UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Formes quadratiques. (Solutions des exercices)

Exercice 1. Formes quadratiques réelles.

1. On note $\mathcal{B}_c$, la base cannonique de $\mathbb{R}^3$,

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad Mat_{\mathcal{B}_c}(q_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Mat_{\mathcal{B}_c}(q_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Quant aux formes polaires associées,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1((x,y,z),(x',y',z')) & = & xx' + yy' + zz' - 2(xy' + x'y + yz' + y'z + xz' + x'z) \\ \varphi_2((x,y,z),(x',y',z')) & = & \frac{1}{2}(xz' + x'z + yz' + y'z + xy' + x'y) \\ \varphi_3((x,y,z),(x',y',z')) & = & xx' + 4yy' + 9zz' - 2(xy' + x'y) + 3(xz' + x'z) - 5(yz' + y'z) \end{array}$$

2. En appliquant l'algorithme de Gauss, on obtient :

$$\begin{array}{rclcrcl} q_1 & = & x'^2 - 3y'^2 + 9z'^2 & \text{avec} & x' & = & x - 2y - 2z \\ & & & & y' & = & y + 2z \\ & & & & z' & = & z \\ & & & & & & \\ q_2 & = & \frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 - z^2 & \text{avec} & x' & = & x + y + 2z \\ & & & & y' & = & x - y \\ & & & & z' & = & z \\ & & & & & & \\ q_3 & = & x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z^2 & \text{avec} & x' & = & x - 2y + 3z \\ & & & & y' & = & y + z \\ & & & & z' & = & y - z \end{array}$$

3. Les trois formes sont de rang 3 (elles sont donc toutes trois non dégénérées). La signature de q_1 est $(2,1)$, celle de q_2 est $(1,2)$ et celle de q_3 est $(2,1)$.
4. Calculons une base orthogonale pour q_1, on rappelle qu'une base orthogonale est une base pour laquelle la matrice de la forme quadratique est diagonale. La méthode de réduction de Gauss nous fournit une telle base. Soit $\mathcal{B}_1$ la base dans laquelle les coordonnées sont x', y', z' et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}_1}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_1$. Alors les relations liant x, y, z à $x', y,', z'$ obtenues en appliquant la méthode de réduction de Gauss nous permettent de construire P^{-1}.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{on en déduit par un calcul d'inversion} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de la matrice P nous fournissent les éléments de la base $\mathcal{B}_1$ exprimés dans la base canonique.

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par une méthode identique on trouve des bases orthogonales pour q_2 et q_3 que l'on note respectivment $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.

$$\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Dans ces bases les matrices de nos formes quadratiques sont,

$$Mat_{\mathcal{B}_1}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad Mat_{\mathcal{B}_2}(q_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Mat_{\mathcal{B}_3}(q_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Calculons une base de Sylvester réelle pour q_1 on note ${\mathcal{B}_1}^s$ la base recherchée. On a déjà réussi à mettre q_1 sous la forme,

$$q_1 = {x'}^2 - 3{y'}^2 + 9{z'}^2 = {x'}^2 - (\sqrt{3}y')^2 + 3{z'}^2$$

Si on pose,

$$\begin{array}{rcl} x'' & = & x' \\ y'' & = & \sqrt{3}y' \\ z'' & = & 3z' \end{array}$$

Alors,

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to {\mathcal{B}_1}^s})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{on en déduit}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to {\mathcal{B}_1}^s}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

De fait on peut calculer la matrice de passage de la base cannonique à la base de Sylvester de la façon suivante ;

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to {\mathcal{B}_1}^s} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}_1} \ \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to {\mathcal{B}_1}^s} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Les colonnes de cette dernière matrice nous fournissent les éléments de la base ${\mathcal{B}_1}^s$ exprimés dans la base canonique.

$${\mathcal{B}_1}^s = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par une méthode identique on trouve des bases de Sylvester pour q_2 et q_3 que l'on note respectivment $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.

$${\mathcal{B}_2}^s = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad {\mathcal{B}_3}^s = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Dans ces bases les matrices de nos formes quadratiques sont,

$$Mat_{{\mathcal{B}_1}^s}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Mat_{{\mathcal{B}_2}^s}(q_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Mat_{{\mathcal{B}_3}^s}(q_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Dans la base de Sylvester réelle, q_1 s'exprime $q_1 = {x''}^2 - {y''}^2 + {z''}^2$, comme à présent q_1 est vue comme une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$, on peut exprimer q_1 de la façon suivante,

$$q_1 = {x''}^2 + (iy'')^2 + {z''}^2$$

On pose alors $x'' = x'$, $y'' = iy'$ et $z'' = z'$ et on obtient ainsi la matrice passage de la base de Sylvester réelle à la base de Sylvester complexe. Notons ${\mathcal{B}_1}^{sc}$ cette base, on a alors

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to {\mathcal{B}_1}^{sc}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on en déduit}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to {\mathcal{B}_1}^{sc}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to {\mathcal{B}_1}^{sc}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_c \to {\mathcal{B}_1}^s} \ \mathcal{P}_{{\mathcal{B}_1}^s \to {\mathcal{B}_1}^{sc}} = \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & i\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit les bases de Sylvester complexes,

$$\mathcal{B}_1{}^{sc} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -2i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}_2{}^{sc} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}_3{}^{sc} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -5i \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right)$$

Dans ces dernières bases les trois formes quadratiques ont la même matrice, à savoir I_3.

Exercice 2. Forme quadratique dégénérée.

1. On applique la méthode de réduction de Gauss et on trouve,

$$q = {x'}^2 - {y'}^2 \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & x+y \\ y' & = & y-z \end{array} \right.$$

2. La forme quadratique est de rang 2 et de signature $(1,1)$. Le noyau d'une forme quadratique est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont q-orthogonaux à tous les autres. En d'autres termes, si on note φ la forme polaire associée à q, le noyau de q est l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{R}^3$ tels que $\forall Y \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(X,Y) = 0$.
Soit $A = Mat_{\mathcal{B}_c}(q)$, alors $\varphi(X,Y) =^t XAY$. Donc, dire que X est dans le noyau de q revient à dire que ${}^tXA = 0$, ce qui, comme A est symétrique revient à dire que ${}^tX^tA =^t (AX) = 0$, donc que $AX = 0$. Le noyau de q n'est autre que le noyau de l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique.
Par conséquent, si l'on veut obtenir les éléments du noyau de q expromés dans la base canonique il suffit de résoudre le système d'équations $AX = O$. C'est à dire,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x = y & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système par une méthode d'échelonnement nous fournit un espace vectoriel de dimension 1 de solutions, $N = \text{Vect}\{(-1,1,1)\}$.

3. Soit $v = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}\{v\}$.
   (a) L'orthogonal de F est l'ensemble des vecteurs $Y \in \mathbb{R}^3$ tels que $\varphi(X,Y) = 0$ pour tout vecteur $X \in F$. Ce qui revient à chercher les vecteurs Y tels que ${}^tvAY = 0$, c'est à dire à résoudre,

$$(1,1,1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2y = 0$$

   On en déduit que

$$F^{\perp} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Pour la suite, on notera v_1 et v_2 les deux générateurs de $F^{\perp}$ décrits ci-dessus.
   (b) On remarque assez facilement que $v = v_1 + v_2$.
   (c) Pour calculer $F^{\perp}$, il faut trouver tous les vecteurs Y qui vérifient, ${}^tv_1AY = 0$ **et** ${}^tv_2AY = 0$. Ce qui nous donne un système de deux équations linéaires à trois inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y-z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

   On voit immédiatement que les deux équations sont liées, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

$$F^{\perp} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = F + N$$

Exercice 3. Formes quadratiques complexes.

1. On note $\mathcal{B}_c$, la base cannonique de $\mathbb{C}^3$,

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1+i}{2} \\ 1 & 2i & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & i \end{pmatrix} \quad Mat_{\mathcal{B}_c}(q_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1+2i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2-i}{2} \\ \frac{1+2i}{2} & \frac{2-i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Quant aux formes polaires associées,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1((x,y,z),(x',y',z')) & = & xy' + x'y + 2iyy' + izz' - \frac{1+i}{2}(xz' + x'z) + \frac{1-i}{2}(y'z + yz') \\ \varphi_2((x,y,z),(x',y',z')) & = & \frac{1+2i}{2}(xz' + x'z) + \frac{1-i}{2}(yz' + y'z) \end{array}$$

2. En appliquant l'algorithme de Gauss, on obtient :

$$q_1 = -\tfrac{1}{2}x'^2 + 2y'^2 + iz'^2 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} x' & = & x - (2-i)y \\ y' & = & y \\ z' & = & \left(\frac{-1+i}{2}\right)x - \left(\frac{1+i}{2}\right)y + z \end{array}$$

$$q_2 = \left(\tfrac{1+2i}{4}\right)(x'^2 - y'^2) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} x' & = & x - iy + z \\ y' & = & -x + iy + z \\ z' & = & x \end{array}$$

N.B. En ce qui concerne q_2, on peut choisir n'importe quoi pour z' à condition que les formes linéaires x', y' et z' soient indépendantes.

3. $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases orthogonales respectivement pour q_1 et q_2.

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

4. ${\mathcal{B}_1}^{sc}$ et ${\mathcal{B}_2}^{sc}$ sont des bases de Sylvester respectives de q_1 et q_2. Pour les calculer on aura besoin de calculer des racines de nombres complexes. Plus précisément, pour q_1 il faut calculer une racine de i, et pour q_2 il faudra calculer un racine de $(1+2i)/4$.
On applique la méthode permettant de calculer les racines carrées d'un nombre complexe et on obtient,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = i \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{8}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{8}}\right)^2 = \frac{1+2i}{4}$$

On pose,

$$\phi = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{8}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{8}}$$

On obtient alors,

$${\mathcal{B}_1}^{sc} = \left(-i\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad {\mathcal{B}_2}^{sc} = \left(\frac{1}{\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, -\frac{i}{\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 4. Avec des polynômes.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\lambda P) = \int_0^1 (\lambda P)(t)(\lambda P)''(t)dt = (\lambda)^2 \int_0^1 P(t)P''(t)dt = (\lambda)^2\phi(P)$$

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\phi(P+Q)=\int_0^1 (P+Q)(P+Q)''(t)dt=\phi(P)+\phi(Q)+\int_0^1 P(t)Q''(t)+P''(t)Q(t)dt$$

Il reste à vérifier que $(P,Q)\to\int_0^1 P(t)Q''(t)+P''(t)Q(t)dt$ est bien une forme bilinéaire symétrique, cette vérification est laissée au lecteur. Conclusion : ϕ est bien une forme quadratique.

2. Le plus simple est de calculer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$. Soit, φ la forme polaire associée (que l'on a explicité dans la question précédente), alors la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par,

$$Mat_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\varphi(1,1) & \varphi(1,X) & \varphi(1,X^2)\\ \varphi(X,1) & \varphi(X,X) & \varphi(X,X^2)\\ \varphi(X^2,1) & \varphi(X^2,X) & \varphi(X^2,X^2)\end{pmatrix}\quad \text{après calcul, on trouve} Mat_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

ϕ est de rang 2 car sa matrice est de rang 2. Pour calculer sa signature, il va falloir appliquer la méthode de Gauss. Soit $P=a_0+a_1X+a_2X^2$, alors

$$\phi(P)=\frac{2}{3}{a_2}^2+a_1a_2+a_0a_2$$

Si on applique la méthode de Gauss, on trouve,

$$\phi(P)=x^2-y^2\quad\text{avec}\quad\left\{\begin{array}{ccc}x&=&\frac{3}{2}a_0+\frac{3}{4}a_1+a_2\\ y&=&2a_0+a_1\\ (z&=&a_0)\end{array}\right.$$

N.B. Ici encore le choix de z est relativement arbitraire, il faut éviter d'avoir des termes linéairement dépendants. On en déduit que ϕ est de signature $(1,1)$ et la base suivante nous fournit une base orthogonale,

$$\mathcal{B}=\left(X^2,\ X-\frac{3}{4}X^2,\ 1-2X\right)$$

Le dernier vecteur nous fournit une base du noyau.

3. Par le calcul, on trouve que $F^\perp=\text{Vect}\{1-2X,2-3X^2\}$ et on vérifie que F n'est pas contenu dans $F^\perp$, par conséquent (pour des raisons de dimension), $\mathbb{R}_2[X]=F\oplus F^\perp$