Théorie des jeux

Deux choix (*stratégies pures*) possibles. Gain pour chaque joueur:

	foot	basket
foot	2,1	0,0
basket	0,0	1,2

Stabilité. Si le joueur 1 choisit la stratégie s_1 et le joueur 2 la stratégie s_2, on a un *équilibre de Nash* si aucun des deux joueurs ne souhaite changer son choix: pour tout i, le gain pour le joueur i s'il choisit s'_i et que les autres joueurs gardent leurs stratégies est inférieur ou égal à son gain pour la stratégie s_i.
Ici: deux équilibres de Nash, (foot,foot) et (basket,basket).

Jeu de pile ou face

Le premier joueur donne 1 euro au deuxième joueur si l'un d'eux dit "pile" et l'autre "face".

	pile	face
pile	-1,1	$1,-1$
face	$1,-1$	$-1,1$

Il n'y a pas de choix de stratégies pures qui donne un équilibre de Nash.

Jeu de coordination

Soit les deux joueurs décident de coopérer (C), soit ils se résignent à un pis-aller (D).

	C	D
C	$2,2$	$0,0$
D	$0,0$	$1,1$

Il y a deux choix de stratégies pures qui donnent un équilibre de Nash: (C,C) et (D,D). Le premier est plus intéressant, mais si les joueurs sont dans le deuxième équilibre, aucun des deux n'a individuellement de raisons de changer de stratégie.

Dilemne du prisonnier

Soit les deux prisonnierss résistent aux interrogatoires et proclament leur innocence, soit ils craquent et avouent à la police.

	C	A
C	$3,3$	$0,4$
A	$4,0$	$1,1$

Il y a un seul choix de stratégie pure qui donne un équilibre de Nash: (A,A). Et pourtant les prisonniers auraient intérêt à ne rien avouer !

Valeur sociale et équité

Valeur sociale d'une solution: somme des gains des joueurs. A maximiser.

Equité : Maximiser le gain minimum.
Questions: Y a-t-il un équilibre de Nash pur? Est-il unique? Trouver un équilibre de Nash maximisant la valeur sociale, ou analyser sa valeur sociale ou son équité.

Equilibrage de charges

m serveurs (de pages Web), n tâches (requêtes de pages Web). La tâche j fait une requête de taille p_j qui peut être satisfaite par un sous-ensemble S_j des serveurs. Les requêtes sont les joueurs. But: assigner les tâches aux serveurs.

La charge du serveur i est la somme des p_j des tâches qui lui sont confiées.

$r_i(x)$: temps de réponse du serveur i si sa charge est x.

Théorème: Si r_i est positif et croissant, alors il y a un équilibre de Nash pur.

Preuve

Amélioration locale: le pire temp de réponse va décroître ou rester le même et le deuxième décroît ou...

Corollaire

Soit $C_{\min}$ une assignation minimisant le temps de réponse maximum (équité). Il existe un équilibre de Nash réalisant $C_{\min}$.
preuve: Amélioration locale en partant de cette assignation.

Pire équilibre de Nash

Théorème: Supposons $r_i(x) = x$ (temps de réponse proportionnel à la charge). Le pire équilibre de Nash a temps de réponse maximal au plus $2 \cdot C_{\min}$.

Preuve: Soit L_i la charge du serveur i le plus chargé. Soit j une tâche de i. Par la propriété d'équilibre, $L_k + p_j \geq L_i$ pour tout $k \neq i$. En sommant:

$$L_i \leq p_j + \frac{1}{m} \sum_k L_k = p_j + \frac{1}{m} \sum_h p_h.$$

Pour une assignation optimale L'_i on a: $C_{\min} = \max_i L'_i \geq p_j$, et aussi $C_{\min} \geq \sum_k L'_k / m = \sum_h p_h / m$. D'où:

$$L_i \leq 2 C_{\min}.$$

Equilibrage de charge: coût social

Coût social ici: $\sum_j r_i(L_i)$ où j est assigné au serveur i de charge L_i. un joueur égoïste peut aller sur une machine rapide et améliorer son temps de réponse tout en empirant largement les temps de réponse des nombreuses autres tâches déjà sur ce serveur...

Supposons $\forall j \; p_j = 1$. Alirs L_i est le nombre de tâches assignées au serveur i, et le coût social est $\sum_i L_i r_i(L_i)$.

Fonction potentielle: Soit $\Phi(M) = \sum_i \sum_{k=1}^{L_i} r_i(k)$ pour une assignation M.

Lemme

Soit M une assignation. Soit M' obtenu en faisant passer la tâche j du serveur i au serveur k. Alors:

$$\Phi(M) - \Phi(M') = r_i(L_i) - r_k(L_k + 1).$$

Corollaire: Si M minimise $\Phi(M)$ alors M est un équilibre de Nash.

Théorème

Si $r_i(x) = x$, alors il existe un équilibre de Nash de coût social au plus double du minimum atteignable sur toutes les assignations.

Preuve: Soit M minimisant ϕ. M est un équilibre de Nash. Soit M' l'assignation de coût social $C(M')$ minimum. On a: $\Phi(M) \leq \Phi(M')$. Mais

$$C(M) = \sum_i L_i^2 \leq 2 \sum_i \sum_{k=1}^{L_i} k = 2\Phi(M)$$

et

$$\Phi(M') = \sum_i \sum_{k=1}^{L'_i} k \leq \sum_i {L'_i}^2 = C(M').$$

Stratégie mixte

Distribution sur les stratégies pures possibles. Jeu de pile ou face: si les joueurs adoptent la stratégie mixte suivante:

- Avec proba 1/2, dire pile
- Avec probab 1/2, dire face

alors, étant donné la stratégie du joueur 1, le joueur 2 a gain moyen 0 et aucune autre stratégie mixte (ou pure) ne peut lui donner plus: c'est un **équilibre mixte.**

Théorème

Jeu à deux joueurs: il existe toujours un équilibre de Nash mixte.