CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 5

G. HANROT

On va utiliser le fait que l'on sait calculer une 2-coupe minimale en temps polynomial ; on va calculer une 2-coupe minimale U_1, U_2 entre s_1 et s_2 ; supposons que s_3 soit dans le même sous-ensemble que s_1 ; on va alors chercher une 2-coupe minimale entre s_1 et s_3. Chacune de ces 2-coupes minimale étant de valeur inférieure à la 3-coupe minimale, on obtiendra par combinaison ces deux coupes une 2-approximation.

Plus formellement, notons $c(U, V)$ le nombre d'arêtes entre U et V. Étant donné deux sommets s_i et s_j, on peut calculer la valeur de la coupe minimale dans le circuit de transport construit à partir du graphe G en attribuant une capacité unitaire aux arêtes, que l'on duplique, et en prenant s_i comme source et s_j comme puits. En particulier, on peut construire une coupe (W_1, W_2) de valeur minimale C_{12} entre s_1 et s_2. D'une 3-coupe minimale (V_1, V_2, V_3) de valeur OPT$= c(V_1, V_2) + c(V_1, V_3) + c(V_2, V_3)$, on peut déduire une coupe entre s_1 et s_2, $(V_1, V_2 \cup V_3)$, de valeur $c(V_1, V_2) + c(V_1, V_3)$. En particulier, $c(V_1, V_2) + c(V_1, V_3) \geq C_{12}$.

Suppoons maintenant, sans perte de généralité, que $s_3 \in W_1$. On construit maintenant une coupe (X_1, X_2) de W_1 entre s_1 et s_3, de valeur C'_{13}. De la même façon que précédemment, $((V_1 \cup V_2) \cap W_1, V_3 \cap W_1)$ fournit une coupe de W_1 séparant s_1 et s_3, dont la valeur est au plus $c(V_1, V_3) + c(V_2, V_3)$. là encore, on montre que $c(V_1, V_3) + c(V_2, V_3) \geq C'_{13}$.

On considère maintenant les 3 ensembles X_1, X_2, W_2. Ils forment une 3-coupe de valeur $c(X_1, W_2) + c(X_2, W_2) + c(X_1, X_2) = c(W_1, W_2) + c(X_1, X_2) \leq c(V_1, V_2) + c(V_1, V_3) + c(V_1, V_3) + c(V_2, V_3) \leq 2\text{OPT}$.

La terminaison est évidente ; la complexité de cet algorithme est dominée par les deux calculs de coupe minimale (le calcul des deux réseaux de transport dans lesquels on calcule une coupe minimale sont linéaires en le nombre d'arêtes) ; par Ford-Fulkerson, le coût global est donc $O(|A|^2)$).

`3-coupure`$(G = (S, A), s_1, s_2, s_3)$
$B \leftarrow \emptyset$
Pour $\{x, y\} \in A$ faire
    $B \leftarrow B \cup \{(x, y), (y, x)\}$.
$H \leftarrow (S, B)$.
$(W_1, W_2) \leftarrow MINCUT(H, s1, s2)$
Si $s_3 \in W_1$ faire

Date: 24 mars 2004.

$(X_1, X_2) \leftarrow MINCUT((W_1, A \cap (W_1 \times W_1)), s_1, s_3)$
Renvoyer (X_1, W_2, X_2)
sinon
$(X_1, X_2) \leftarrow MINCUT((W_2, A \cap (W_2 \times W_2)), s2, s3)$
Renvoyer (W_1, X_1, X_2)
Fin.