École polytechnique — Majeure 2 informatique
Promotion 2001

Cours de conception et analyse d'algorithmes

PC 4 – problèmes NP-complets

1. $\mathcal{NP}$ complétude de MAX2SAT

Etant donné un ensemble Φ de m clauses sur les variables booléennes $x_1, \ldots, x_n$, tel que chaque clause contient au plus deux littéraux, et étant donné un entier k, le problème MAX2SAT consiste à décider s'il existe une assignation des variables qui satisfasse au moins k clauses. On se propose de montrer que ce dernier est NP-complet.

i. Montrer que MAX2SAT est dans $\mathcal{NP}$.

ii. Soit une clause à trois littéraux $C = x \vee y \vee z$; vérifier que dans l'ensemble de 10 clauses donné ci-dessous (faisant intervenir une variable supplémentaire t), quelles que soient les valeurs de vérité des variables x, y, z, au plus 7 des 10 clauses sont satisfaites, et que ce maximum de 7 n'est atteint que si au moins un de x, y ou z est vrai :

$$x,\ y,\ z,\ t,\ \overline{x} \vee \overline{y},\ \overline{y} \vee \overline{z},\ \overline{z} \vee \overline{x},\ x \vee \overline{t},\ y \vee \overline{t},\ z \vee \overline{t}.$$

ii. En déduire une réduction de 3SAT à MAX2SAT. Conclure.

2. $\mathcal{NP}$ complétude de ORD-TACHES

On s'intéresse au problème suivant qui modélise l'ordonnancement de tâches sur un multiprocesseur : soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe orienté sans circuit, où les sommets représentent les tâches et l'arc (x, y) signifie que la tâche x doit être exécutée avant la tâche y. Une *décomposition compatible* de Γ est une partition de l'ensemble des sommets $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t$ (où S_i représente l'ensemble des tâches exécutée en parallèle à l'instant i), telle que si $x \in S_i$, $y \in S_j$, et $(x, y) \in A$, alors nécessairement $i < j$. La *profondeur* de la décomposition (nombre total d'étapes) est t, et sa *largeur* (nombre de processeurs nécessaire) est $l = \max_t \#S_t$. Etant donné Γ, t et l, le problème ORD-TACHES consiste à décider s'il existe une décomposition de Γ de profondeur au plus t et de largeur au plus l. Le but de l'exercise est de montrer que ce problème est NP-complet.

On utilisera une réduction de CLIQUE à ORD-TACHES. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté à n sommets et m arêtes ; on construit un graphe orienté Γ comme suit. Les sommets sont l'ensemble $S = X \cup E$ Les arcs de Γ sont $A = \{(x, e) \in X \times E, x \in e\}$.

i. On suppose que G n'a pas de sommet isolé. Soit $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ une décomposition compatible de Γ de profondeur 3. Montrer que $S_1 \cap E = \emptyset$ et que $S_3 \cap X = \emptyset$. Soit k le cardinal de $S_1 \cap X$. Montrer que $\#(S_2 \cap E) \leqslant k(k-1)/2$. Que dire des sommets $S_1 \cap X$ de G dans les cas où cette inégalité est en fait une égalité ?

ii. On augmente le graphe Γ en un nouveau graphe Γ' avec $S' = S \cup Y \cup Z \cup T$, $A' = A \cup Y \times Z \cup Z \times T$, et Y, Z et T de cardinaux p, q et r respectivement. Combien Γ' a-t-il d'arcs ?

Soit k tel que $k \leqslant n$ et $k(k-1)/2 \leqslant m$. Montrer que l'on peut choisir p, q, r, l de façon à avoir la propriété suivante : G admet une clique de taille k si et seulement si Γ' admet une décomposition compatible en trois sous-ensembles de même taille l.

iii. En déduire que ORD-TACHES est NP-complet.

3. $\mathcal{NP}$ complétude de HITTING SET

Etant donné un ensemble S de cardinal n est une collection C de sous-ensembles de S, et étant donné un entier k, le problème est de décider s'il existe un sous-ensemble S' de S de taille au plus k et qui contienne au moins un élément de chaque ensemble de C. Montrer, par réduction à partir de COUVRANT-MIN, que ce problème est $\mathcal{NP}$ complet.

4. $\mathcal{NP}$ complétude de l'isomorphisme de sous-graphes

Etant donné deux graphes G et H, le problème est de décider s'il existe une injection ϕ de V_H dans V_G telle que $\{u, v\} \in E_H$ ssi $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_G$. Montrer que ce problème est $\mathcal{NP}$ complet par réduction à partir de STABLE.

5. CIRCUIT-SAT et SAT

Un circuit booléen est un graphe orienté sans circuit dont chaque sommet s est étiqueté soit par un littéral (si s n'a pas d'arc entrant), soit par une constante 0 ou 1 (si s n'a pas d'arc entrant), soit par l'un des symboles $\vee$ ou $\wedge$ (si s a exactement deux arcs entrants), soit par $\neg$ (si s a un unique arc entrant). Il est clair qu'à tout circuit correspond une formule booléenne et que, réciproquement, on peut associer un circuit à toute fonction booléenne. Le problème CIRCUIT-SAT consiste à déterminer s'il existe une affectation des variables qui donne la valeur vraie à la fonction booléenne associée au circuit.

La plupart des livres prennent CIRCUIT-SAT (au lieu de SAT) comme premier problème NP-complet. On se propose de montrer que le problème CIRCUIT-SAT se réduit à SAT. Pour cela, on associe à tout circuit un ensemble de clauses faisant intervenir les variables $x_1, \ldots, x_n$ qui étiquettent des sommets, ainsi qu'une variable y_S pour chaque sommet s du graphe.

i. Écrire des ensembles u de clauses faisant intervenir des variables x, y et z vérifiant respectivement :

- les clauses de u sont satisfaites si et seulement si $x = y$
- les clauses de u sont satisfaites si et seulement si $x = \bar{y}$
- les clauses de u sont satisfaites si et seulement si $x = y \vee z$
- les clauses de u sont satisfaites si et seulement si $x = y \wedge z$

ii. Montrer que CIRCUIT-SAT se réduit à SAT.