UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Rappels d'algèbre linéaire. (Solutions)

Exercice 1. Espaces vectoriels.

1. C'est biensûr un $\mathbb{R}$-e.v. mais pas un $\mathbb{C}$-e.v.
2. Non ce n'est pas un e.v. car il ne contient pas 0.
3. C'est un $\mathbb{C}$-e.v. donc un $\mathbb{R}$-e.v.
4. Non l'ensemble n'est pas stable par addition ou par multiplication par un scalaire, par exemple si on prend le vecteur $x = (1, 2)$, il est dans notre ensemble mais $2x$ n'y est pas. En effet $2x = (2, 4)$ et $2^2 \neq 8$.
5. C'est un $\mathbb{R}$-e.v. mais pas un $\mathbb{C}$-e.v.
6. C'est un $\mathbb{R}$-e.v. et un $\mathbb{C}$-e.v.
7. Ce n'est pas un e.v.
8. C'est un $\mathbb{R}$-e.v. mais pas un $\mathbb{C}$-e.v.
9. Ce n'est pas un e.v.
10. C'est un $\mathbb{R}$-e.v. mais pas un $\mathbb{C}$-e.v.

Exercice 2. Familles libres familles génératrices, bases.

1. C'est une famille libre mais pas génératrice, ce n'est donc pas une base non plus.
2. C'est une famille génératrice mais pas libre, ce n'est donc pas une base non plus.
3. C'est une famille libre mais pas génératrice, ce n'est donc pas une base non plus.
4. C'est une famille libre mais pas génératrice, ce n'est donc pas une base non plus.

Exercice 3. Applications linéaires

1. f_1 : Non
2. f_2 : Oui
3. f_3 : Non
4. f_4 : Oui
5. f_5 : Non
6. f_6 : Oui
7. f_7 : Oui
8. f_8 : Oui
9. f_9 : Oui

Exercice 4. Images et noyaux.

1. (a) $\ker f_2 = \{0\}$, $\mathrm{Im} f_2 = \mathrm{Vect}\{(1, 3, \pi), (-1, 0, 1)\}$.
   (b) $\ker f_4 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg P = 0\} \cup \{0\}$, $\mathrm{Im} f_4 = \mathbb{R}[X]$.
   (c) $\ker f_6 = \{0\}$, $\mathrm{Im} f_6 = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 0), (3, -1, 4)\}$
   (d) $\ker f_7 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg P = 0\}$, $\mathrm{Im} f_7 = \mathbb{R}_4[X]$
   (e) $\ker f_8 = \{0\}$, $\mathrm{Im} f_8 = \mathbb{R}^4$
   (f) $\ker f_9 = \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)dt = 0\}$, $\mathrm{Im} f_9 = \mathbb{R}$
2. f_2 et f_6 sont injectives, f_4, f_7 et f_9 sont surjectives, f_8 est un isomorphisme.

Exercice 5.

1. — Montrons que $\ker f \subseteq \ker f^2$. Soit $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0$, donc $f^2(x) = f(0) = 0$
   — Montrons à présent que $\mathrm{Im} f^2 \subseteq \mathrm{Im} f$. Soit $x \in \mathrm{Im} f^2$, alors $\exists y \in E,\ x = f^2(y) = f(f(y))$, donc $x \in \mathrm{Im} f$

2. Donnons un exemple d'endomorphisme pour lequel les inclusions de la question précédente sont strictes. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ représentée dans la base cannonique par la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors on remarque que $A^2 = 0$ donc $\ker f^2 = \mathbb{R}^2$ et $\ker f = \text{Vect}\{(1,0)\}$. D'où $\ker f \subsetneq \ker f^2$. De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim \ker f + \text{Rg} f = 2 \quad \text{donc} \quad \text{Rg} f = 1$$

$$\dim \ker f^2 + \text{Rg} f^2 = 2 \quad \text{donc} \quad \text{Rg} f^2 = 0$$

On a donc aussi $\text{Im} f^2 \subsetneq \text{Im} f$.

3. — Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Supposons donc que $\ker f = \ker f^2$. D'après le théorème du rang

$$\dim \text{ Im} f + \dim \ker f = n \quad \text{et} \quad \dim \text{ Im} f^2 + \dim \ker f^2 = n$$

ainsi $\dim \text{ Im} f^2 = \dim \text{ Im} f$. Comme on a toujours l'inclusion $\text{Im} f^2 \subseteq \text{Im} f$, l'égalité de dimension nous permet de déduire que cette inclusion est en fait une égalité.

— La réciproque $(ii) \Leftarrow (iii)$ se démontre par un raisonnement identique.

— Montrons maintenant que $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons donc que $E = \ker f \oplus \text{Im} f$. Soit $x \in \ker f^2$, on a alors

$$f(f(x)) = 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \in \ker f$$

et naturellement $f(x) \in \text{Im} f$. Ainsi $f(x) \in \ker f \cap \text{Im} f$ or par hypothèse cette intersection est nulle (ça fait partie de la définition d'une somme directe de deux sous-e.v.). Par conséquent $f(x) = 0$ et $x \in \ker f$. On a bien démontré l'inclusion $\ker f \subseteq \ker f^2$ l'inclusion réciproque étant toujours vraie on en déduit l'égalité : $\ker f = \ker f^2$.

— Pour finir montrons la réciproque à savoir $(i) \Leftarrow (ii)$. Supposons donc que $\ker f = \ker f^2$. Soit $x \in \ker f \cap \text{Im} f$, $x \in \text{Im} f \Rightarrow \exists u \in E\, x = f(u)$ et $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = f^2(u) = 0$. Ainsi $u \in \ker f^2$ or par hypothèse $\ker f^2 = \ker f$, par conséquent $u \in \ker f$ et $x = f(u) = 0$. On a montré que $\ker f \cap \text{Im} f = \{0\}$, de plus d'après le théorème du rang : $\dim \ker f + \dim \text{ Im} f = \dim E$, on en déduit que $E = \ker f \oplus \text{Im} f$.

Exercice 6. Représentations matricielles d'applications linéaires.

1. On notera $\mathcal{B}_n$ la base cannonique de $\mathbb{R}^n$. C'est à dire la famille,

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On a alors,

$$Mat_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} \qquad Mat_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f_6) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Mat_{\mathcal{B}_6,\mathcal{B}_5}(f_7) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad Mat_{\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_4}(f_8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarquons biensûr que les applications linéaires f_4 et f_9 n'ont pas de représentation matricielle car leur espace de départ ou d'arrivée n'est pas de dimension finie.

2. Soit $M = Mat_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f_6)$. Soient $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$ les bases respectivement de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ définies par,

$$\mathcal{B}'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \text{ et } \mathcal{B}'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'_2$, et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'_3$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors $\tilde{M} = Mat_{\mathcal{B}'_2,\mathcal{B}'_3}(f_6)$, la matrice $\tilde{M}$ se calcule à partir de la formule suivante

$$\tilde{M} = Q^{-1}MP$$

Le calcul de la matrice Q^{-1} donne,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors,

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 4 & 10 \\ -9 & -21 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Matrices semblables, matrices équivalentes.

1. Deux matrices M et M' sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $M' = P^{-1}MP$. Elles sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M' = Q^{-1}MP$.
2. Seule l'assertion "Semblable $\Rightarrow$ Equivalente" est vraie. La réciproque est fausse en effet si on considère les matrices,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Alors ces deux matrices sont équivalentes, il suffit de prendre,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   on a bien $M' = Q^{-1}MP$ mais ces matrices ne sont pas semblables car (comme on va le voir dans la question suivante) deux matrices semblables ont même trace, or $tr(M) = 3$ et $tr(M') = 2$.
3. Deux matrices semblables ont,
   (a) même trace, en effet comme $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ tr(AB) = tr(BA)$. Donc s'il existe une matrice inversible P telle que $M' = P^{-1}MP$, alors, $tr(M') = tr(P^{-1}(MP)) = tr((MP)P^{-1}) = tr(M)$.
   (b) même déterminant. Ca se démontre par un raisonnement identique.
   (c) même rang. (Voir la démonstration pour les matrices équivalentes.)
4. Deux matrices équivalentes,
   (a) n'ont pas la même trace (voir l'exemple de la question précédente).
   (b) n'ont pas même déterminant (idem).
   (c) ont même rang. En effet si $M' = Q^{-1}MP$ où P et Q sont des matrices inversibles. On sait qu'on peut voir des matrices inversibles comme des matrices de passage, mais une autre façon de les voir c'est de dire qu'elles représentent un automorphisme d'un espace vectoriel exprimé dans une base $\mathcal{B}$ fixée.
   Donc si $M \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ alors il existe des morphismes $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $f' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tels que $M = Mat_{\mathcal{B}_m,\mathcal{B}_n}(f)$ et $M' = Mat_{\mathcal{B}_m,\mathcal{B}_n}(f')$. Où $\mathcal{B}_m$ et $\mathcal{B}_n$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$. De même il existe un automorphisme p de $\mathbb{R}^m$ tel que $P = Mat_{\mathcal{B}_m}(p)$ et un automorphisme q de $\mathbb{R}^n$ tel que $Q = Mat_{\mathcal{B}_n}(q)$. On a alors $f' = q^{-1} \circ f \circ p$.
   Si on arrive à montrer que les noyaux de f et f' ont même dimension, alors par le théorème du rang on pourra en déduire que ces morphismes ont même rang, étant donné qu'ils ont le même espace de départ.
   Si $x \in \ker f'$ alors $f'(x) = q^{-1} \circ f \circ p(x) = 0$, donc $f(p(x)) \in \ker q^{-1}$. Or q^{-1} est un automorphisme, c'est à dire un endomorphisme bijectif, de fait il est injectif et son noyau est nul. Par conséquent $f(p(x)) = 0$, donc $p(x) \in \ker f$. Réciproquement, si $p(x) \in \ker f$, alors on a bien $f'(x) = 0$.
   p étant un endomorphisme bijectif est inversible, il a donc un inverse p^{-1} qui est aussi bijectif, donc $\dim p^{-1}(\ker f) = \dim \ker f$. D'après ce que l'on a vu $\ker f' = p^{-1}(\ker f)$ et ces deux espaces ont même dimension, ce qui achève notre démonstration.

Exercice 8. Déterminants $\Delta_1 = -1\ , \quad \Delta_2 = -6\ , \quad \Delta_3 = -1$

Exercice 9. Comatrices.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Systèmes linéaires.

On numérote les systèmes de l'énoncé de 1 à 4. On note $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_4$ les solutions respectives de ces systèmes.

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset \qquad \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \mathcal{S}_4 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 11. Formes linéaires et équations linéaires homogènes.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

1. Une forme linéaire est une application de E à valeurs dans K, où K est vu comme un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même.
2. Ici il y a un "si et seulement si", il faut donc démontrer une équivalence. Toutefois l'une des implications est triviale, si une forme linéaire est surjective, alors elle n'est pas nulle. Réciproquement, soit f une forme linéaire non nulle sur E, alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) \in K \setminus \{0\}$. Mais alors le sous-espace de K engendré par $f(x)$ est contenu dans $\mathrm{Im} f$, et est de dimension 1, or K est également de dimension 1 en tant que K-e.v. donc $\mathrm{Im} f = K$, l'application f est donc surjective.
3. Les formes linéaires sont représentées pas des matrices lignes de longueur n, c'est à dire par les éléments de $\mathfrak{M}_{1,n}(K)$.
4. L'espace des formes linéaires sur E est isomorphe à $\mathfrak{M}_{1,n}(K)$ qui est de dimension $n \times 1 = n$, il est donc de même dimension que E, or deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.
5. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont des droites passant par l'origine, ceux de $\mathbb{R}^3$, des plans passant par l'origine.
6. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, tout élément $x \in E$ s'écrit alors de façon unique $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in K$ les images par f des éléments de $\mathcal{B}$, alors $f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ et le noyau de f s'identifie à l'ensemble des vecteurs $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ tels que $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$. Si $n = 2$ on retrouve l'équation d'une droite, si $n = 3$, celle d'un plan, le terme "équation" est donc tout à fait approprié. Il faut dire **une** équation et pas l'équation car si f est une équation de H, alors λf en est une autre et ce pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$.
7. Il s'agit en fait de résoudre un système de une équation à trois inconnues, à savoir $f(x) = 0$ puis $g(x) = 0$.

$$\ker f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \ker g = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8. Ici encore il faut résoudre un système, on est en train de chercher une forme linéaire du type, $f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ telle que, $f(u) = f(v) = 0$. Cela nous ramène à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3a & + & & - & c & = & 0 \\ & & 2b & + & c & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est,

$$\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc la forme linéaire f définie par $f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$ est une équation de P.

9. La forme linéaire g définie par $g(x) = -5x_1 + 2x_2 + 3x_3$ est une équation de P.