Programmation linéaire

Problème concret

Un magasin dispose de 24 exemplaires d'un objet A et 84 exemplaires d'un objet B. Les clients achètent, ou bien un lot à 6 euros comprenant 2 exemplaires de A et 4 exemplaires de B, ou bien un lot à 8 euros comprenant 2 exemplaires de A et 8 exemplaires de B. Comment former les lots pour que le magasin réalise une recette maximale ?

Modélisation mathématique

x_1 : nombre de lots du premier type,
x_2 : nombre de lots du deuxième type.

Interprétation géométrique

Programme linéaire

Soit A une matrice $m \times n$ de réels, b et c deux vecteurs de réels de tailles m et n respectivement. Trouver des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (les variables) qui réalisent :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{(la fonction économique)}$$

tout en respectant :

$$\forall i, \quad \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j \ \leq b_i \quad \text{(les contraintes)}$$

Remarque : max ou min; $\leq$ ou $\geq$ ou $=$, peu importe.

Interprétation économique

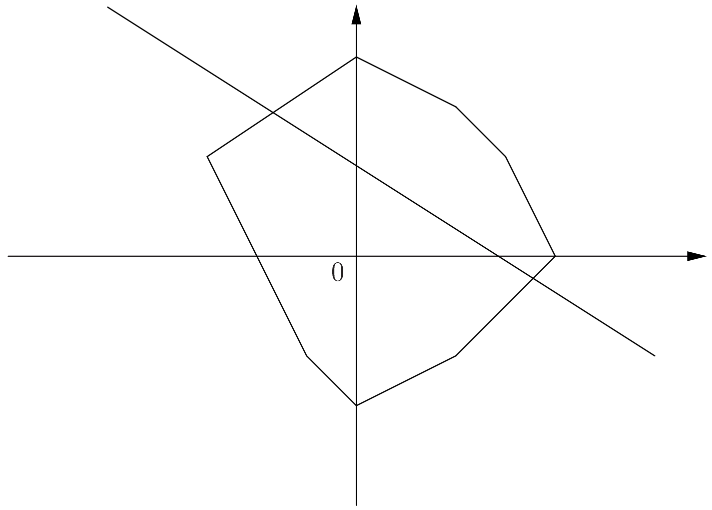
- x_j : nombre de produits finis de type j fabriqués
- c_j : bénéfice réalisé par produit fini de type j
- $a_{i,j}$: quantité de matière première de type i nécessaire pour fabriquer un produit de type j
- b_i : quantité de matière première de type i disponible

Types de situations possibles

1. Les contraintes sont impossibles à satisfaire
2. Le maximum est infini
3. Le maximum est fini et atteint par plusieurs x
4. Le maximum est fini et atteint par un x unique

Observations géométriques

- Les contraintes définissent un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$
- Un sommet du polyèdre est l'intersection de n hyperplans
- Si le polyèdre est borné, alors il existe un sommet qui réalise l'optimum
- Un sommet réalise l'optimum si et seulement si ses voisins ont une valeur plus faible



Algorithme du Simplexe

Initialisation : soit P un sommet du polytope

Boucle : Tant qu'il existe un voisin Q de P qui améliore la fonction économique, faire $P \leftarrow Q$

sommet $\longleftrightarrow$ n contraintes libres : lignes I de A

sommet adjacent $\longleftrightarrow$ contraintes : lignes $I - \{h\} + \{s\}$

Exemple détaillé

sommet : intersection de deux des droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $2x_1 + 2x_2 = 24$, $4x_1 + 8x_2 = 84$.

Nouvelles variables :

$$\max 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + t_1 & = & 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + t_2 & = & 84 \\ x_1, x_2, t_1, t_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

sommet : au moins 2 des variables x_1, x_2, t_1, t_2 sont nulles.

Initialisation : $x_1 = x_2 = 0$. Valeur 0. On a $t_1 = 24, t_2 = 84$.

Première étape

$$\max 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} t_1 & = & 24 - 2x_1 - 2x_2 \\ t_2 & = & 84 - 4x_1 - 8x_2 \end{cases}$$

8 **est positif** $\Rightarrow$ si on augmente x_2 tout en laissant $x_1 = 0$, la fonction économique devient meilleure.

Jusqu'où ? t_1 devient nul à $x_2 = 24/2 = 12$, et t_2 devient nul à $84/8 = 10.5$, donc on peut augmenter x_2 jusqu'à 10.5.

Nouveau sommet : $x_1 = 0, x_2 = 10.5, t_1 = 3, t_2 = 0$, valeur 84.

Deuxième étape

On réécrit la fonction économique comme fonction de x_1, t_2 et les contraintes d'égalité en exprimant x_2, t_1 en fonction de x_1, t_2.

$$\max 84 + 2x_1 - t_2$$

$$\begin{cases} x_2 & = & 10.5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{8}t_2 \\ t_1 & = & 3 - x_1 + \frac{1}{4}t_2 \end{cases}$$

2 **est positif** $\Rightarrow$ si on augmente x_1 tout en laissant $t_2 = 0$, la fonction économique devient meilleure.

Jusqu'où ? x_2 devient nul à $x_1 = 21$, et t_1 devient nul à $x_1 = 3$, donc on peut augmenter x_1 jusqu'à 3.

Nouveau sommet : $x_1 = 3, x_2 = 9, t_1 = 0, t_2 = 0$, valeur 90.

Troisième étape

On réécrit la fonction économique comme fonction de t_1, t_2.

$$\max 90 - 2t_1 - \frac{1}{2}t_2$$

Coefficients négatifs : on ne peut augmenter ni t_1, ni t_2. Le sommet satisfait deux contraintes, aucune des deux arêtes associées ne peut augmenter la fonction économique : on est donc à l'optimum.

Résultat : $x_1 = 3, x_2 = 9$, valeur 90.

Interprétation géométrique : chemin le long des sommets et arêtes du polytope ; algorithme de type glouton.

Difficultés de l'algorithme

Initialisation : Trouver un premier sommet s'il existe ?

Si $b \geq 0$, $x = 0$ satisfait $Ax \leq b$ et $x \geq 0$.

Si $b_i \leq 0$, on crée un nouveau programme linéaire comme suit: on crée une nouvelle variable $y \geq 0$, et pour chaque i tel que $b_i < 0$, on remplace la contrainte

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$

par

$$\sum_j a_{ij} xj - y \leq b_i$$

et la fonction économique par $\min y$. On résoud ce nouveau programme linéaire par l'algorithme du simplexe avec pour solution initiale $x = 0$, $y = \max_i(-b_i)$. Si l'optimum est 0, on peut en déduire un premier sommet.

Difficultés de l'algorithme

Et si le maximum est infini ?

Présence d'un sommet P et d'une arête semi-infinie adjacente à P permettant d'augmenter la fonction économique.

Difficultés de l'algorithme

Et si on cycle ?

Possible dans les cas dégénérés : si un sommet satisfait plus de n contraintes avec égalité.

L'algorithme du simplexe a complexité exponentielle

On montre que le système suivant à n variables donne lieu à un nombre d'étapes voisin de 2^n :

$$\max \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$$

$$(2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j) + x_i \leq 100^{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Dualité

Programme linéaire P

$$\max 4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 & \leq & 10 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{cases}$$

Comment déduire d'autres contraintes ? Multiplions la i-ième contrainte par $u_i \geq 0$: on en déduit

$$u_1x_1 + u_2x_2 + (u_1 + 2u_2)x_3 + (2u_1 + u_2)x_4 \leq 10u_1 + 4u_2.$$

Si les coefficients de x_1, x_2, x_3, x_4 sont supérieurs ou égaux à $4, 6, 20, 17$ respectivement, **alors** évidemment $10u_1 + 4u_2$ est une borne supérieure aux valeurs possibles de la fonction économique.

Nouveau programme linéaire D

$$\min 10u_1 + 4u_2$$

$$\begin{cases} u_1 & \geq & 4 \\ u_2 & \geq & 6 \\ u_1 + 2u_2 & \geq & 20 \\ u_1 + u_2 & \geq & 17 \\ u_1, u_2 & \geq & 0. \end{cases}$$

Par construction de D, pour tout u satisfaisant aux contraintes de D et tout x satisfaisant aux contraintes de P, on a

$$4x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 17x_4 \leq 10u_1 + 4u_2,$$

et donc $\mathrm{OPT}_P \leq \mathrm{OPT}_D$; par conséquent, si de plus on a égalité, alors x est solution optimale de P et u est solution optimale de D.

Théorème de dualité

Si l'un des deux problèmes suivants

$$(\mathcal{P}) \quad \max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$
$$(\mathcal{D}) \quad \min\{bu \mid u \geq 0, A^Tu \geq c\}$$

admet une solution finie, alors il en est de même pour l'autre et leurs valeurs sont égales.

Preuve : interprétation géométrique du dual

Combinaison linéaire positive de contraintes $\iff$ nouvelle contrainte passant par le même sommet.

si x_0 sommet optimal, alors cx_0 est la valeur optimale du programme P ; il existe une combinaison linéaire des contraintes donnant une contrainte de la forme $cx \leq cx_0$, d'où cx_0 réalisable dans le dual et donc cx_0 valeur optimale pour D.

Interprétation économique du dual

Si on augmente la quantité de matière première d'une valeur marginale

$$b_i \leftarrow b_i + \epsilon_i,$$

alors l'augmentation du gain est $y_i t_i$, où y_i est la valeur qui rend optimum le problème dual.

Méthode de l'ellipsoïde

1. Réduction à la résolution de systèmes d'inéquations linéaires.

Si on sait résoudre les systèmes d'inéquations linéaires en temps polynomial, alors on sait résoudre un programme linéaire en temps polynomial.

$$\left\{\begin{array}{l} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} \min bu \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} Ax \leq b \\ A^T u \geq c \\ x, u \geq 0 \\ cx \geq bu \end{array}\right.$$

2. Résoudre un système d'inéquations.

Soit D le nombre total de bits dans l'écriture des $a_{i,j}$ et des b_i en binaire. Si le système $Ax < b$ admet une solution, alors il en existe une telle que

$$\forall j, \quad -2^D \leq x_j \leq 2^D.$$

D'autre part, le volume du polyèdre est $\geq 2^{-(n+1)D}$.

Un **ellipsoïde** E de centre c est défini par $(x-c)^t A^t A(x-c) \leq 1$. Un demi-ellipsoïde s'obtient en intersectant E avec un demi-espace limité par un hyperplan qui passant par c : $hx \geq hc$. Tout demi-ellipsoïde est contenu dans un ellipsoïde E' tel que

$$\mathrm{Vol}(E') \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}} \mathrm{Vol}(E).$$

Principe de l'algorithme de l'ellipsoïde

Initialisation : $E \leftarrow$ la sphère $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n4^D$.

Boucle : Tant que $c_E \notin P$ et $\mathrm{Vol}(E) \geq 2^{-(n+1)D}$, faire :

- Soit h une contrainte non satisfaite par c_E ; intersecter E avec le demi-espace défini par la contrainte $\Rightarrow D$.
- Remplacer E par l'ellipsoïde E' contenant D

Sortie : si $c_E \in P$, c'est une solution ; sinon, il n'y en a pas

Complexité : polynomiale.