UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.2 - M.A.S.S - Algèbre S3
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Diagonalisation. (Solutions)

Exercice 1. Activité A.

1. Le polynôme caractéristique de P est $\mathcal{P}_P(X) = X(X-1)$. Il est scindé à racines simples, donc P est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Les valeurs propres de P sont 0 et 1, on note e_0 et e_1 les vecteurs propres associés,
$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
La famille $\{e_0, e_1\}$ fournit une base de vecteurs propres de P
3. Soit Q, la matrice,
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors, } Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Activité B.

1. Le polynôme caractéristique de S est $\mathcal{P}_S(X) = (X-1)(X+1)$. Il est scindé à racines simples, donc S est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Les valeurs propres de S sont -1 et 1, on note e_{-1} et e_1 les vecteurs propres associés,
$$e_{-1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
La famille $\{e_{-1}, e_1\}$ fournit une base de vecteurs propres de S
3. Soit R, la matrice,
$$R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors, } R^{-1}SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Diagonalisation

1. Les valeurs propres de A sont 0, $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$. Le polynôme caractréristique de A est scindé à racines simples, la matrice A est diagonalisable. Soit P une matrice dont les colonnes fournissent une base de vecteurs propres.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
2. Les valeurs propres de B sont $2, 2$ et 1 ici le polynôme caractéristique est scindé mais ses racines ne sont pas simples (2 est de multiplicité 2). Pour savoir si B est diagonalisable il faut calculer la dimension du sous-espace propre associé à 2. Soient E_1 et E_2 les sous espaces propres associés respectivement à 1 et à 2.
$$E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad E_2 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
La dimension de E_2 est 1, elle est donc strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre 2, la matrice n'est donc pas diagonalisable.
3. C a pour unique valeur propre 1 qui est de multiplicité 3. Remarquons qu'on peut d'ores et déjà en déduire que C n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, alors C serait semblable à I_3, or une matrice semblable à I_3 est égale à I_3 (vérifiez le !). Notons E_1 le sous-espace propre associé à 1.
$$E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Les valeurs propres de la matrice D sont $-1, 3+2i\sqrt{2}$ et $3-2i\sqrt{2}$. son ploynôme caractéristique est scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable. Soit P une matrice dont les colonnes fournissent une base de vecteurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1}DP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3+2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3-2i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5. Les valeurs propres de E sont $1, 2$ et 2. On note E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés.

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

La dimension de E_2 est 1 alors que 2 est valeur propre de multiplicité 2, la matrice E n'est pas diagonalisable.

6. Les valeurs propres de F sont $7, 3$ et 3. On note E_7 et E_3 les sous-espaces propres associés,

$$E_7 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_3 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Soit P une matrice dont les colonnes fournissent une base de vecteurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Minimisons les calculs

1. C'est dans votre cours.
2. Idem.
3. Le polynôme caractéristique d'une matrice M s'écrit $\mathcal{P}(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $a_0 = det(M)$, $(-1)^{n-1}a_{n-1} = tr(M)$. C'est une conséquence directe des relations coefficients racines (on rappelle que la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres complexes comptées avec leur multiplicités).
4. On a $detM = -6$ et $trM = 5$. Les valeurs propres de M sont 1, -1, et deux autres valeurs propres a et b qu'il faut déterminer. Le déterminant est égal au produit des valeurs propres, donc $ab = 6$. La trace est égale à la somme des valeurs propres, donc $a + b = 5$. On en déduit en résolvant ces équations que les deux autres valeurs propres de M sont 2 et 3. De fait (même si ce n'était pas la question) on remarque que M est diagonalisable car elle n'a que des valeurs propres simples, ce qui est équivalent au fait que le polynôme caratéristique est scindé à racines simples.
5. Sachant que $1-i$ est une valeur propre de T, comme T est à **coefficients réels**, on en déduit que $\overline{1-i} = 1+i$ est aussi valeur propre de T. Reste à trouver deux autres valeurs propres a et b. a et b vérifient les équations $(1+i)(1-i)ab = 2ab = det(T) = 4$, donc $ab = 2$ et $(1+i)+(1-i)+a+b = tr(T) = 5$, donc $a+b = 3$. En résolvant ce système d'équations non linéaires on en déduit que 1 et 2 sont valeurs propres de T. Ici encore on peut en déduire que T est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
6. La matrice M_n est donc de rang 1, son noyau est de dimension $n-1$. Donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, mais si sa multiplicité était n, alors 0 serait la seule valeur propre et $tr(M_n) = n \times 0 = 0$, or $tr(M_n) = n$. Il y a donc une autre valeur propre qui est n. On note E_0 et E_n les sous-espaces propres asociés,

$$E_n = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad E_0 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

0 est donc de multiplicité $n-1$ et $dimE_0 = n-1$, n est de multiplicité 1 et $dimE_n = 1$, M_n est bien diagonalisable. Soit P la matrice,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1}M_nP = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Application : Etude d'une suite vectorielle.

1. A a deux valeurs propres complexes de multiplicité 2 qui sont i et $-i$. Les dimensions des sous-espaces propres associés sont égales à 2, donc la matrice A est diagonalisable. Soit,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}, \text{ alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

2. Comme $i^4 = 1$, la valeur de A^n est cyclique est dépend de la classe de congruence de n modulo 4. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ll} A^{4p} = I_4 & A^{4p+1} = A \\ A^{4p+2} = -I_4 & A^{4p+3} = -A \end{array}$$

   Remarquons ici que les calculs n'ont pas été détaillés mais que pour obtenir ce résultat il faut élever la forme diagonalisée de A à la puissance $4p+q$ puis pour revenir à A^{4p+q} il faut multiplier la matrice obtenue par P à gauche et par P^{-1} à droite. Il faut donc calculer la matrice P^{-1}.

3. La suite vectorielle est une suite périodique de période 4 pour obtenir les valeurs qu'elle prend, il suffit de faire des produits maticiels.

Exercice 6. Diagonalisation simultanée.

1. Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $x \in G_j$, c'est à dire $g(x) = \mu_j x$. Montrons que $f(x) \in G_j$, ce qui revient à montrer que $g(f(x)) = \mu_j f(x)$. Or comme f et g commutent, $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\mu_j x) = \mu_j f(x)$. c.q.f.d. Par un raisonnement analogue on démontre que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

2. C'est la question la plus compliquée, remarquons que dans le cas général, si $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ et $E = \bigoplus_{j=1}^m F_j$, il n'est pas nécessairement vrai que $E = \bigoplus_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m} E_i \cap F_j$ (pour vous en convaincre, considérez deux bases distinctes de $\mathbb{R}^2$ et écrivez $\mathbb{R}^2$ de deux façons possibles comme une somme directe de deux droites vectorielles, puis regardez les intersections). Par contre quoi qu'il arrive la somme reste directe (pourquoi ?), mais elle engendre en général un s.e.v de E. Ici c'est le statut de sous-espace stable qui va nous aider.

   Soit, $i \in \{1, \dots, p\}$, l'inclusion $\bigoplus_{j=1}^q H_{i,j} \subseteq F_i$ est vérifiée, en effet si $x \in \bigoplus_{j=1}^q H_{i,j}$, x est alors une somme d'éléments des $H_{i,j}$ (avec $j \in \{1, \dots, q\}$) qui sont tous des s.e.v. de F_i.

   Réciproquement, soit $x \in F_i$, comme $E = \bigoplus_{j=1}^n G_j$, x se décompose **de façon unique** sous la forme $x = x_{G_1} + \dots + x_{G_q}$, où $\forall j \in \{1, \dots, q\},\ x_{G_j} \in G_j$.

   Comme $x \in F_i$, $f(x) = \lambda_i x = \lambda_i x_{G_1} + \dots + \lambda_i x_{G_q} = f(x_{G_1}) + \dots + f(x_{G_q})$. Or d'après la question précédente les G_j sont stables par f, $\forall j \in \{1, \dots, q\},\ f(x_{G_j}) \in G_j$. Ainsi, par unicité de la décomposition dans la somme directe $\bigoplus G_j$, $\forall j \in \{1, \dots, q\},\ f(x_{G_j}) = \lambda_i x_{G_j}$ et donc $x_{G_j} \in F_i$. D'où le résultat.

3. (a) Montrons que si f et g commutent, alors ils sont diagonalisables dans une même base. On reprend les notations de la question précédente. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, alors $E = \bigoplus_{1\le i\le p,\ 1\le j\le q} H_{i,j}$. Si on prend comme base une réunion de bases des $H_{i,j}$, on a une base de diagonalisation commune à f et à g.

   Réciproquement, supposons que f et g sont diagonalisables dans une même base, alors dans cette base les endomorphismes f et g sont représentés par les matrices diagonales M_f et M_g. Or deux matrices diagonales commutent, donc les endomorphismes f et g commutent.

   (b) Si f et g commutent et sont diagonalisables, ils le sont dans une même base dans laquelle ils sont représentés par les matrices M_f et M_g. Et l'endomorphisme $f+g$ est représenté dans cette base par la matrice $M_f + M_g$ qui est diagonale, car la somme de deux matrices diagonales est diagonale. Donc $f+g$ est aussi diagonalisable. Ce résultat est biensûr faux si les endomorphismes ne commutent pas.