École polytechnique — Majeure informatique

Promotion 2001

Cours « Conception et analyse d'algorithmes »

PC n^o 3 – programmation linéaire

1. Adéquation linéaire

Un physicien prend des mesures d'une fonction $y(x)$ qu'il sait linéaire. Les résultats sont donnés sous la forme de couples (x_i, y_i). Il souhaite trouver la droite qui "correspond le mieux" à ces données, en ce sens que la distance verticale maximale entre un point (x_i, y_i) et la droite soit la plus petite possible.

Modéliser ce problème comme un programme linéaire. Ecrire le programme linéaire dual. Pourquoi peut-il être préférable d'en résoudre le dual ?

2. Le sac à dos

On considère le problème classique du sac à dos : les objets à emporter, numérotés de 1 à n, ont pour poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et pour coefficients d'intérêt $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La capacité du sac (ou plutôt celle du porteur) est p.

i. Exprimer le problème d'optimisation du remplissage du sac sous forme d'un problème linéaire à $n+1$ contraintes faisant intervenir des variables à valeurs entières.

ii. (long) Exécuter la méthode du simplexe dans le cas suivant avec $p = 18$:

i	1	2	3	4	5
p_i	8	6	6	4	3
a_i	7	5	4	3	2

iii. Un ensemble d'objets est dit *bloquant* si la somme des poids des objets qui le composent est supérieure à p, et *caractéristique* s'il est bloquant minimal. Montrer que l'on peut associer à chaque ensemble caractéristique une contrainte où les coefficients des variables sont 0 ou 1. Montrer que l'ajout de ces contraintes permet de supprimer la contrainte obtenue en **i.** qui contenait des coefficients supérieurs à 1, et que les deux formulations sont équivalentes (*i.e.* donnent les mêmes solutions optimales).

iv. Peut-on être assuré que l'optimum trouvé a toutes ses coordonnées égales à 0 ou 1 ?

3. Plus court chemin.

Etant donné un graphe orienté G avec arêtes valuées par une fonction positive c, et deux sommets s et t de G, on souhaite trouver un plus court chemin de s à t dans G.

En associant à chaque sommet v une variable d_v, écrire un programme linéaire dont la solution est une borne inférieure à la longueur du plus court chemin de s à t dans G. Montrer que la solution optimale du programme linéaire est en fait exactement égale à la longueur du plus court chemin de s à t. Ecrire le dual du programme linéaire, et l'interpréter.

4. Flot maximum.

Etant donné un graphe orienté G avec capacités sur les arcs données par une fonction positive c, un sommet source s et un sommet destination t, on souhaite trouver un flot de s à t de valeur maximale.

Pour simplifier la présentation, on ajoute un arc de t à s de capacité infinie.

Ecrire un programme linéaire pour ce problème. Ecrire le dual du programme linéaire, et l'interpréter.

5. Ordonnancement préemptif sur des machines parallèles

Un ensemble de tâches $\{1, \cdots, n\}$ doit être exécuté sur m machines parallèles. Chaque tâche a une durée p_i et peut être exécutée de manière préemptive, c'est-à-dire que l'exécution de chaque tâche i peut être faite en plusieurs sous-tâches dont la somme des durées est p_i. Une tâche peut commencer sur une machine, être interrompue et continuer sur une autre machine mais deux parties d'une même tâches ne peuvent être exécutées en même temps sur des machines différentes.

i. Montrer que la durée minimale d'un tel ordonnancement est

$$\max\left(\max_{1\leq i\leq n} p_i, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{m}\right)$$

et qu'un tel ordonnancement peut être déterminé en $O(n)$.

ii. Chaque tâche a maintenant une fenêtre horaire $[r_i, d_i]$ pendant laquelle elle doit être entièrement exécutée. Donner un système linéaire de taille polynomiale en n et ne dépendant pas de m permettant de déterminer s'il est possible d'exécuter toutes les tâches. En déduire un algorithme de minimisation de la durée de l'ordonnancement.