Contrôle de connaissances (session de remplacement)

Durée deux heures. Les documents et les calculatrices sont interdits.
Les quatre exercices sont indépendants
Bon courage.

Exercice 1. Questionnaire à choix multiples
Dans chaque question, une ou plusieurs affirmations sont justes, lesquelles ? Les justifications ne sont pas demandées. Dans tout cet exercice, n est un entier naturel supérieur à 1.

1. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est toujours,
   (a) trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
   (b) diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
   (c) trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (d) inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que 0 est valeur propre de A,
   (a) est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (b) n'est pas inversible.
   (c) admet le vecteur nul pour vecteur propre.
   (d) admet zéro pour valeur propre de son carré (i.e. 0 est valeur propre de A^2).
3. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $P_A(x) = (1-x)(1+x^2)$ est
   (a) trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (b) diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
   (c) trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
   (d) diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de polynôme caractéristique : $P_f(x) = (1-x)(1+x)^3$. Soit $\mathcal{B}$ une base de réduction de f suivant ses sous-espaces caractéristiques, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ peut être de la forme :

(a) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (c) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (d) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Réduction d'endomorphismes
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^3$. Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Soient A et B les matrices représentatives de f et g dans la base canonique :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-i & i-1 & 1 \\ 1-i & -1 & i+1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et dans $\mathbb{R}$?
   (b) La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathbb{C}$, et dans $\mathbb{R}$?
   Justifier vos réponses.
3. Calculer une base de réduction de A, c'est à dire une base de diagonalisation si A est diagonalisable, une base de réduction suivant les sous-espaces caractéristiques si A est trigonalisable.

Tournez la page s.v.p

4. Mêmes questions pour la matrice B
5. Exprimer A^n en fonction de n.

Exercice 3. Matrice dépendant de deux paramètres

Soit $M = \begin{pmatrix} 2b & b-a & 2b \\ a-b & 2a & 2a \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels quelconques.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M en fonction de a et b.
2. Montrer que M est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur le couple (a, b) pour que M soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Bonus - Hors Barème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}$ telle que : $\exists k \in \mathbb{N},\ A^k = 0$.

1. Comment appelle-t-on les matrices qui vérifient cette propriété ?
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $\lambda = 0$.
3. En déduire que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

Fin.