École polytechnique — Majeure informatique

Promotion 2001

Cours de conception et analyse d'algorithmes

Devoir 4 – NP-completude

A rendre le mercredi 18 février, en début de Petite Classe

Un *noyau* d'un graphe orienté G est un sous-ensemble K de ses sommets tel que :

- Tout sommet, ou bien est élément de K, ou bien est extrémité d'un arc issu d'un élément de K (autrement dit : $\forall v, v \in K$ ou $\exists u \in K, (u, v) \in E$).
- Deux sommets de K ne sont jamais reliés par un arc (autrement dit : $\forall u, v \in L, (u, v) \notin E$ et $(v, u) \notin E$).

Montrer que le graphe $V = \{u_1, u_2\}, E = \{(u_1, u_2), (u_2, u_1)\}$ a un noyau. Montrer que le graphe $V = \{u_1, u_2, u_3\}$, $E = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_1)\}$ n'a pas de noyau.

Montrer que le problème de décider si un graphe possède un noyau est NP-complet. (Indication : utiliser $3SAT$ et utiliser les graphes ci-dessus comme gadgets).