mathfrak{L})$ с базисом $f_1, \ldots, f_m$ над k. На $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_m)$ в $\widetilde{\mathcal{E}_n}$ натянем $\mathcal{E}_n$-модуль $\tilde{M}$. Очевидно, $\operatorname{rank}_{\mathcal{E}_n} \tilde{M} \leqslant m$ и $h \times \tilde{M} \subset \tilde{M}$. По теореме Гамильтона—Кэли существуют такие многочлены $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{E}_n$, что $(h^m + p_1 h^{m-1} + \ldots + p_m) \times \tilde{M} = 0$. Заметим, что здесь можно считать многочлен p_i однородным степени i в силу наличия градуировки на $U(\mathfrak{L}) \otimes \widetilde{\mathcal{E}_n}$. В частности, имеем $\langle f, (h^m + p_1 h^{m-1} + \ldots + p_m) h^k \rangle = 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $f \in M$. Теперь рассмотрим (полагая, что $p_0 = 1$)

$$(1 + p_1 + \ldots + p_m)(B_{sym}^{-1} \circ \varphi)(f) = \langle \widehat{f}, \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} p_k h^{s-k} \rangle$$

Все слагаемые с $s \geqslant m$ дадут нуль, а остальных конечное количество. Значит, для любого $f \in M$ имеем $((1 + p_1 + \ldots + p_m)(B_{sym}^{-1} \circ \varphi) f) \in \mathcal{E}_n$, причем легко видеть (из однородности p_i), что $\deg(1 + \ldots + p_m) \leqslant m$ и этот многочлен не равен нулю.

$\square$

Замечание. Отображение $B_{sym}^{-1} \circ \varphi$, будучи инъективным, отнюдь не обязательно сюръективно.

Приведем соответствующий пример. Рассмотрим трехмерную нильпотентную алгебру Ли с образующими X, Y, Z, где Z принадлежит центру, и соотношением $[X, Y] = Z$. Тогда $\rho(Z) = \frac{\partial}{\partial z}, \rho(Y) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \rho(X) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}$. Легко понять, что модуль, порожденный e^z, бесконечномерен над k, хотя $B^{-1}(e^z) = \frac{1}{1-z}$.

Замечание. В случае, когда $\mathfrak{L}$ нильпотентна, из формулы (12) следует, что все $\overline{l_i}$ будут многочленами.

5.4 Восстанавливающий полином на W_2

В предыдущих двух разделах мы изучали алгебру Хохшильда — конструкцию, с помощью которой можно по данной алгебре Ли построить группу Ли, касательная алгебра Ли к которой содержит данную. Здесь мы будем обсуждать более общую задачу. Пусть у нас есть аффинное алгебраическое многообразие и на нём задано инволютивное распределение (то есть подалгебра в алгебре Ли векторных полей на нём). Необходимо по этой алгебре Ли восстановить исходное многообразие.

Общий подход к решению этой задачи при помощи восстанавливающих полиномов изложен в [36, §42]. В этом разделе мы построим конкретный восстанавливающий полином для двумерных инволютивных распределений. Результаты этого раздела изложены в статье [46].

Обозначим через W_n алгебру Ли всех дифференцирований алгебры многочленов $\mathcal{E}_n = k[x_1, \ldots, x_n]$.

Для любых дифференцрований $D_i = p_i^1 \frac{\partial}{\partial x} + p_i^2 \frac{\partial}{\partial y}$ $(i = 1, \ldots, 12)$ обозначим через M_2 матрицу, i-ая строка которой имеет вид

$$(p_i^1, p_i^2, (p_i^1)_x, (p_i^1)_y, (p_i^2)_x, (p_i^2)_y, (p_i^1)_{xx}, (p_i^1)_{xy}, (p_i^1)_{yy}, (p_i^2)_{xx}, (p_i^2)_{xy}, (p_i^2)_{yy}).$$

Кроме того, положим

$$W^{(2)}(x_1, \ldots, x_{12}, y_1, \ldots, y_4) = \sum_{\sigma \in S_{12}} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(8)} y_1 x_{\sigma(9)} \cdots y_4 x_{\sigma(12)}$$

и пусть $\widetilde{D}_i = q_i^1 \frac{\partial}{\partial x} + q_i^2 \frac{\partial}{\partial y}$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Теорема 5.4.1. *Для ассоциативного полилинейного полинома $W^{(2)}$ выполнено соотношение*

$$(1-\tau_{y_1y_2})(1-\tau_{y_3y_4})W^{(2)}|_{x_i=\operatorname{ad} D_i,\, y_j=\operatorname{ad}\widetilde{D}_j} = (-120)\begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} q_3^1 & q_3^2 \\ q_4^1 & q_4^2 \end{vmatrix}\det M_2, \quad (15)$$

где $\tau_{y_iy_j}$ — элемент групповой алгебры $\mathbb{Z}[S_4]$, переставляющий y_i и y_j.

Отметим, что построенные полином по структуре схож с полиномом Регева-Формайнека [4].

Доказательство. Покажем для начала, что

$$\begin{aligned} &W^{(2)}(\operatorname{ad} D_1,\dots,\operatorname{ad} D_{12},\operatorname{ad}\widetilde{D}_1,\dots,\operatorname{ad}\widetilde{D}_4)(f\frac{\partial}{\partial x}) = \\ &\quad= f\det M_2\cdot\sum_{\sigma\in S_4}\left(a_\sigma q^1_{\sigma(1)}q^1_{\sigma(2)}q^2_{\sigma(3)}q^2_{\sigma(4)}\frac{\partial}{\partial x}+b_\sigma q^1_{\sigma(1)}q^2_{\sigma(2)}q^2_{\sigma(3)}q^2_{\sigma(4)}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (16)\end{aligned}$$

где a_σ и b_σ — некоторые числовые коэффициенты (определенные, вообще говоря, неоднозначно).

Для этого раскроем лиевы скобки в левой части (15). Получим сумму выражений вида $\left(c\left(\prod\limits_{i=1}^{12}\mathcal{D}_{\alpha_i}p_i^{j_i}\right)\mathcal{D}_{\beta_1}q_1^{k_1}\cdots\mathcal{D}_{\beta_4}q_4^{k_4}\mathcal{D}_\gamma f\right)\partial$, где α_i, β_i и γ — мультииндексы, ∂ равно либо $\frac{\partial}{\partial x}$, либо $\frac{\partial}{\partial y}$, а $\mathcal{D}_\alpha f$ означает $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}f$ — смешанную производную порядка α. Если среди наборов (α_i, j_i) есть совпадающие , то, в силу кососимметрии $W^{(2)}$, коэффициент при этом слагаемом равен 0. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{12}|\alpha_i|\leqslant 16$ ($|\alpha_i|$ — сумма компонент мультииндекса) и каждый мультииндекс можно взять не более двух раз (с различными j_i). Тогда наименьшая $\sum\limits_{i=1}^{12}|\alpha_i|$, которую мы можем достичь, получается при взятии по два раза $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Получится как раз $\sum\limits_{i=1}^{12}|\alpha_i| = 16$. Так как, кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{12}|\alpha_i|+|\beta_1|+\ldots+|\beta_4|+|\gamma| = 16$, то $\beta_i=(0,0)$ и $\gamma=(0,0)$. Для того, чтобы определить ∂, достаточно посчитать количество дифференцирований обоих видов: $\sum\limits_{i=1}^{12}\alpha_i+\beta_1+\ldots+\beta_4+\gamma=(8,8)$. С другой стороны, $p_i^{j_i}$ дают суммарный вклад $(6,6)$, $f\frac{\partial}{\partial x}$ дает $(1,0)$. Значит, при $\partial=\frac{\partial}{\partial x}$ среди $k_1,\dots,k_4$ должно быть две единицы и две двойки, а при $\partial=\frac{\partial}{\partial y}$ должно быть 3 двойки и одна единица. В дальнейшем нам будет полезно следующее:

Наблюдение. *Рассмотрим полином $f(p_1,\dots,p_4)$ с коэффициентами в $\mathcal{E}_2$ такой, что для любых $p_1,\dots,p_4 \in \mathcal{E}_2$:*

(i) $f(p_1,p_2,p_3,p_4) = -f(p_3,p_4,p_1,p_2)$;

(ii) $\forall q \in \mathcal{E}_2$ *выполнено* $f(qp_1,qp_2,p_3,p_4) = qf(p_1,p_2,p_3,p_4)$;

(iii) $f(p_1+q_1,p_2+q_2,p_3,p_4) = f(p_1,p_2,p_3,p_4) + f(q_1,q_2,p_3,p_4)$.

Тогда $f(p_1,\dots,p_4) = r\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{vmatrix}$, *где* $r \in \mathcal{E}_2$.

Действительно, перейдем в поле частных $\mathcal{E}_2$. Тогда наблюдение следует из определения детерминанта, то есть $f(p_1,p_2,p_3,p_4) = r\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{vmatrix}$, где $r \in k(x,y)$. Подставив $p_1 = p_4 = 1$ и $p_2 = p_3 = 0$, получаем $r \in k[x,y] = \mathcal{E}_2$.

Теперь заметим, что все b_σ в (16) при симметризации по последним четырем переменным $W^{(2)}$ сократятся, так как в одну группу кососимметричных q попадут две с верхним индексом 2. Таким образом, значения полученного полинома на $\otimes^{16} \operatorname{ad} W_2$ действуют на W_2 умножением на многочлен (случай $f\frac{\partial}{\partial y}$ разбирается аналогично), равный $p(q_1^1,\dots,q_4^1,q_1^2,\dots,q_4^2)\det M_2$. В силу (16), p удовлетворяет условиям наблюдения по q_1^1,q_1^2,q_2^1,q_2^2 и по q_3^1,q_3^2,q_4^1,q_4^2. Тогда получается, что этот многочлен равен $c\begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} q_3^1 & q_3^2 \\ q_4^1 & q_4^2 \end{vmatrix}\det M_2$, где c — числовая константа. С помощью компьютерных вычислений получаем $c = -120$. □

Заметим, что слева в формуле (15) стоит симметризация последних четырех переменных по столбцам таблицы Юнга $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$. Другие симметризации полинома $W^{(2)}$ по переменным $y_1,\dots,y_4$ на $\otimes^{16} \operatorname{ad} W_2$ принимают значения, вообще говоря, в $\operatorname{End}_{\mathcal{E}_2} W_2$. Об этом пойдет речь в теореме 5.4.2 (см. для сравнения результат А. А. Кагарманова для значений стандартного полинома степени 8 на W_2 ([29])).

Теорема 5.4.2. *1.* $(1-\tau_{y_1y_2})(1+\tau_{y_3y_4})W^{(2)}|_{x_i=\operatorname{ad} D_i, y_j=\operatorname{ad}\widetilde{D}_j}$ *задает* $\mathcal{E}_2$ -

линейное отображение, имеющее в базисе $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ *вид* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$, *где*

$$\begin{aligned} a &= 40 \begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix} (q_3^2 q_4^1 + q_3^1 q_4^2) \det M_2; \\ b &= 80 q_3^2 q_4^2 \begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix} \det M_2; \\ c &= -80 q_3^1 q_4^1 \begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix} \det M_2. \end{aligned}$$

2. $\left(\sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sign}(\sigma) \tau_\sigma \right) W^{(2)}|_{x_i = \operatorname{ad} D_i,\, y_j = \operatorname{ad} \widetilde{D}_j} = 0$, *где* τ_σ *— элемент групповой алгебры* $\mathbb{Z}[S_4]$, *действующий перестановкой* σ *на* $y_1, \ldots, y_4$.

3. $\left(\sum_{\sigma \in S_4} \tau_\sigma \right) W^{(2)}|_{x_i = \operatorname{ad} D_i,\, y_j = \operatorname{ad} \widetilde{D}_j} = 0$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 5.4.1.

Заключение

В этом последнем разделе мы вкратце опишем возможные обобщения основных результатов диссертации и пути дальнейшего исследования.

В главе 3 был весьма обстоятельно изучен дифференциальный идеал $[x^m]$. Для этих идеалов была установлена первичность фактора свободной алгебры по ним (теорема 3.1.1), критерий принадлежности степени производной идеалу (теорема 3.1.2) и ряд других свойств. Кроме того, развитая в этих доказательствах техника была обобщена на идеал $\left[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2\right]$. Интересными задачами для дальнейшего исследования являются следующие

- Получить критерий принадлежности произвольного монома идеалу. Отметим, что результаты главы 3 позволяют построить достаточно эффективный алгоритм для проверки этой принадлежности. Однако, критерий в виде формулы от порядков входящих в моном производных представлял бы большой интерес.

- Расширить класс идеалов, для которых применима техника, развитая в главе 3.

- Обобщить полученные результаты на случай алгебр с несколькими коммутирующими дифференцированиями.

В главе 4 была доказана усиленная версия теоремы Колчина о примитивном элементе для дифференциальных полей (теорема 4.1.3). Более точно, было доказано, что в конечнопорожденном дифференциально алгебраическом расширении дифференциальных полей $F \subset E$ таком, что F содержит неконстанту, найдется элемент $a \in E$, для которого $E = F\langle a \rangle$. Интересными задачами для дальнейшего исследования являются:

- Обобщить полученный результат на поля с m коммутирующими дифференцированиями. Условие наличия неконстанты в E, следуя Колчину ([12]), нужно заменить на наличие в F набора из m элементов с ненулевым якобианом.

- Предложить алгоритмы для нахождения примитивного элемента, изучить их сложность.

В главе 5 были построены некоторые вложения конечномерных алгебр Ли в алгебры специальных дифференцирований алгебр формальных степенных рядов от нескольких переменных такие, что коэффициенты полученных дифференцирований оказались рациональными функциями от квазимногочленов (теорема 5.2.1 и теорема 5.3.1). Кроме того, построен в явном виде полилинейный ассоциативный полином, который по гладкому двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстанавливает алгебру функций на многообразии (теорема 5.4.1). Интересными задачами для дальнейшего исследования являются:

- Найти базисы в универсальной обертывающей алгебре конечномерной алгебры Ли, отличные от симметрического базиса и базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта, для которых имели бы место аналоги теорем 5.2.1 и 5.3.1. Описать все такие базисы.

- Построить, по аналогии с теоремой 5.4.1, восстанавливающие полиномы для инволютивных распределений большей размерности.

- Построить восстанавливающий полином для двумерных инволютивных распределений меньшей степени или доказать отсутствие оного.

Список литературы

[1] Babakhanian A., *On primitive elements in differentially algebraic extension fields*, Trans. AMS, vol. 143, 71-83, 1968.

[2] Chebotar M.A., Lee P., *Prime lie rings of derivations of commutative rings* , Communications in Algebra, vol. 34, p. 4339-4344, 2006.

[3] Ferrero M., Kishimoto K., Motose K., *On radicals of skew polynomial rings of derivation type,* Journal of London Math. Society, vol. 28, 8-17, 1983.

[4] Formanek E., *A conjecture of Regev about the Capelli polynomial*, J.Algebra, №109, pp. 93 - 114, 1987.

[5] Giles W., *On the algebra of representative functions of a Lie algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., 109, 101-120, 1963.

[6] Hochschild G, Mostow G. D., *Representations and representative functions of Lie groups*, Ann. of Math. (2), vol. 66, 495-542, 1957.

[7] Hochschild G., *Algebraic Lie algebras and representative functions*, Illinois J. Math. Volume 3, Issue 4, 499-523, 1959.

[8] Hochschild G., *Algebraic groups and Hopf algebras*, Illinois J. Math. Volume 14, Issue 1, 52-65, 1970.

[9] Johnson J., *Differential Dimension Polynomials and a Fundamental Theorem on Differential Modules*, American Journal of Mathematics, Vol. 91, No. 1 (Jan., 1969), pp. 239-248.

[10] Kirillov A.A., Ovsienko V.Yu., Udalova O.D., *Identities in the Lie algebra of vector fields on the real line*, Selecta Mathematica Sovietica, vol. 10, №1, pp. 7-17, 1991.

[11] Krattenthaler C., *Advanced determinant calculus,* The Andrews Festschrift, 349-426, 2001.

[12] Kolchin E.R., *Extensions of differential fields, I*, Annals of Mathematics, vol. 43, 1942.

[13] Kolchin E.R., *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, 1973.

[14] Levi H., *On the structure of differential polynomials and their theory of ideals,* Trans. AMS, vol.51, 532-568, 1942.

[15] Lui C., Passman D., *Prime Lie rings of derivations of commutative rings in characteristic* 2 , Journal of Algebra, vol. 311, issue 1, p. 352-364, 2007.

[16] Magid A. R., *Lectures on differential Galois theory*, University lecture series of AMS, vol. 7, 1994.

[17] Miller R., Ovchinnikov A., Trushin D., *Computing constrained sets for differential fields*, Journal of Algebra, vol. 407, 316-357, 2014.

[18] Montgomery S., *Hopf algebras and their acions on rings*, CBMS, number 82.

[19] O'Keefe K.B., *A property of the differential ideal* $[y^p]$*,* Trans. AMS, vol. 94, 483-497, 1960.

[20] Poinsot L., *Wronskian envelope of a Lie algebra*, Algebra, vol. 2013, Article ID 341631, 2013.

[21] Ritt J.F., *Differential Algebra,* volume XXXIII of Colloquium Publications. New York, American Mathematical Society, 1950.

[22] Seidenberg A., *Some basic theorems in differential algebra (characteristic p, arbitrary)*, Trans. AMS, vol. 73, 174-190, 1952.

[23] Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М., *Радикалы алгебр и структурная теория,* М:Наука, 1979.

[24] Джекобсон Н., *Алгебры Ли*, М: Мир, 1964.

[25] Диксимье Ж., *Универсальные обертывающие алгебры*, М: Мир, 1978.

[26] Зобнин А.И., *Допустимые упорядочения и стандартные базисы дифференциальных идеалов.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 2007.

[27] Зобнин А.И., *Дифференциальные стандартные базисы при обратных лексикографических упорядочениях,* Фундаментальная и прикладная математика, т. 14, вып. 4, 121-135, 2008.

[28] Зубрилин К.А., О тождествах алгебра Ли W_1, Вест. МГУ. Сер. 1. Мат., мех., 1993, №3, с. 74-77.

[29] Кагарманов А. А., *Стандартный лиев полином степени 8 на алгебре* W_2, Вестник МГУ, Сер. мат.-мех..-№6, 1990.

[30] Капланский И., *Введение в дифференциальную алгебру,* 1957.

[31] Кириллов А. А., *Элементы теории представлений*, М.: Наука, 1972.

[32] Кириллов А.А., Овсиенко В.Ю., Удалова О.Д., *Тождества алегбры Ли векторных полей на прямой*, Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, №135, 1984.

[33] Панкратьев Е. В., Размыслов Ю. П., *Гейзенберговы оболочки вейлеуоттоновских подалгебр*, Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию Московского ун-та. -М.: Изд-во мех.-мат ф-та МГУ, 2004.

[34] Размыслов Ю. П., *Центральные полиномы в неприводимых представлениях полупростой алгебры Ли*, Мат. сб.-Т. 12(164), №1(9).-С. 97-125, 1983.

[35] Размыслов Ю.П., *Простые алгебры Ли, удовлетворяющие стандартному лиеву тождеству степени 5*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **49**:3, стр. 592-634, 1985.

[36] Размыслов Ю.П., *Тождества алгебр и их представлений* , Наука, 1989.

[37] Размыслов Ю.П., *О конечно порожденных простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени* 5, Вестн. Моск. Ун-та., Серия 1, Матем., Механика, №3, 37-41, 1990.

[38] Размыслов Ю. П., *Введение в теорию алгебр и их представлений*, Издательство Московского Ун-та, 1991.

[39] Размыслов Ю. П., *Парадигма макс-фактора*, Тез. докл. Междунар. алгебр. конф., посвященной 250-летию Московского ун-та. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, стр. 131—134, 2004.

[40] Хамфри Дж., *Линейные алгебраические группы*, М: Наука, 1980.

[41] Шмидт В., *Диофантовы приближения*, М.: Мир, 1983.

Публикации автора по теме диссертации

[42] Pogudin G.A., *The primitive element theorem for differential fields with zero derivation on the base field*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol 219(9), pp. 4035-4041, 2015.

[43] Погудин Г.А., *Первичные дифференциальные ниль-алгебры существуют*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика., 2014., №1. С. 50-53.

[44] Размыслов Ю.П., Погудин Г.А., *Гейзенберговы оболочки алгебр Хохшильда конечномерных алгебр Ли*, Фундамент. и прикл. матем., 17:5 (2012), 147–155.

[45] Размыслов Ю.П., Погудин Г.А., *Парадигма макс-фактора и конечномерные представления алгебр Ли*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика., 2012., №4. С. 48-50.

[46] Погудин Г.А., *Вронскиан дифференцирований*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика., 2011., №1. С. 63-65.