UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Rappels d'algèbre linéaire.

1 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1. Espaces vectoriels.

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

1. $\mathbb{R}[X]$
2. L'ensemble des polynômes de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid ix + 3y + (1 - i)z = 0\}$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 2y = x^2\}$.
5. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
6. $\mathbb{C}$.
7. $\mathbb{C}^*$.
8. $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
9. $Gl_n(\mathbb{C})$.
10. $\mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Familles libres familles génératrices, bases.

Les familles suivantes sont-elles des familles libres ? génératrices ? des bases ?

1. Dans $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Dans $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Dans $\mathbb{R}_3[X]$,

$$X,\ X^2 + X - 3,\ 4X^3 + 2$$

Exercice 3. Applications linéaires

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 3x, y+\pi x) \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 - A \end{array} \right. \qquad f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$$

$$f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y+1 \end{array} \right. \qquad f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+3y, -y-x, 4y) \end{array} \right.$$

$$f_7 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & P' + P'' \end{array} \right. \qquad f_8 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P'(0), P'(1)) \end{array} \right.$$

$$f_9 : \left\{ \begin{array}{ccc} C^0([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array} \right.$$

Exercice 4. Images et noyaux.

1. Calculer le noyau et l'image des applications de l'exercice précédent qui sont linéaires.
2. En déduire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Montrer les inclusions suivantes :

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im} f^2 \subseteq \mathrm{Im} f$$

2. Donner un exemple d'endomorphisme pour lequel les inclusions de la question précédente sont strictes.
3. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes.

$$\begin{array}{cl} (i) & E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f \\ (ii) & \ker f = \ker f^2 \\ (iii) & \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \end{array}$$

Indications : ici le mieux est de commencer par démontrer l'équivalence entre le (ii) et le (iii), puis de démontrer ensuite l'équivalence d'un de ces points avec le (i).

2 Matrices et déterminants.

Exercice 6. Représentations matricielles d'applications linéaires.

1. Considerer les applications de l'exercice 3 qui sont linéaires, et dont les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension finie. Représenter matriciellement ces applications dans les bases canoniques de leurs espaces de départ et d'arrivée.
2. Représenter l'application f_6,

$$\text{de la base } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ dans la base } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Matrices semblables, matrices équivalentes.

1. Rappeler les définitions de matrices semblables et équivalentes.
2. Laquelle de ces assertions est vraie :
   (a) Semblable $\Rightarrow$ Equivalente
   (b) Equivalente $\Rightarrow$ Semblable
   (c) Equivalente $\Leftrightarrow$ Semblable
3. Deux matrices semblables ont-elles,
   (a) même trace ?
   (b) même déterminant ?
   (c) même rang ?
4. Même question pour des matrices équivalentes.

Exercice 8. Déterminants

Calculer les déterminants suivants,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 17 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 9. Comatrices.

Calculer les inverses des matrices suivantes grâce à la formule de la comatrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 10. Systèmes linéaires.

Résoudre les systèmes linéaires suivants,

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 8x + 2y - 2z &= 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z &= 10 \\ x + y + 4z &= -9 \\ 7x + 5y + z &= 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t &= 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4t &= 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11t &= 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + t &= 0 \\ x + z + 3t &= 0 \\ 2y + 2z + 4t &= 0 \\ 2x + y + 3z + 8t &= 0 \end{cases}$$

Exercice 11. Formes linéaires et équations linéaires homogènes.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

1. Rappeler la définition d'une forme linéaire.
2. Montrer qu'une forme linéaire est surjective si et seulement si elle est non nulle.
3. Quelle est la forme d'une matrice représentant une forme linéaire ?
4. En déduire que l'espace des formes linéaires sur E appelé *dual* de E est isomorphe à E.
5. Le noyau d'une forme linéaire est appelé *hyperplan*, à quoi correspondent géométriquement les hyperplans de $\mathbb{R}^2$? de $\mathbb{R}^3$?
6. Etant donné un hyperplan H de E, une forme linéaire f admettant H comme noyau est appelée *équation* de H. Cette appellation vous semble-t-elle indiquée ? Doit on alors dire que f est *une* équation de H, ou *l'équation* de H ?
7. A partir de maintenant on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit de sa base cannonique. Soient f et g les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par $f(x, y, z) = 3x - y + 2z$ et $g(x, y, z) = x - z$. Calculer des bases des noyaux de ces formes linéaires.
8. Soit P l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs :

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Calculer une équation de P.

9. Même question avec :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$