École polytechnique — Majeure informatique

Promotion 2001

**Cours de conception et analyse d'algorithmes**

Corrigé du devoir 2 – Flots

On suppose $d \geq 1$.

$|E| = \sum_{u \in L} \text{degré}(u) = d|L|$ et $|E| = \sum_{u \in R} \text{degré}(u) = d|R|$ et $d \neq 0$ donc $|L| = |R|$. Soit $n = |L|$.

Le réseau de flot associé a pour sommets $\{s,t\} \cup L \cup R$, pour arcs de capacité 1 $\{(s,u) : u \in L\} \cup \{(v,t) : v \in R\}$ et pour arcs de capacité infinie $\{(u,v) \in E\}$. La coupe $(\{s\}, L \cup R \cup \{t\})$ a capacité $n$, donc la coupe minimale a capacité au plus $n$.

Notons par $E(X,Y)$ l'ensemble des arcs entre deux ensembles de sommets $X$ et $Y$.

Soit $C$ une coupe minimale, $C_L = C \cap L$, $C_R = C \cap R$. Puisque les arcs de capacité infinie ne peuvent être comptés dans la coupe, on a pour tout arc $(u,v) \in E$ :

$$u \in C_L \Longrightarrow v \in C_R$$

et donc $E(C_L, C_R)$ contient tous les $d|C_L|$ arcs qui quittent $C_L$.

De plus, le nombre d'arcs ayant leur extrémité dans $C_R$ est $|E(L, C_R)| = d|C_R|$ puisque ces sommets ont degré $d$, et satisfait $|E(L, C_R)| \geq |E(C_L, C_R)| = d|C_L|$, donc $|C_R| \geq |C_L|$.

La valeur de la coupe est : $|L \setminus C_L| + |C_R| = n + |C_R| - |C_L| \geq n$.

Donc la coupe minimale a capacité exactement $n$, et donc le flot maximal a valeur $n$. On a vu en cours que cela signifiait que le couplage maximum avait valeur $n$.