Deuxième contrôle de connaissances. (Solutions)

Exercice 1. Vrai ou Faux ?

1. Vrai (c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)
2. Faux (Par contre c'est vrai dans $\mathbb{C}$)
3. Vrai (c.f. cours)
4. Faux (le rang d'une forme quadratique réelle est égal à la somme des deux termes de sa signature.)

Exercice 2. Etude d'une forme quadratique complexe.

1. Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 6-8i & 0 & 0 \\ 6-8i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & -50 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le procédé de réduction de Gauss permet d'obtenir le résultat suivant,

$$q = (3-4i)({x'}^2 - {y'}^2) - 25({z'}^2 - {t'}^2), \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & x-y \\ z' & = & z+t \\ t' & = & z-t \end{array} \right.$$

On en déduit que q est de rang 4.

3. Notons $\mathcal{B}_o$ la base orthonormale recherchée. Le résultat de la question précédente permet d'obtenir la matrice de passage,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_o \to \mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{on en déduit,} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}_o} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathcal{B}_o = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_o}(q) = \begin{pmatrix} 3-4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3+4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

4. Le calcul des racines carrées $3-4i$ donne $2-i$ et $-2+i$. On en choisit une, par exemple $2-i$. Et,

$$q = {x''}^2 + {y''}^2 + {z''}^2 + {t''}^2, \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x'' & = & (2-i)x' \\ y'' & = & i(2-i)y' = (1+2i)y' \\ z'' & = & 5iz' \\ t'' & = & 5t' \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{B}_s$ la base de Sylvester complexe. On calcule alors,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_o \to \mathcal{B}_s} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on en déduit,} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}_s} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2+i & 1-2i & 0 & 0 \\ 2+i & -1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathcal{B}_s = \left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2+i \\ 2+i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1-2i \\ -1+2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}, \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_s}(q) = I_4$$

Exercice 3. Trigonalisation sans calcul

1. Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, la matrice A est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Trigonalisation, avec des calculs cette fois ci.

1. $P_A(x) = (1-x)^2(3-x)$, les valeurs propres de A sont $1, 1$ et 3.
2. Sous-espaces propres de f.
$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
3. f n'est pas diagonalisable car 1 est valeur propre de multiplicité 2 et que sons sous-espace propre associé est de dimension 1. Par contre comme son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, f est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. Prenons,
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On cherche v_2 tel que, $Av_2 = v_1 + v_2$, on résout alors le système,
$$\begin{cases} 2x + y - z & = & x \\ -x + 4y - 3z & = & 1 + y \\ -2x + 2y - z & = & 1 + z \end{cases}$$
On obtient une unique solution qui est le vecteur,
$$v_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La base (v_1, v_2, v_3) est la base $\mathcal{B}_T$ recherchée.
5. $T = P^{-1}AP$
6. Il suffit de faire le calcul. On remarque au passage que $DN = ND = N$
7. On remarque que $T = D + N$ et comme D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton à T et,
$$T^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$$
Or comme $N^2 = 0$, la tous les termes de cette somme sont nuls sauf les deux premiers et on rappelle que $C_n^0 = 1$ et $C_n^1 = n$. On peut alors écrire.
$$T^n = D^n + nND^{n-1} = D^n + nN = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
Remarque : La seconde égalité est due au fait que $ND = N$ que l'on applique $n-1$ fois.
8. On utilise $A^n = PT^nP^{-1}$.

Questions bonus (Hors Barème).

10. (a) Si $g(v_3)$ est nul il appartient alors évidemment à $\text{Vect}\{v_3\}$. Sinon,
$$f(g(v_3)) = g(f(v_3)) = g(3v_3) = 3g(v_3)$$
Donc $g(v_3)$ est un vecteur propre de f associé à 3. Il appartient donc à $E_3 = \text{Vect}\{v_3\}$.

(b) Si $g(v_1)$ est nul il appartient alors évidemment à $\text{Vect}\{v_1\}$. Sinon,

$$f(g(v_1)) = g(f(v_1)) = g(v_1) = g(v_1)$$

Donc $g(v_1)$ est un vecteur propre de f associé à 1. Il appartient donc à $E_1 = \text{Vect}\{v_1\}$.

(c) Décomposons $g(v_2)$ dans la base $\mathcal{B}_T$, $g(v_2) = av_1 + bv_2 + cv_3$.

$$\begin{aligned} f(g(v_2)) &= af(v_1) + bf(v_2) + cf(v_3) && (1) \\ &= av_1 + b(v_1 + v_2) + 3cv_3 && (2) \\ &= (a+b)v_1 + bv_2 + 3cv_3 && (3) \end{aligned}$$

Puis on utilise le fait que $f \circ g = g \circ f$

$$\begin{aligned} g(f(v_2)) &= g(v_1 + v_2) && (4) \\ &= (a+1)v_1 + bv_2 + cv_3 && (5) \end{aligned}$$

Or la décomposition d'un vecteur dans une base étant unique, on en déduit de 3 et 5, que $c = 3c$ donc $c = 0$ et $g(v_2) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}$

11. La forme de la matrice est due aux résultats de la question précédente et la condition sur les coefficients a, b et c est la conséquence du fait que g commute avec f donc leurs matrices respectives dans $\mathcal{B}_T$ aussi.
12. La condition

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

est équivalente à,

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b = b+c \quad \Leftrightarrow \quad a = c$$

Le commutant de f est isomorphe à l'espace des matrices carrées de la forme,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

qui est de dimension 3.