Contrôle de connaissances. (Corrigé)

Exercice 1. Questions de cours.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ est une valeur propre de f si et seulement si il existe un vectuer $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$.
2. (a) Vrai (b) Faux (c) Vrai (d) Faux (e) Vrai (f) Vrai
   Quelques justifications (même si on ne les demandait pas.)
   (a) C'est du cours
   (b) Prenez $A = I_n$ et $B = I_n$, alors $\det(A+B) = \det(2I_n) = 2^n$, et $\det(A)+\det(B) = 2\det(I_n) = 2$, donc si $n > 1$, $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$.
   (c) Si une matrice A est inversible, son noyau est nul, donc il n'y a pas de vecteur non nul vérifiant $Ax = 0$, 0 n'est donc pas valeur propre de A.
   (d) C'est vrai si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas le cas ici. Si on considère la matrice,
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$
   Celle-ci admet i pour valeur propre mais pas $\bar{i} = -i$.
   (e) C'est encore du cours
   (f) Pareil.

Exercice 2. Diagonalisation.

1. $P_A = (1-X)(1-i-X)(i-X)$.
2. Les valeurs propres de A sont $i, 1-i$ et 1. Pour les sous-espaces propres on trouve,
$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad E_{1-i} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad E_i = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$$
3. La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et que les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres. (On pouvait aussi remarquer que P_A est scindé à racines simples).
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{On a alors } D = P^{-1}AP$$
4. $P_B = (2-X)^2(3-X)$. Les valeurs propres de B sont 2 et 3. Pour les sous-espaces propres on trouve,
$$E_2 = \text{Vect} = \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \quad E_3 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$
   La matrice B n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, car la valeur propre 2 est de multiplicité 2 et que E_2 est de dimension 1.
5. $A^8 = PD^8P^{-1}$, or
$$D^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Un calcul de P^{-1} nous donne,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 & -1+i \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^8 = PD^8P^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -15i \\ 15+15i & 1 & 15-15i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

1. Toutes les colonnes de M_n sont colinéaires à la première, on en déduit que M_n est de rang 1. De fait, d'après le théorème du rang, le noyau de l'application linéaire associée à M_n est de dimension $n-1$, or une matrice est inversible si et seulement si le noyau de l'application linéaire associée est nul. Donc M_n n'est pas inversible.
2. 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$ (c'est le noyau de l'application linéaire associée). La multiplicité de 0 est donc égale à $n-1$ ou à n. Si 0 est de multiplicité n, alors c'est la seule valeur propre (car la somme des multiplicités de toutes les valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre n est égale à n), et donc la trace de M_n serait nulle. Or $\mathrm{tr} M_n = 1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$. Donc il y a une autre valeur propre qui est $n(n+1)/2$ et le sous espace propre associé est au plus de dimension 1 car la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure à n (c.f. cours) qui ne peut être que de multiplicité 1, on en déduit donc que le s.e.v propre associé est de dimension 1.

   Conclusion M_n admet deux valeurs propres qui sont 0 et $n(n+1)/2$, 0 est de multiplicité $n-1$ et le s.e.v propre associé est de dimension $n-1$, $n(n+1)/2$ est de multiplicité 1 et la dimension du sous-espace propre associé est 1.
3. La conclusion précédente permet de déduire immédiatement (en appliquant un théorème du cours) que M_n est diagonalisable. Reste à expliciter une base de diagonalisation. Les vecteurs suivants fournissent une base du sous-espace propre associé à 0,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Quand au sous-espace propre associé à $n(n+1)/2$, on remarque qu'il est engendré par le vecteur,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix}$$

   La réunion de ce vecteur et de la base du noyau ci-dessus nous fournit une base de diagonalisation.

Exercice 4. Exercice Bonus, hors barème.

1. Montrons que 1 est valeur propre de f, cela revient à montrer qu'il existe une matrice A telle que $f(A) = A$, cherchons donc,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Ce qui revient à résoudre} \quad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   De cette égalité matricielle on déduit un système de quatre équations à quatre inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d & = & a \\ -b & = & b \\ -c & = & c \\ a & = & d \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & d \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent, la matrice I_2 est un vecteur propre pour f. On peut remarquer de plus que le système ci-dessus est formé de trois équations indépendantes. L'espace des solutions est donc de dimension 1, et le sous-espace propre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}\{I_2\}$.

2. Montrons que -1 est valeur propre de f, cela revient à montrer qu'il existe une matrice A telle que $f(A) = -A$, cherchons donc,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$\text{Ce qui revient à résoudre} \quad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

De cette égalité matricielle on déduit un système de quatre équations à quatre inconnues,

$$\begin{cases} d &= -a \\ -b &= -b \\ -c &= -c \\ a &= -d \end{cases} \Longrightarrow \{a = d$$

Par conséquent, on peut prendre des initiatives sur les variables b, c et d, l'espace des solutions est de dimension 3, le sous-espace propre associé à -1 est engendré par les matrices,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Des bases des sous-espaces propres associés sont explicitées dans la question précédente. On remarque de plus, que la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à 1 et -1 est égale à 4 or $\dim \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.