CORRIGÉ DU DEVOIR À LA MAISON 3

G. HANROT

Soit x_i le nombre de jours travaillés dans la mine i, pour $i = 1, 2$. Les contraintes sont alors $6x_1 + x_2 \geq 12$, $3x_1 + x_2 \geq 8$, $4x_1 + 6x_2 \geq 24$, $0 \leq x_i \leq 7$, et la fonction d'objectif est $\min 10000(18x_1 + 16x_2)$, d'où le programme linéaire

$$\left\{\begin{array}{c} \min 10000(18x_1 + 16x_2) \\ 6x_1 + x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ 0 \leq x_i \leq 7 \end{array}\right.$$

On calcule facilement les sommets du polyèdre qui sont dans l'ordre $(5/6, 7)$, $(4/3, 4)$, $(12/7, 20/7)$, $(0, 6)$, $(0, 7)$, $(7, 7)$. Si on calcule le coût associé à $(12/7, 20/7)$, on trouve $5360000/7$, alors que le coût associé à ses deux voisins est 880000 et 960000, qui sont tous deux plus grands. La solution $(12/7, 20/7)$ est donc optimale.

Une autre façon de résoudre le problème consiste à construire le dual

$$\left\{\begin{array}{c} \max 12u_1 + 24u_2 + 8u_3 - 7u_4 - 7u_5 \\ -6u_1 - 4u_2 - 3u_3 + u_4 \leq -180000 \\ -u_1 - 6u_2 - u_3 + u_5 \leq -160000 \\ u_i \geq 0 \end{array}\right.$$

comme le sommet $(12/7, 20/7)$ provient de l'intersection des contraintes 2 et 3, on fait $u_1 = u_4 = u_5 = 0$, et on trouve $u_2 = 150000/7, u_3 = 220000/7$, qui conduit à une valeur de $5360000/7$. Comme la valeur de l'optimum du dual est au plus égale à celle du primal, on en déduit que l'optimum est bien $5360000/7$, et qu'il est atteint par exemple pour $x_1 = 12/7$, $x_2 = 20/7$.

Date: 24 mars 2004.