Algorithmes arithmétiques pour la cryptologie — 13 février 2018, Paris

Un algorithme quasi-polynomial

Razvan Barbulescu
CNRS et IMJ-PRG

Corps finis

Definition

Étant donné un nombre premier p et un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_p$, le corps défini par φ est l'ensemble $\mathbb{F}_p[x]/\langle\varphi\rangle$, muni des opérations

- addition: on ajoute les éléments comme les polynômes;
- multiplication: on multiplie les éléments comme polynômes et on réduit modulo φ;
- inversion: algorithme d'Euclide étendu (EEA).

On appelle p la caractéristique du corps et φ son polynôme de définition.

Example

$\varphi = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ est irréductible car il n'a pas de racines, donc il définit un corps de 4 éléments: $0, 1, x, x+1$. Pour calculer l'inverse d'un élément, disons $a = x$, on applique EEA aux polynômes a et $b = \varphi$:

$$1 = 1 \cdot (x^2 + x + 1) + (x + 1) \cdot x$$

. Le gcd est toujours 1 car φ est irréductible. Ici $x^{-1} = x + 1$.

Le calcul des isomorphismes de corps

Propriétés

- Si φ_1 et φ_2 sont deux polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_p[x]$ de même degré, alors on a l'isomorphisme de corps:

$$\mathbb{F}_p[x]/\langle\varphi_1\rangle \simeq \mathbb{F}_p[x]/\langle\varphi_2\rangle.$$

  Temps polynomial, changement de coordonnées.
- Pour toute paire (p, n), il existe $(1 + o(1))p^n/n$ polynômes irréductibles de degré n dans $\mathbb{F}_p[x]$.

$\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathrm{GF}(p^n)$ désigne "un corps de p^n éléments"

Example

Les polynômes $\varphi_1 = x^3 + x + 1$ et $\varphi_2 = x^3 + x^2 + 1$ sont irréductibles modulo 2 (degré ≤ 3 et pas de racines). On calcule a, b, c tels que

$$\varphi_1(a + bx + cx^2) \equiv 0 \mod \varphi_2.$$

Alors, on envoie tout élément $P(x)$ du corps défini par φ_1 dans le corps défini par φ_2 comme suit

$$P(x) \mapsto P(a + bx + cx^2).$$

Ici $(a, b, c) = (1, 1, 0)$, et par exemple $x^2 + x + 1 \mapsto (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) + 1 = x^2$.

Logs discrets dans les corps finis

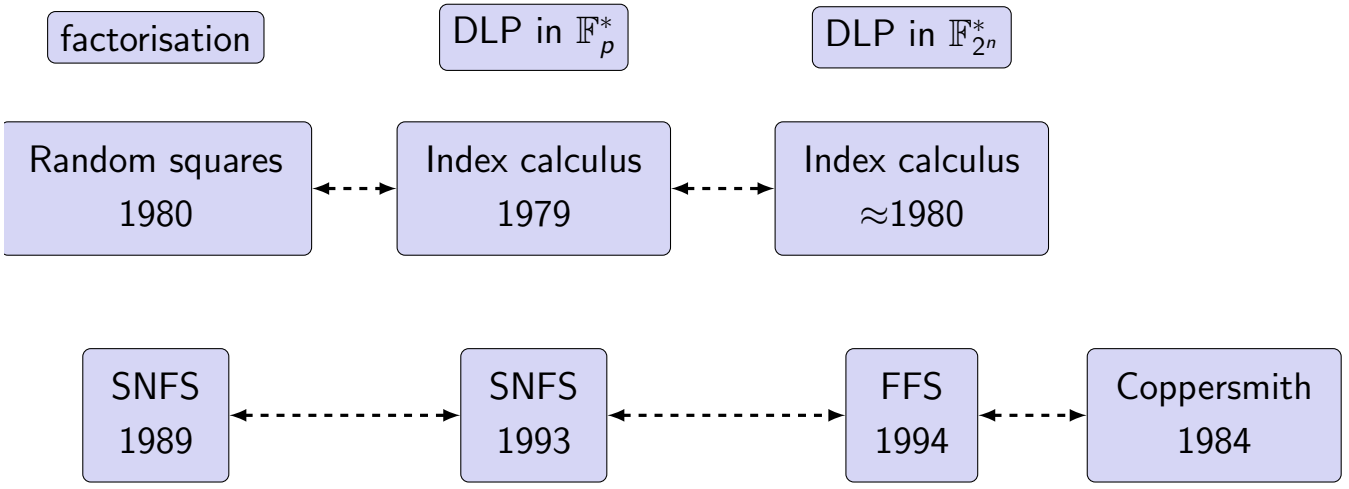
Le groupe multiplicatif

- le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_{p^n})^*$ est cyclique
- d'ordre $p^n - 1$, qui peut être premier, e.g. $2^{607} - 1$.
- Une proportion de $\varphi(p^n - 1)/(p^n - 1)$ des éléments sont des générateurs, étant faciles à trouver (φ=indicatrice d'Euler).
- Pour tout $a \in (\mathbb{F}_{p^n})^*$, $a^{p^n-1} = 1$.

Avantages des corps de petite caractéristique

- on peut sélectionner un polynôme de définition creux, e.g. $x^n + x + 1$ quand celui-ci est irréductible, afin d'accélérer la multiplication;
- algorithmes très similaires, mais plus simples pour les polynômes (FFT) que pour les entiers (Schönehage-Strassen);
- l'arithmétique de $\mathbb{F}_{2^n}$ est implantée dans plusieurs bibliothèques de C: NTL et gf2x;
- les processeurs Intel offrent des instructions spécifiques aux polynômes sur $\mathbb{F}_2$;
- dans le cas du matériel dédié à la crypto, par ex à l'aide de FPGA, il est plus facile d'implanter la multiplication dans $\mathbb{F}_{2^n}$ et $\mathbb{F}_{3^n}$ que dans $\mathbb{F}_p$.

Histoire



Chronologie

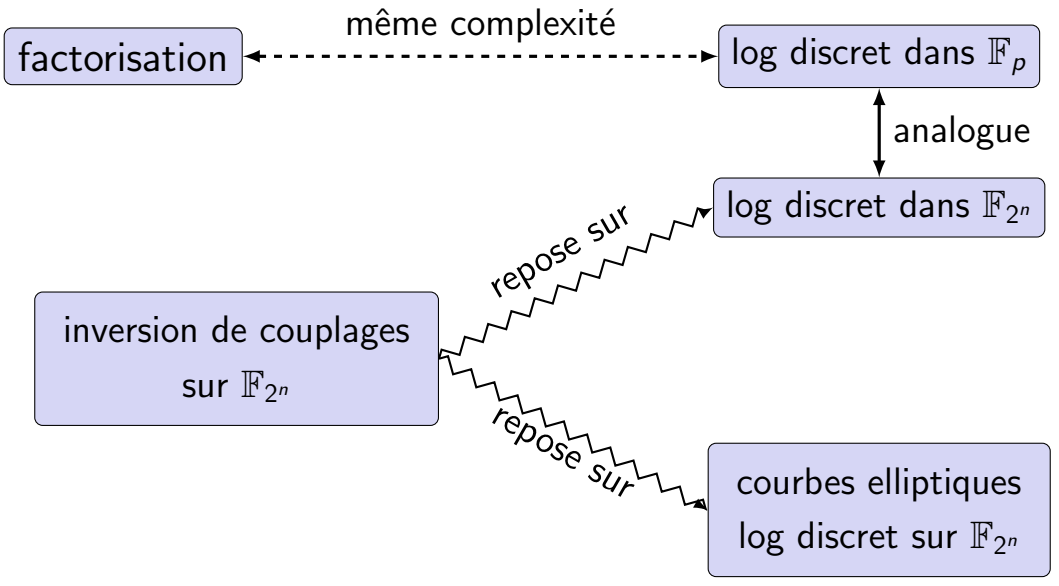
- En 1984, l'algorithme de Coppersmith a été le premier de complexité $L(1/3)$.
- En 1989 et 1993, le crible algébrique spécial(SNFS) puis crible algébrique(NFS) ont eu aussi une complexité de type $L(1/3)$.
- En 1993 et 1994 NFS a été adapté au log discret dans $\mathbb{F}_p$ et, par analogie, à $\mathbb{F}_{2^n}$ sous le nom de crible des corps de fonctions(FFS).
- En 1999, on a trouvé comment obtenir l'algorithme de Coppersmith comme cas particulier de FFS.

Renaissance due aux couplages

Utilisation des corps de petite caractéristique

- Depuis 1984, le log discret dans la petite caractéristique paraissait beaucoup plus faible qu'en grande caractéristique et que la factorisation, donc elle a été abandonné.
- En 2000 Antoine Joux a proposé d'utiliser les couplages pour chiffrer, alors qu'auparavant on les utilisaient pour la cryptanalyse.
- Les couplages en caractéristique 2 et 3 sont les plus rapides et ont fait l'objet de nombreuses implantations.
- En 2013 Joux, Boneh et Franklin ont reçu le prix Gödel pour leurs travaux concernant les couplages.
- La NIST et plusieurs compagnies privées ont étudié les applications des couplages.

Les relations du log discret en petite caractéristique avec les autres problèmes



F_Q est un corps à Q éléments, Q puissance de premier.

Friabilité

Definition

On dit qu'un polynôme de $\mathbb{F}_q[t]$ est m-friable s'il se factorise en polynômes de degré inférieur ou égal à m.

Theorem

La probabilité qu'un polynôme de degré n soit m-friable est $1/u^{u(1+o(1))}$ où $u = \frac{n}{m}$.

Cas particuliers:

- $n = D$, $m = D/6$: probabilité constante;
- $n = D$, $m = 1$: probabilité $1/D! \approx 1/D^D$.

Collecte de relations

Le corps $\mathbb{F}_{q^k}$ est représenté par $\mathbb{F}_q[t]/\varphi$
pour un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$ de degré k.

Example

Prenons $q = 3$, $k = 5$, $\varphi = t^5 + t^4 + 2t^3 + 1$, $g = t \in \mathbb{F}_{3^5}$ et $\ell = 11 \mid 3^5 - 1$. On a

$$t^5 \equiv 2(t+1)(t^3 + t^2 + 2t + 1) \mod \varphi$$

Collecte de relations

Le corps $\mathbb{F}_{q^k}$ est représenté par $\mathbb{F}_q[t]/\varphi$
pour un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$ de degré k.

Example

Prenons $q = 3$, $k = 5$, $\varphi = t^5 + t^4 + 2t^3 + 1$, $g = t \in \mathbb{F}_{3^5}$ et $\ell = 11 \mid 3^5 - 1$. On a

$$\begin{aligned} t^5 &\equiv 2(t+1)(t^3+t^2+2t+1) && \bmod \varphi \\ t^6 &\equiv 2(t^2+1)(t^2+t+2) && \bmod \varphi \end{aligned}$$

Collecte de relations

Le corps $\mathbb{F}_{q^k}$ est représenté par $\mathbb{F}_q[t]/\varphi$
pour un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$ de degré k.

Example

Prenons $q = 3$, $k = 5$, $\varphi = t^5 + t^4 + 2t^3 + 1$, $g = t \in \mathbb{F}_{3^5}$ et $\ell = 11 \mid 3^5 - 1$. On a

$$\begin{aligned} t^5 &\equiv 2(t+1)(t^3+t^2+2t+1) && \bmod \varphi \\ t^6 &\equiv 2(t^2+1)(t^2+t+2) && \bmod \varphi \\ t^7 &\equiv 2(t+2)(t+1)(t+1) && \bmod \varphi \end{aligned}$$

Collecte de relations

Le corps $\mathbb{F}_{q^k}$ est représenté par $\mathbb{F}_q[t]/\varphi$
pour un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$ de degré k.

Example

Prenons $q = 3$, $k = 5$, $\varphi = t^5 + t^4 + 2t^3 + 1$, $g = t \in \mathbb{F}_{3^5}$ et $\ell = 11 \mid 3^5 - 1$. On a

$$\begin{aligned} t^5 &\equiv 2(t+1)(t^3+t^2+2t+1) && \bmod \varphi \\ t^6 &\equiv 2(t^2+1)(t^2+t+2) && \bmod \varphi \\ t^7 &\equiv 2(t+2)(t+1)(t+1) && \bmod \varphi \end{aligned}$$

La dernière relation donne:

$$7 \log_g t \equiv \log_g 2 + 1 \log_g(t+2) + 2 \log_g(t+1) \mod 11$$

Collecte de relations

Le corps $\mathbb{F}_{q^k}$ est représenté par $\mathbb{F}_q[t]/\varphi$
pour un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$ de degré k.

Example

Prenons $q = 3$, $k = 5$, $\varphi = t^5 + t^4 + 2t^3 + 1$, $g = t \in \mathbb{F}_{3^5}$ et $\ell = 11 \mid 3^5 - 1$. On a

$$\begin{aligned} t^5 &\equiv 2(t+1)(t^3+t^2+2t+1) && \mod \varphi \\ t^6 &\equiv 2(t^2+1)(t^2+t+2) && \mod \varphi \\ t^7 &\equiv 2(t+2)(t+1)(t+1) && \mod \varphi \end{aligned}$$

La dernière relation donne:

$$7 \log_g t \equiv \cancel{\log_g 2} + 1 \log_g(t+2) + 2 \log_g(t+1) \mod 11$$

Proposition

Si $a \in \mathbb{F}_q^*$ et ℓ est un facteur premier de $q^k - 1$ qui ne divise pas avec $(q-1)$, alors $\log a \equiv 0 \mod \ell$.

Collecte de relations

Le corps $\mathbb{F}_{q^k}$ est représenté par $\mathbb{F}_q[t]/\varphi$
pour un polynôme irréductible $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$ de degré k.

Example

Prenons $q = 3$, $k = 5$, $\varphi = t^5 + t^4 + 2t^3 + 1$, $g = t \in \mathbb{F}_{3^5}$ et $\ell = 11 \mid 3^5 - 1$. On a

$$\begin{aligned} t^5 &\equiv 2(t+1)(t^3+t^2+2t+1) && \mod \varphi \\ t^6 &\equiv 2(t^2+1)(t^2+t+2) && \mod \varphi \end{aligned}$$

$$t^8 \equiv \dots$$

La dernière relation donne:

$$\begin{aligned} 7\log_g t &\equiv 1\log_g(t+2) + 2\log_g(t+1) && \mod 11 \\ 8\log_g(t+1) &\equiv 1\log_g(t+2) && \mod 11 \\ 9\log_g(t+2) &\equiv 2\log_g t && \mod 11 \end{aligned}$$

On trouve $\log_g(t+1) \equiv 158 \mod 11$ et $\log_g(t+2) \equiv 54 \mod 11$.

Descente

Example (suite)

On se propose de calculer $\log_g P$ pour un polynôme arbitraire, disons $P = t^4 + t + 2$. On a

$$\begin{aligned} P^2 &\equiv t^4 + t^3 + 2t^2 + 2t + 2 && \mod \varphi \\ P^3 &\equiv 2(t+1)(t+2)(t^2+1) && \mod \varphi \\ P^4 &\equiv (t+1)(t+2)t^2 && \mod \varphi. \end{aligned}$$

Descente

Example (suite)

On se propose de calculer $\log_g P$ pour un polynôme arbitraire, disons $P = t^4 + t + 2$. On a

$$\begin{aligned} P^2 &\equiv t^4 + t^3 + 2t^2 + 2t + 2 && \mod \varphi \\ P^3 &\equiv 2(t+1)(t+2)(t^2+1) && \mod \varphi \\ P^4 &\equiv (t+1)(t+2)t^2 && \mod \varphi. \end{aligned}$$

En prenant le log discret on trouve

$$4 \log_g P = 1 \log_g(t+1) + 1 \log_g(t+2) + 2 \log_g t.$$

Donc $\log_g P = 114$.

Le log discret des constantes

Ici ℓ est un facteur premier de l'ordre du groupe, $q^k - 1$, supérieur à $q - 1$.

Éléments de $\mathbb{F}_q$

Éléments de $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^k}$ sont représenté dans $\mathbb{F}_q[t]/\langle\varphi\rangle$ comme constantes a. Ils vérifient $a^{q-1} = 1$, donc on a

$$\log_g(a^{q-1}) \equiv \log_g(1) \equiv 0 \mod \ell.$$

Alors,

$$(q-1)\log_g a \equiv 0 \mod \ell.$$

Puisque ℓ est premier et supérieur à $q - 1$,

$$\log_g a \equiv 0 \mod \ell.$$

Résultat principal

Théorème (sous heuristiques)

Soit K un corps fini $\mathbb{F}_{q^k}$. On résout le problème du logarithme discret dans K en temps heuristique

$$\max(q,k)^{O(\log k)}.$$

Cas particuliers:

- $K = \mathbb{F}_{2^n}$, pour n premier. Complexité: $n^{O(\log n)}$. Considérablement plus faible que $L_{2^n}(1/4 + o(1)) \approx 2^{\sqrt[4]{n}}$ (état d'art: Joux 2013).
- $K = \mathbb{F}_{q^k}$, avec $q = k^{O(1)}$. Complexité : $\log Q^{O(\log \log Q)}$, où $Q = \#K$. Rappel: cela s'écrit $L_Q(o(1))$.
- $K = \mathbb{F}_{q^k}$, avec $q \approx L_{q^k}(\alpha)$. Complexité est $L_{q^k}(\alpha + o(1))$, c-à-d mieux que l'algorithme de Joux-Lercier et FFS quand $\alpha < 1/3$.

Un nouveau modèle pour $\mathbb{F}_{q^{2k}}$

On commence par un cas particulier

On suppose d'abord que $k \approx q$ et $k \leq q+2$.

Choix de φ (même que dans l'algorithme de Joux)

Tirer au hasard $h_0, h_1 \in \mathbb{F}_{q^2}[t]$ avec $\deg h_0, \deg h_1 \leq 2$ jusqu'à ce que $T(t) := h_1(t)t^q - h_0(t)$ a un facteur irréductible φ de degré k.

Heuristique

L'existence de h_0 et h_1 est heuristique, mais il est trouvé en pratique après $O(k)$ essais.

Propriétés de φ

- $h_1(t)t^q \equiv h_0(t) \mod \varphi$;
- $P(t^q) \equiv P\left(\frac{h_0}{h_1}\right) \mod \varphi$;
- $P^q \equiv \tilde{P}(t^q) \equiv \tilde{P}\left(\frac{h_0}{h_1}\right) \mod \varphi$,
  où le signe tilde désigne la conjugaison dans $\mathbb{F}_{q^2}$.

Une identité célèbre

Rappelons l'identité

$$x^q - x = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (x - \alpha).$$

Cela donne $x^q y - x y^q = \prod_{(\alpha:\beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} (\beta x - \alpha y)$.

Une identité célèbre

Rappelons l'identité

$$x^q - x = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (x - \alpha).$$

Cela donne $x^q y - x y^q = \prod_{(\alpha:\beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} (\beta x - \alpha y)$.

Une machine à produire des relations

- $x = t$ et $y = 1$: $h_0/h_1 - t \equiv t^q - t \equiv \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (t - \alpha)$.
  Si le numérateur du membre de gauche est friable, on obtient des relations entre les polynômes linéaires.
- $x = t + a$, $a \in \mathbb{F}_q$, et $y = 1$: même relation.
- $x = t + a$, $a \in \mathbb{F}_{q^2}$, et $y = 1$: nouvelles relations. L'algorithme de Joux utilise déjà cette idée.
- Soit P un polynôme pour lequel on cherche le log discret.

Une identité célèbre

Rappelons l'identité

$$x^q - x = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (x - \alpha).$$

Cela donne $x^q y - x y^q = \prod_{(\alpha:\beta) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} (\beta x - \alpha y)$.

Une machine à produire des relations

- $x = t$ et $y = 1$: $h_0/h_1 - t \equiv t^q - t \equiv \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (t - \alpha)$.
  Si le numérateur du membre de gauche est friable, on obtient des relations entre les polynômes linéaires.
- $x = t + a$, $a \in \mathbb{F}_q$, et $y = 1$: même relation.
- $x = t + a$, $a \in \mathbb{F}_{q^2}$, et $y = 1$: nouvelles relations. L'algorithme de Joux utilise déjà cette idée.
- Soit P un polynôme pour lequel on cherche le log discret.
  $x = aP + b$ et $y = cP + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{F}_{q^2}$: montrons que le côté gauche est congruent à un polynôme de petit degré, tandis que le membre droit est friable dans un nouveau sens.

Le membre droit est “friable”

$$(aP+b)^q(cP+d)-(aP+b)(cP+d)^q = \prod_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} \beta(aP+b)-\alpha(cP+d)$$

$$= \prod_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} (-c\alpha+a\beta)P-(d\alpha-b\beta)$$

$$= \lambda \prod_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} \left(P-\frac{d\alpha-b\beta}{a\beta-c\alpha}\right),$$

Dans chaque relation apparaissent $q+1$ sur q^2+1 éléments de $\{1\}\bigcup\{P+\gamma : \gamma\in\mathbb{F}_{q^2}\}$.

Le membre de gauche est petit

Pour $m \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$, on note $\mathcal{L}_m$ le reste

$$\mathcal{L}_m := h_1^{\deg P}\left((aP+b)^q(cP+d) - (aP+b)(cP+d)^q\right) \mod \varphi(t).$$

Le membre de gauche est petit

Pour $m \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$, on note $\mathcal{L}_m$ le reste

$$\mathcal{L}_m := h_1^{\deg P}\left((aP+b)^q(cP+d) - (aP+b)(cP+d)^q\right) \mod \varphi(t).$$

On a $\deg \mathcal{L}_m \leq 3 \deg P$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= h_1^{\deg P}(\tilde{a}\tilde{P}(t^q)+\tilde{b})(cP+d) - (aP(t)+b)(\tilde{c}\tilde{P}(t^q)+\tilde{d}) \\ &= h_1^{\deg P}\left(\tilde{a}\tilde{P}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)+\tilde{b}\right)(cP+d) - (aP+b)\left(\tilde{c}\tilde{P}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)+\tilde{d}\right).\end{aligned}$$

Pour une proportion constante de matrices m, $\mathcal{L}_m$ est $(\deg P)/2$-friable.

Procédure pour "casser" un polynôme P

Chaque matrice m de l'ensemble quotient $\mathcal{P}_q := \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{q^2})/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ tel que $\mathcal{L}_m$ est $(\deg P)/2$-friable produit une équation différente

$$\prod_i P_{i,m}^{e_{i,m}} = \lambda \prod_{\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2})} (P+\gamma)^{v_m(\gamma)},$$

où

- $\deg P_i \leq (\deg P)/2$;
- $v_m(\gamma)$ sont les exposants;
- λ sont des constantes dans $\mathbb{F}_{q^2}$.

En prenant les logs discrets on trouve

$$\sum_i e_{i,m} \log P_{i,m} \equiv \sum_\gamma v_m(\gamma) \log(P+\gamma) \mod \ell.$$

Heuristique

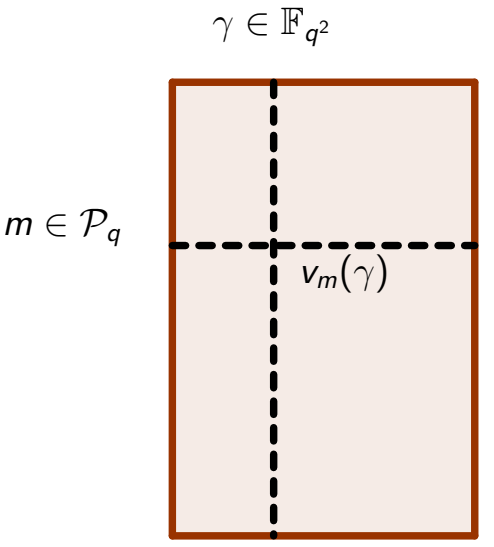
On dispose d'un nombre suffisant d'équations pour les combiner et obtenir

$$\sum_{i,m} e'_{i,m} \log P_{i,m} \equiv \log P \mod \ell.$$

En 2016 Zhu, Zhuang, Lv et Lin ont publié une paramétrisation de $\mathcal{P}_q$.

L'étape d'algèbre linéaire pour P

Puisque $\#\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{q^i}) = q^{3i} - q^i$, $\#\mathcal{P}_q = q^3 + q$. Une fraction constante d'éléments produisent des équations linéaires entre les log discrets, donc la matrice ci-dessous a plus de lignes que de colonnes.



Due à l'heuristique on peut combiner ses lignes pour obtenir

$$(1, 0, \ldots, 0).$$

Brique de base de l'algorithme quasi-polynomial

On vient de prouver:

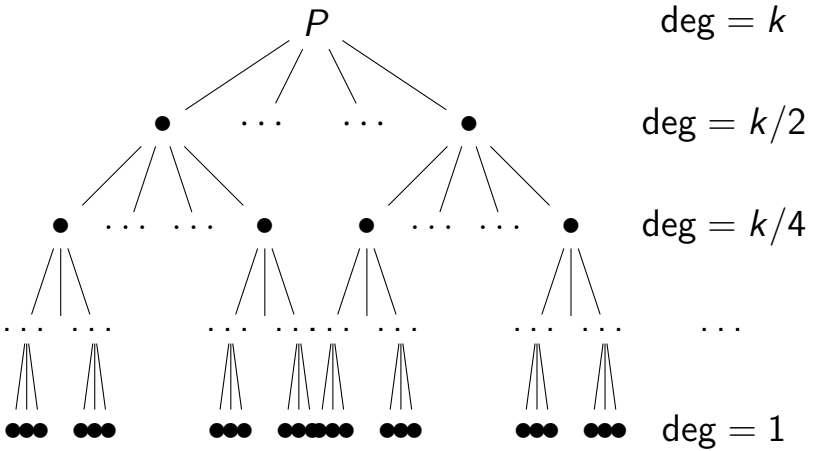
Proposition (sous heuristiques)

Il existe un algorithme de complexité polynomiale en q et k, qui résout les deux tâches suivantes.

1. Étant donné un élément de $\mathbb{F}_{q^{2k}}$ représenté par un polynôme $P \in \mathbb{F}_{q^2}[t]$ avec $2 \leq \deg P \leq k-1$, l'algorithme renvoie une expression de $\log P$ comme combinaison linéaire d'au plus $O(kq^2)$ logarithmes $\log P_i$ avec $\deg P_i \leq \lceil \frac{1}{2} \deg P \rceil$ et de $\log h_1$.

2. L'algorithme renvoie le logarithme de h_1 et ceux de tous les éléments de $\mathbb{F}_{q^{2k}}$ de la forme $t + a$, pour a dans $\mathbb{F}_{q^2}$.

Complexité



Propriétés de l'arbre de descente

- hauteur=log k car on divise par deux le degré à chaque niveau;
- arité=$O(q^2 k)$ car les enfants sont les facteurs irréductibles de s q^2 membres droits;
- nombre de nœuds=$q^{O(\log k)}$ car $k \leq q + 2$.

DLP in small characteristic finite fields is now forbidden

Algorithms, Key Size and Parameters Report – 2013 Recommendations

- Gap Diffie–Hellman problem: Given g^x and g^y for hidden x and y compute $g^{x \cdot y}$, given an oracle which allows solution of the Decision Diffie–Hellman problem.

Clearly the ability to solve the DLP will also give one the ability to solve the above three problems, but the converse is not known to hold in general (although it is in many systems widely believed to be the case).

Finite Field DLP

The discrete logarithm problem in finite fields (which we shall refer to simply as DLP), and hence the Diffie–Hellman problem, Decision Diffie–Hellman problem and gap Diffie–Hellman problem, is parametrized by the finite field $\mathbb{F}_{p^n}$ and the subgroup size q, which should be prime. In particular this means that q divides $p^n - 1$. To avoid "generic attacks" the value q should be at least 160 bits in length for legacy applications and at least 256 bits in length for new deployments.

For the case of small prime characteristic, i.e. $p = 2, 3$ there is new algorithm was presented in early 2013 by Joux [184] which runs in time $L(1/4 + o(1))$, for when the extension degree n is composite (which are of relevance to pairing based cryptography). This algorithm was quickly supplanted by an algorithm which runs in quasi-polynomial time by Barbulescu and others [26]. Also in 2013 a series of record breaking calculations were performed by a French team and a Irish team for characteristic two fields, resulting in the records of $\mathbb{F}_{2^{6120}}$ [137] and $\mathbb{F}_{2^{6168}}$ [182]. For characteristic three the record is $\mathbb{F}_{3^{582}}$ [332]. For prime values of n the best result is a discrete logarithm calculation in the field $\mathbb{F}_{2^{809}}$ [61]. All of these results make use of special modification to the function field sieve algorithm [9]. In light of these results no system should be deployed relying on the hardness of the DLP in small characteristic fields.

Records

Algorithmes utilisés en pratique

1. collecte de relations (degré un et deux): variantes des algorithmes de Granger, Gologlu, Mcguire, Zumbragel et respectivement Joux;
2. descente (degré trois ou plus): variantes de l'algo de Joux de complexité L(1/4).

△=descente quasi-poly de Kleinjung et al., *=128 bits de sécurité

extensions de Kummer et tordues de Kummer

corps	taille (bits)	date	temps CPU	auteur
$\mathrm{GF}(2^{24\cdot 255})$	6120	Apr 13	0.7k h	GGMZ
$\mathrm{GF}((2^{24\cdot 257})$	6168	May 13	0.5k h	J
$\mathrm{GF}(2^{18\cdot 513})$ * △	9234	Jan 14	400k h	GKZ

Extensions générales de degré composé

corps	taille (bits)	date	temps CPU	auteur
$\mathrm{GF}(3^{6\cdot 137})$	1303	Jan 14	1k h	AMOR
$\mathrm{GF}(2^{12\cdot 367})$	4404	Jan 14	52k h	GKZ
$\mathrm{GF}(3^{5\cdot 479})$	3796	Aug 14	9k h	JP
$\mathrm{GF}(3^{6\cdot 506})$ *	4841	July 16	200 years	AMOR+

FFS est désormais obsolète en charactéristique 2

GIPS=giga instructions per second

n	date	GIPS year	algo.	author
401	1992	0.2	Copp.	Gordon,McCurley
512[1]	2002	0.4	FFS	Joux,Lercier
607	2002	20	Copp.	Thomé
607	2005	1.6	FFS	Joux,Lercier
613	2005	1.6	FFS	Joux,Lercier
619	2012	< 0.1	FFS	Caramel
809	2013	16	FFS	Caramel
1279	2014	3.5	quasi	Kleinjung

[1] Utilisant le même algorithme que pour les degrés premiers.

Conclusion

- Le calcul de logarithmes discrets dans les corps de petite caractéristique a été introduit en cryptologie car l'arithmétique est plus rapide;
- abandonné en 1984 après la publication de l'algorithme de Coppersmith
- réintroduit en 2000 grâce à Antoine Joux
- asymptotiquement faible après l'algorithme quasi-polynomial.
- Les couplages de petite caractéristique sont cassés pour les tailles de clé proposées dans les articles de recherche.