UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2007-08**
L.2 - M.A.S.S - Algèbre S3
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Réduction d'endomorphismes, trigonalisation. (Solutions)

Exercice 1. Trigonalisation.

1. La matrice A a pour polynôme caractéristique $(1-X)^3$. Son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, elle est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc 1 pour valeur propre de multiplicité 3. Si on calcule le sous-espace propre associé E_1, on trouve,

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

On trouve donc que E_1 est de dimension 2. Ici, il n'y a qu'une seule valeur propre, il n'y a pas à chercher à trigonaliser par blocs, donc on se contente de compléter la base de E_1 en une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple avec le vecteur $v_3 = (0,0,1)$. Si on calcule Av_3, on trouve

$$Av_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3 - v_2 + v_1$$

Où v_1 et v_2 désignent les vecteurs de la base de E_1 que l'on a décrite ci-dessus.
Par conséquent soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a alors,} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice B a pour polynôme caractéristique $(1-X)(i-X)^2$. Son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$ (ce qui est en fait le cas de tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$), elle est donc trigonalisable dans $\mathbb{C}$. Elle admet 1 pour valeur propre de multiplicité 1 le sous-espace propre associé sera donc nécessairement de dimension 1 (pourquoi ?). De plus elle admet i pour valeur propre de multiplicité 2. Si on calcule les sous-espaces propres associés E_1, on trouve,

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad E_i = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{on note,} \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bref on perd tout espoir de pouvoir la diagonaliser car $\dim E_i = 1$ et $m_i = 2$ (m_i désignant biensur la multiplicité de i). Par contre on peut la trigonliser par blocs avec un bloc de taille 1 pour la valeur propre 1 et un bloc de taille 2 pour i. C'est à dire que le théorème de trigonalisation par blocs du cours dit que l'on peut complèter (u,v) en une base (u,v,w) telle que si P est la matrice de passage de la base cannonique vers la base (u,v,w), alors,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & \alpha \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Où α est un nombre réel **non nul** à déterminer (il ne peut être nul car sinon B serait diagonalisable). **Attention !** α n'est pas unique, il y a plusieurs façon de choisir w et α.
On cherche donc à complèter (u,v) avec un vecteur w tel que $Bw = iw + \alpha v$, α étant un scalaire **non nul** à déterminer (sans doute faudra-t-il prendre des "initiatives"). Si on note x, y et z les coordonnées du vecteur w que l'on cherche, on doit alors résoudre le système à trois équations et 4 inconnues suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & ix \\ (2-i)x & + & iy & + & z & = & iy+\alpha \\ (-1+i)x & & & + & iz & = & iz \end{array}\right.$$

Un peu de calcul permet de se ramener à une seule équation, à savoir $z = \alpha$. Une des (nombreuses) solutions possibles est $\alpha = 1$ et $w = (0, 0, 1)$

Par conséquent soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a alors,} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

3. La matrice C a pour polynôme caractéristique $(-X)^3$. Son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, elle est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc 0 pour valeur propre de multiplicité 3. Si on calcule le sous-espace propre associé E_0, on trouve,

$$E_0 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{on note} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ici encore la matrice n'est pas digonalisable. On cherche donc à compléter (u) en une base (u, v, w) de E telle que $Cv = 0.v + \alpha u = \alpha u$ où α est un réel **non nul** à déterminer et $Cw = 0.w + \lambda u + \mu v$, où λ et μ sont deux réels non tous deux nuls à déterminer.

On commence donc par chercher un vecteur v tel que $Cv = \alpha u$. On résout un système, une des nombreuses solutions possibles est $\alpha = 1$ et $v = (0, -1, 1)$. On cherche ensuite w tel que $Cw = \lambda u + \mu v$. Et (après résolution d'un système), on trouve que $\lambda = 0$, $\mu = 1$ et $w = (1, 1, -2)$ font très bien l'affaire.

Par conséquent soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{on a alors,} \quad P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour ce qui est de la recherche de w, n'importe quel vecteur complétant (u, v) en une base aurait fait l'affaire, en effet, si on complète (u, v) de n'importe quelle façon en une base de $\mathbb{R}^3$, et qu'on exprime l'endomorphisme associé à C dans cette nouvelle base, on obtiendra une matrice triangulaire supérieure T. Les deux premiers coefficients diagonaux de cette matrice seront nuls et comme la trace de C est nulle, il en est de même pour toute matrice semblable à C et donc tous les coefficients diagonaux de T seront nuls.

4. La matrice D a pour polynôme caractéristique $(1 - X)(2 - X)^2$. Son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, elle est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle admet 1 et 2 pour valeurs propres de multiplicité respectives 1 et 2 . Si on calcule les sous-espaces propres associés E_1 et 2_2, on trouve,

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Ici encore c'est la dimension de E_2 qui représente une obstruction à la diagonalisabilité. On peut quand même trigonaliser par blocs (c'est la même méthode que pour la matrice B). Soit P la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a alors,} \quad P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. La matrice E a pour polynôme caractéristique $(1 - X)(X^2 + 1)$. Son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, elle n'est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Par contre dans $\mathbb{C}$, son polynôme caractéristique est égal à $(1 - X)(i - X)(-i - X)$, il est donc scindé à racines simples, la matrice E est donc diagonalisable dans C.

Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1-i & -1+i & 1 \\ 1+i & 1-i & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{on a alors,} \quad P^{-1}EP = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. La matrice F a pour polynôme caractéristique $(1-X)(2-X)(3-X)$. Son polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Soit P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a alors,} \quad P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} 0$$

Exercice 2. Trigonalisation sans calcul

1. Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, la matrice A est donc trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Matrice dépendant de paramètres.

On distingue deux cas $c = 1$ et $c \neq 1$.

- Si $c = 1$. Alors le polynôme caractéristique de A est $(1-X)^3$, donc si elle est diagonalisable, elle est semblable à I_3 ce qui est impossible car I_3 est la seule matrice semblable à I_3 or quelque soit la valeur de a et b, A ne peut être égale à à I_3 car le coefficient $a_{1,3}$ est égal à 1.
- Si $c \neq 1$ alors A a deux valeurs propres distinctes qui sont 1 et c. Leurs multiplicités respectives sont 2 et 1, donc on sait déjà que E_c est de dimension 1, la matrice A est diagonalisable si et seulement si E_1 est de dimension 2. On étudie alors le système suivant,

$$AX = X \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & x \\ y + bz & = & y \\ cz & = & z \ (\Rightarrow \ z = 0 \text{ car } c \neq 0) \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} ay & = & 0 \\ y & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans ce denier système, la seconde ligne est inutile. Si $a \neq 0$, on a un système homogène de deux équations à trois inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est donc un espace vectoriel de dimension 1, qui est engendré par le vecteur $(1,0,0)$. (En terme d'échelonnement de système, on voit qu'on ne peut prendre d'initiative que sur le choix de la variable x). Donc si $a \neq 0$, alors A n'est pas trigonalisable.
Si maintenant $a = 0$, le système d'équations se réduit alors à une unique équation $z = 0$, l'espace des solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Et A est alors diagonalisable.

Conclusion On a montré que,

- $c = 1 \ \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.
- $c \neq 1$ et $a \neq 0 \ \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.
- $c \neq 1$ et $a = 0 \ \Rightarrow A$ est diagonalisable.

On en conclut que A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$.

Exercice 4. Diagonalisation par blocs

1. On calcule le polynôme caractéristique de S on trouve,

$$P_S(x) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = -4b^2$ qui est non nul puisque b est supposé non nul. Par conséquent, P_S est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc S est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. Les valeurs propres de S sont $a+ib$ et $a-ib$, A est donc semblable à,

$$\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

3. Soit M une matrice réelle diagonalisable dans $\mathbb{C}$, elle est semblable à une matrice diagonale D_0 dont les coefficients diagonaux sont : $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_p, \overline{\mu_p}$. Où les λ_i sont les valeurs propres réelles et les μ_i les valeurs propres complexes. On rappelle au passage que si μ est une valeur propre complexe d'une matrice réelle, alors $\overline{\mu}$ est une valeur propre de même multiplicité et que les espaces propres E_μ et $E_{\overline{\mu}}$ sont de même dimension.
   Par ailleurs, notons $\mu_j = a_j + ib_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ considérons la matrice,

$$A_j = \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & \overline{\mu_j} \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est semblable (d'après la question **??**) à la matrice S_j de l'énoncé. Soit P_j la matrice telle que $P_j^{-1} A_j P = S_j$ et soit $\mathcal{P}$ la matrice définie par blocs,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_k & (0) & & & \\ & P_1 & & (0) & \\ & & P_2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & P_p \end{pmatrix}$$

   Alors $\mathcal{P}$ est inversible (on peut même l'inverser bloc par bloc) et $\mathcal{P} D_0 \mathcal{P}^{-1} = B$ (on fait les produits par blocs).

Exercice 5. Endomorphismes nilpotents.

1. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$.
2. Si $j \geq k$, alors $f^j = f^{j-k} \circ f^k = f^{j-k} \circ 0 = 0$.
3. Soit λ une valeur propre de f, alors par définition, il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Par une récurrence immédiate on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p(x) = \lambda^p x$. Or comme f est nilpotente, il existe un entier k tel que $f^k = 0$, donc $\lambda^k x = 0$. Ainsi, comme x est non nul, on en déduit que $\lambda^n = 0$, donc $\lambda = 0$. Donc 0 est la seule valeur propre possible de f, son polynôme caractéristique est donc $(-X)^n$. Ainsi f est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   Les $*$ correspondant aux coefficients pouvant être non nuls. On en concult que $f(e_p)$ est bien combinaison linéaire des e_i avec $i \leq p$.
5. On remarque d'abord que $f(e_1) = 0$ (regardez la matrice ci-dessus). Ensuite, par récurrence, soit $p \geq 1$, supposons que pour tout entier $q \leq p$, $f^p(e_q) = 0$, alors comme $f(e_{p+1}) \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_p\}$, d'après l'hypothèse de récurrence, et en utilisant la linéarité de f^p, on en déduit que $f^p(f(e_{p+1})) = 0$, donc $f^{p+1}(e_{p+1}) = 0$. Ainsi, pour tout $1 \leq p \leq n$ $f^p(e_p) = 0$, donc $f^n(e_p) = 0$, et une application linéaire étant entièrement déterminée par l'images des éléments d'une base, on en déduit que $f^n = 0$
6. L'indice de nilpotence de f est inférieur ou égal à n.
7.

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   Remarque : la matrice C du premier exercice est une matrice nilpotente d'indice 3. Pour vous en convaincre, vous pouvez calculer C^2 et C^3, vous remarquerez que $C^2 \neq 0$ et $C^3 = 0$.