École polytechnique — Majeure informatique
Promotion 2001

Cours de Conception et analyse d'algorithmes
PC 3 : flots et couplages

1. Plan d'évacuation

On considère un graphe non orienté $G = (V, E)$ ayant n sommets, et deux sous-ensembles Y et Z de V (non nécessairement disjoints) ; les éléments de Y sont les places et les éléments de Z les issues.

Un *plan d'évacuation* est un ensemble de chemins sommet-disjoints dans le graphe, menant d'une place à une issue. Déterminer un plan d'évacuation optimal consiste à trouver un plan d'évacuation contenant le maximum de chemins.

Un *problème de flot avec contraintes sur les sommets* est un problème de flot classique auquel on ajoute des contraintes supplémentaires : à chaque sommet i est associé un nombre s_i exprimant que la somme des flots entrants en i doit être inférieure ou égale à s_i.

a. Réduire le problème du plan d'évacuation à un problème de flot avec contraintes sur les sommets.

b. Réduire le problème de flot avec contraintes sur les sommets à un problème de flot.

c. En déduire un algorithme de recherche d'un plan d'évacuation optimal.

2. Recouvrement par des chemins

Un recouvrement d'un graphe orienté est un ensemble P de chemins sommet-disjoints tel que tout sommet soit inclus dans exactement un chemin de P. Les chemins peuvent commencer et se terminer n'importe où, et éventuellement ne contenir qu'un sommet. Un recouvrement minimal est un recouvrement par chemins contenant le moins de chemins possibles.

a. Donner un algorithme efficace dans le cas d'un graphe orienté sans circuit $G = (S, A)$. On pourra considérer le graphe $G' = (S', A')$ avec

$$\begin{aligned} S' &= \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_n\} \\ A' &= \{(x_0, x_i), i \in S\} \cup \{(y_i, y_0), i \in S\} \cup \{(x_i, y_j), (i, j) \in A\} \end{aligned}$$

b. L'algorithme fonctionne-t-il pour les graphes orientés contenant des circuits ? Pourquoi ?

3. Mariages.

Des hommes et des femmes font appel à des agences de rencontre pour se trouver un conjoint (de sexe opposé), une même personne pouvant s'inscrire dans plusieurs agences.

On suppose que chacune des agences dispose du dossier de certains des hommes et de certaines des femmes, et peut arranger un mariage entre n'importe quel homme et n'importe quelle femme présents sur sa liste. Le nombre de mariages que peut arranger l'agence i est limité à b_i.

Réduire le problème du nombre de mariages maximum à un problème de flot.

4. Résistance aux pannes.

Un paramètre représentant la résistance aux pannes d'un graphe non orienté G est le nombre minimum d'arêtes à retirer de G pour le déconnecter. Calculer ce nombre en utilisant des algorithmes de flot.

5. Car pooling.

n personnes $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ partagent leurs véhicules pour aller travailler pendant m jours. Le jour i, un sous-ensemble S_i de P utilisent un véhicule commun pour aller travailler. Le conducteur ce jour-là sera un élément de S_i. Etant donné P et $S_1, \dots S_m$, le problème est de choisir pour chaque j le conducteur du jour j de façon que la répartition soit équitable, c'est-à-dire qu'une personne i ne conduise pas plus de $\lceil \sum_{j:i \in S_j} \frac{1}{|S_j|} \rceil$ jours au total. Par exemple, s'il y a quatre personnes et deux jours $S_1 = \{p_1, p_2\}$ et $S_2 = \{p_1, p_3, p_4\}$, la personne p_1 doit conduire au maximum $\lceil 1/2 + 1/3 \rceil = 1$ des deux jours.

Modéliser ce problème comme un problème de flot maximum.

Montrer qu'il existe toujours une répartition équitable.