UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2007-08**
L.2 - M.A.S.S - Algèbre S3
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Réduction d'endomorphismes, trigonalisation.

Exercice 1. Trigonalisation.
Trigonliser dans $\mathbb{C}$ les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-i & i & 1 \\ i-1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Trigonalisation sans calcul
Soit $A \in \mathfrak{M}_8(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est égal à,

$$P_A = (x-7)^4(1+x)^3(x)$$

1. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que tous les sous-espaces propres de A sont de dimension 1. Soit $\mathcal{B}_T$ une base de trigonalisation par blocs de A. Et soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_T$. Donner l'allure de la matrice $P^{-1}AP$. (Indiquer les coefficients nuls, ceux dont on peut connaitre la valeur sans faire de calculs et mettre des "?" pour ceux que l'on ne peut pas déterminer sans faire de calcul).

Exercice 3. Matrice dépendant de paramètres.
Soient a, b et c des nombres complexes quelconques. Soit A la matrice triangulaire supérieure suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs des paramètres a, b et c, la matrice A est-elle digonalisable ?

Exercice 4. Diagonalisation par blocs
1. Soient a et b deux nombres réels avec $b \neq 0$. Montrer que la matrice suivante est diagonalisable dans $\mathbb{C}$,

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2. À quelle matrice diagonale complexe est-elle semblable ?
3. En déduire qu'une matrice réelle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ est semblable à une matrice **réelle** de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} D & & & & \\ & S_1 & & (0) & \\ & & S_2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & S_p \end{pmatrix}$$

Où les blocs D, S_1, …, S_p sont des blocs carrés centrés sur la diagonale de B. De plus, D est une matrice diagonale et les S_i sont des blocs 2×2 de la forme,

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Endomorphismes nilpotents.

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que,

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}} = 0$$

1. Au vu d'une telle définition, en déduire la définition de matrice nilpotente.
2. Soit f un endomorphisme nilpotent, et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$, montrer que pour tout $j \geq k$, $f^j = 0$.

   Désormais on appelera indice (ou indice de nilpotence) de f le plus petit entier non nul k tel que $f^k = 0$. Par exemple, la matrice nulle est nilpotente d'indice 1. Le but de l'exercice est de montrer que l'indice d'un endomorphisme nilpotent est toujours inférieur à n.
3. Montrer que 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent. En déduire qu'un endomorphisme de E nilpotent est toujours trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. Soit f un endomorphisme nilpotent et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de trigonalisation de f. Montrer que,

$$\forall p \in \{1, \ldots, n\}, \; f(e_p) \in \text{Vect}\{e_1, \ldots, e_{p-1}\}$$

5. En déduire que pour tout $x \in E$, $f^n(x) = 0$.
6. Conclure.
7. Donner un exmple de matrice nilpotente d'indice n.