CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 4

G. HANROT

Le graphe G_1 a pour noyau $N = \{u_1\}$ (ou, par symétrie, $\{u_2\}$; en effet, deux sommets de N ne sont reliés par aucune arête, alors que le sommet u_1 est bien dans N et que u_2 est relié au sommet u_1 de N par l'arête (u_1, u_2).

Le graphe G_2 ne peut avoir de noyau : supposons que u_1 appartienne au noyau. Alors la première partie de la définition entraîne que ni u_2, ni u_3 ne peuvent appartenir au noyau, qui est donc réduit à u_1 ; c'est impossible car l'arête (u_1, u_3) n'est pas dans le graphe. Le même raisonnement montre que u_2 et u_3 ne peuvent pas être dans le noyau, qui est donc vide, impossible.

Montrons par réduction de 3-SAT que NOYAU est NP-complet. Soit $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ une instance de 3-SAT en les variables $y_1, \ldots, y_k$, c'est-à-dire que $C_i = x_{i1} \wedge x_{i2} \wedge x_{i3}$ avec $x_{ij} \in \{y_l, \overline{y}_l, 1 \leq l \leq k\}$. On peut supposer sans perte de généralité que toutes les variables sont utilisées dans au moins une clause.

On va construire un graphe qui traduit cette instance, et qui admet un noyau si et seulement si la formule est satisfiable. Le premier type de graphe va nous permettre de traduire le fait qu'exactement une des variables $y_i, \overline{y}_i$ est vraie : on associe à chaque variable y_i deux sommets v_i et f_i, que l'on relie par deux arêtes. En particulier, si le graphe admet un noyau, il contient exactement un des sommets v_i ou f_i, pour chaque i, qui donnera la valeur de vérité de y_i.

On ajoute alors un sommet c_i par clause C_i ; ce sommet est relié par une arête aux sommets correspondant aux littéraux constituant la clause, i.e. aux v_k tels qu'il existe j avec $x_{ij} = y_k$ et aux f_l tels qu'il existe j avec $x_{ij} = \overline{y}_l$.

Le raisonnement du début montre alors que pour que le graphe admette un noyau, celui-ci doit contenir soit un des sommets correspondant aux littéraux de la clause, soit le sommet associé à la clause elle-même. Il suffit donc de forcer ce sommet à ne pas figurer dans le noyau. Pour ce faire, on construit comme c_i deux sommets d_i et e_i par clause – qui ont aussi les arêtes vers les littéraux de la clause C_i – avec les arêtes (c_i, d_i), (d_i, e_i) et (e_i, c_i).

Montrons que le graphe ainsi construit (en temps polynomial : il a un nombre $O(c + v)$ de sommets et d'arêtes, et le temps de construction est linéaire en ce nombre) admet un noyau si et seulement si la formule initiale est satisfiable.

Supposons la formule initiale satisfaite par une affectation $y_i = \mu_i$, et considérons $N = \{v_i, \mu_i = V\} \cup \{f_i, \mu_i = F\}$.

Les arêtes du graphe sont de deux types : entre deux sommets de variables, ou entre un sommet de variable et un sommet de clause. Seul le premier type peut relier deux sommets de N ; or ces arêtes sont de la forme (v_i, f_i) et (f_i, v_i), et f_i et v_i ne peuvent être simultanément dans le noyau, car μ_i ne peut être simultanément vrai et faux. La première condition est donc réalisée.

Date: 29 mars 2004.

Considérons maintenant un sommet quelconque du graphe. S'il s'agit d'un sommet de variable v_i ou f_i, on sait que soit v_i, soit f_i est dans N ; par suite, comme les deux arêtes (v_i, f_i) et (f_i, v_i) sont dans le graphe, la seconde condition est vérifiée pour ce sommet. S'il s'agit d'un sommet de clause, un des littéraux de cette clause est vrai, donc le sommet correspondant est dans N, et le sommet de clause lui est relié. La seconde condition est donc bien vérifieée pour les sommets de clause, et N est donc bien un noyau.

Inversement, supposons que le graphe admette un noyau N. Le même argument que dans le cas de G_1 montre que N contient exactement un sommet de variable par couple (v_i, f_i).

Supposons que N contienne un sommet de clause, par exemple c_i ; dans ce cas, les trois sommets correspondant aux littéraux constituant c_i ne peuvent être dans N, pas plus que le sommet e_i ; par suite le sommet d_i n'a aucune arête vers un sommet de N, impossible. Donc N ne contient aucun sommet de clause.

Posons alors $y_i = V$ si $v_i \in N$, $y_i = F$ si $f_i \in N$. Soit C_i une clause $x_{i1} \cup x_{i2} \cup x_{i3}$. Les arêtes issues du sommet c_i sont de deux types :

– une arête vers d_i

– une arête vers chaque sommet correspondant aux littéraux x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}.

On a déjà remarqué que $d_i \notin N$. Comme N est un noyau, on doit donc avoir l'un des sommets correspondant aux littéraux x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} dans N ; ce littéral est donc vrai dans l'affectation construite, et C_i est donc vraie. Notons que comme toutes les variables sont utilisées par hypothèse dans au moins une clause, on a bien choisi une valeur de vérité pour chaque variable. On a donc construit une affectation qui satisfait C_i pour tout i, donc C est satisfaisable.

On a donc bien réduit polynomialement 3-SAT à NOYAU. En outre, la donnée d'un noyau est un certificat de taille polynomiale, et la vérification naïve des deux conditions coûte au plus $O(as^2 + as)$, qui est polynomiale ; NOYAU est donc dans NP, et il est donc NP-complet.