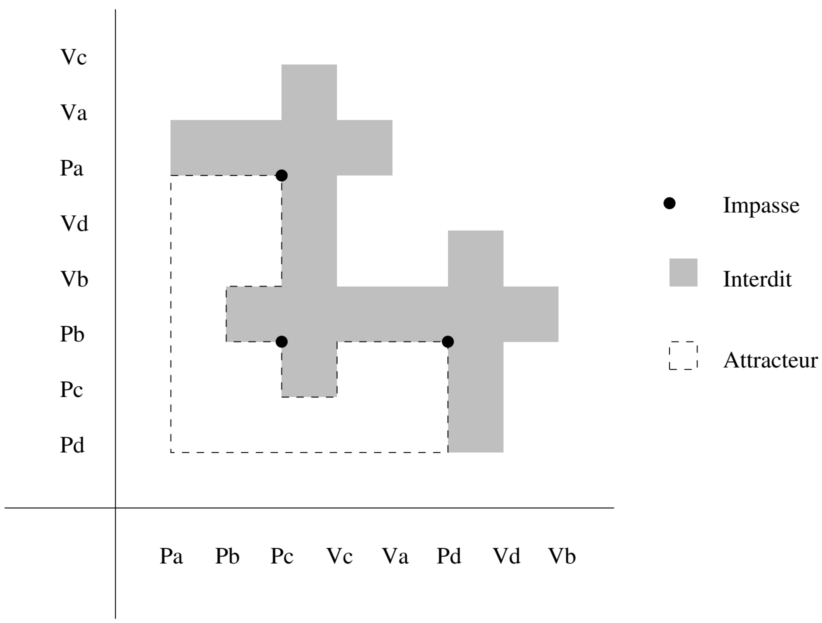
Concurrence
et
Topologie Algébrique Dirigée

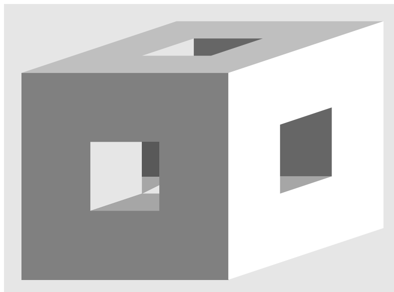
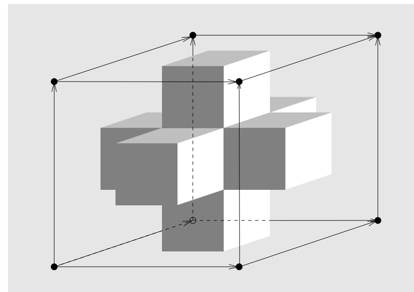
MPRI seconde année second semestre

Corrigé

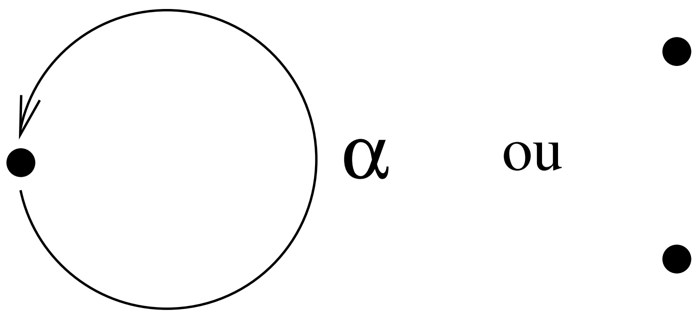
Exercice 1
Questions 1, 2 et 3 :



Question 4 :
`P(a).V(a)|P(a).V(a)|P(a).V(a)` avec `a` sémaphore d'arité 2.
Question 5 :
Le maximum, à savoir 6, est atteint en prenant par exemple $x := (0,0,0)$ et $y = (1,1,1)$.

Exercice 2
Question 1 :
On a trois catégories ayant exactement 2 morphismes, leurs graphes sous-jacents sont



avec $\alpha \circ \alpha = \alpha$ ou $\alpha \circ \alpha = \mathsf{idt}$. Dans le premier cas on a le monoïde $(\{0,1\}, \vee, 0)$ où $\vee$ désigne la borne supérieure (c'est en particulier un treillis) dans le second cas on a le monoïde $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$ (c'est en particulier un groupe).
Les catégories ayant exactement 2 objets et 4 morphismes sont :
- Les sommes de deux monoïdes ayant deux éléments i.e. "2+2"
- Les sommes d'un monoïde ayant 3 éléments et du monoïde trivial i.e. "3+1"
- La catégorie libre dont le graphe est

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & y \end{tikzcd}$$

- Le catégorie dont le graphe sous-jacent est

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\alpha"] & y \arrow[l, shift left, "\alpha^{-1}"] \end{tikzcd}$$

avec $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathsf{idt}_{\mathsf{y}}$ et $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathsf{idt}_{\mathsf{x}}$ (cette catégorie est un groupoïde, c'est-à-dire que tous ses morphismes sont inversibles). La classification détaillée des monoïdes à 3 éléments est un peu longue, elle n'était pas demandée. Des points ont été attribués à ceux qui l'ont traîtée, même partiellement.
Question 2 :

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ et $|\mathcal{C}| \leq 8$ avec $\mathcal{A} \neq \mathbf{1}$, $\mathcal{B} \neq \mathbf{1}$ et $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$ alors on a $|\mathcal{A}| = 2$ (après une rapide énumération des divers cas possibles). Or il n'existe aucune catégorie sans boucle connexe ayant deux morphismes.

Question 3 :
Les catégories $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$ et $\{\bullet\ \bullet\} \times \{\bullet\ \bullet\}$ conviennent.

Question 4 :
Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est sans boucle et connexe il en va de même de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Si de plus $\mathcal{A} \neq \mathbf{1}$, $\mathcal{B} \neq \mathbf{1}$ et $|\mathcal{C}| = 9$, alors on a $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 3$. Or il n'existe qu'une seule catégorie sans boucle connexe ayant exactement 3 morphismes.

<u>Exercice 3</u>

Question 1 :
Avec les notations de l'énoncé.
Tout chemin constant est continu et croissant.
La continuité de la concaténation est un résultat classique (on peut par exemple invoquer un argument séquentiel). Puis si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $t' \in [\frac{1}{2}, 0]$ on a

$$\delta(2t) \sqsubseteq \delta(1) = \gamma(0) \sqsubseteq \gamma(2t' - 1)$$

donc $\delta(2t) \sqsubseteq \gamma(2t' - 1)$ et la concaténation est croissante.
Les appliations δ et θ sont deux morphismes de Po que l'on compose.
Notons $I(\overrightarrow{X})$ l'espace dirigé obtenu, si f est un morpisme de Po de $\overrightarrow{X}$ vers $\overrightarrow{Y}$ et δ un chemin sur $\overrightarrow{X}$ alors $f \circ \delta$ est un chemin sur $\overrightarrow{Y}$, donc f induit une application de dX dans dY autrement dit un morphisme dTop de $I(\overrightarrow{X})$ vers $I(\overrightarrow{Y})$.

Question 2 :
L'application $t \in [0, 1] \cup [2, 3] \mapsto t + 2$ si $t \in [0, 1]$; $t - 2$ si $t \in [2, 3]$ convient. Il suffit de remarquer que l'image d'un chemin sur cet espace est entièrement incluse dans $[0, 1]$ ou bien dans $[2, 3]$ et que l'application proposée échange donc les chemins sur $[0, 1]$ et ceux sur $[2, 3]$.

Question 3 :
Les ensembles $\emptyset$ et X sont clairement des attracteurs. Soit $(A_j)_{j \in J}$ est une famille d'attracteurs et δ un chemin sur $\overrightarrow{X}$. Si pour tous $j \in J$ $\delta(0)$ appartient à A_j, alors pour tous $j \in J$ $\delta(1)$ appartient aussi à A_j qui est un attracteur. Donc

$$\delta(1) \in \bigcap_{j \in J} A_j$$

Si $\delta(0)$ appartient à A_j pour un certain $j \in J$, alors $\delta(1)$ appartient aussi à A_j puisque c'est un attracteur. Donc

$$\delta(1) \in \bigcup_{j \in J} A_j$$

La collection des attracteurs est donc à la fois stable par union et intersection quelconque. Soit f un morphisme de (X, dX) vers (Y, dY) et δ un élément de dX tel que $\delta(0) \in \{x \mid f(x) \in A'\}$ où A' est un attracteur de (Y, dY). Alors $f \circ \delta$ est un chemin sur dY et $f \circ \delta(0) \in A'$, donc $f \circ \delta(1) \in A'$ et ainsi $\delta(1) \in \{x \mid f(x) \in A'\}$. L'image inverse d'un attracteur par un morphisme d'espaces dirigés est donc un attracteur, d'où un foncteur de dTop dans Top.

Question 4 :
Il suffit de remarquer que si p est un point de l'espace ordonné $\overrightarrow{X}$, alors

$$\left\{x \in \overrightarrow{X} \;\middle|\; p \sqsubseteq x\right\}$$

est un attracteur de $I(\overrightarrow{X})$. Il n'est pas non plus difficile de voir que $p \neq p'$ si et seulement si

$$\left\{x \in \overrightarrow{X} \;\middle|\; p \sqsubseteq x\right\} \neq \left\{x \in \overrightarrow{X} \;\middle|\; p' \sqsubseteq x\right\}$$

Il s'ensuit que si $\overrightarrow{X}$ possède au moins deux points alors il possède aussi au moins 4 attracteurs (avec $\emptyset$ et $\overrightarrow{X}$). Ainsi $I(\overrightarrow{X})$ a exactement deux attracteurs si et seulement si X est un singleton.

Question 5 :
On peut poser $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie standard et dX comme l'ensemble des toutes les applications de $[0, 1]$ $\mathbb{R}$. Les seuls attracteurs sont donc $\emptyset$ et $\mathbb{R}$. D'après la question 4 cet espace dirigé ne peut donc pas être l'image par I d'un espace ordonné. Cet exemple n'est cependant pas très intéressant aussi en donnons-nous un autre.

On pose X le cercle Euclidien $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ vu comme une sous-partie du plan complexe. L'ensemble des chemins dX est par définition

$$\left\{t \in [0, 1] \mapsto e^{i\theta(t)} \in \mathbb{C} \;\middle|\; t \in [0, 1], \theta : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ continue et croissante}\right\}$$

Autrement dit les seuls chemins permis sont ceux qui "tournent" dans le sens trigonométrique. Il est facile de voir que cet espace dirigé n'a que deux attracteurs puisqu'en décrivant un arc de cercle dans le sens trigonométrique on peut toujours joindre deux points du cercle. D'après la question 4 cet espace dirigé n'est pas dans l'image de I. Cependant pour chaque point p de (X, dX) l'espace dirigé induit sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \backslash \{p\}$ est isomorphe à $I(\overrightarrow{\mathbb{R}})$. Cet espace est donc "localement ordonné".

Question 6 :
Reprendre la construction du foncteur catégorie fondamentale pour les espaces ordonnés donnée dans le cours, c'est-à-dire :
- définir le foncteur Q de dTop dans Gph qui à chaque espace dirigé associe un graphe
- définir la notion d'homotopie entre les chemins sur (X, dX)

- constater que la définition du recollement s'applique dans le cas
des espaces dirigés parce que dX est supposé stable par concaténation.
- en déduire une congruence sur la catégorie librement engendrée par $Q(X, dX)$
et définir la catégorie fondamentale comme le quotient qui en résulte.