UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.2 - M.A.S.S - Algèbre S3
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Sur les matrices de transvection et de dilatation.

Dans tout ce qui va suivre, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un $\square$ désigne la fin d'une démonstration.

Définition 1. Matrices élémentaires.
Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n, on appelle matrice élémentaire associée au couple (i, j) la matrice,

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, c'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i, j) qui est égal à 1. La famille de toutes les matrices élémentaires forme une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2. Matrices de transvection.
On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme,

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$$

Où I_n désigne la matrice identité, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, i et j sont deux entiers compris entre 1 et n tels que $i \neq j$. En d'autres termes, les coefficients diagonaux de la matrice sont tous égaux à 1, les autres sont tous nuls sauf un qui est égal à λ.

Exemple 1. Si $n = 4$ la matrice $T_{2,3}(5)$ est la matrice,

$$T_{2,3}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 3. Matrices de dilatation.
On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme,

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

Où I_n désigne la matrice identité, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et i est un entier compris entre 1 et n. En d'autres termes, les coefficients diagonaux de la matrice sont tous égaux à 1, sauf le i-ème qui est égal à λ.

Exemple 2. Si $n = 5$ la matrice $T_4(6)$ est la matrice,

$$T_4(6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1. Multiplication par une matrice de transvection.
Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, i et j deux entiers compris entre 1 et n tels que $i \neq j$, alors,

1. La matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ est la matrice A à qui on a appliqué la transvection $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
2. La matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est la matrice A à qui on a appliqué la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si l'on démontre le **??**, alors le **??** s'en déduit par transposition, car ${}^tT_{i,j}(\lambda) = T_{j,i}(\lambda)$.

Ensuite,

$$AT_{i,j}(\lambda) = A(I_n + \lambda E_{i,j}) = A + \lambda AE_{i,j}$$

Reste à voir que la matrice $AE_{i,j}$ est une matrice dont la j-ème colonne est la i-ème colonne de A et les autres colonnes sont nulles.

— Soient $l \neq j$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(AE_{i,j})_{k,l} = \sum_{m=1}^{n} A_{k,m}(E_{i,j})_{m,l} = 0$$

Car, comme $l \neq j$, tous les termes de cette somme sont nuls, donc la l-ème colonne de $AE_{i,j}$ est nulle et ce $\forall\ l \neq j$.

— Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(AE_{i,j})_{k,j} = \sum_{m=1}^{n} A_{k,m}(E_{i,j})_{m,j} = A_{k,i}$$

Car dans la somme seul le terme $m = i$ est non nul. Ainsi les coefficients de la j-ème colonne de $AE_{i,j}$ sont ceux de la i-ème colonne de A.

□

Si cette démonstration vous semble trop technique, essayez de vous convaincre de ce résultat en le testant sur quelques exemples simples.

Proposition 2. Multiplication par une matrice de dilatation.
Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, et i un entier compris entre 1 et n, alors,

1. La matrice $AD_i(\lambda)$ est la matrice A à qui on a appliqué l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
2. La matrice $D_i(\lambda)A$ est la matrice A à qui on a appliqué l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

La démonstration de ce dernier point est laissée en exercice au lecteur.

Proposition 3. Le déterminant d'une matrice de transvection est toujours égal à 1 celui d'un matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est égal à λ.

Démonstration. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est toujous égal au produit de ses coefficients diagonaux.

□

La morale de toute cette histoire c'est que multiplier à droite par une matrice de transvection on de dilatation revient à agir sur les colonnes d'une matrice, alors que multiplier à gauche revient à agir sur les lignes. Remarquons que la dernière proposition nous fournit une justification du fait qu'un déterminant est toujours invariant par transvection mais pas par multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire.

Théorème 1. Soit $A \in Gl(n, \mathbb{K})$, c'est à dire $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et est inversible. Si en appliquant une séquence de transvections et de dilations aux lignes (resp. aux colonnes) de A on obtient la matrice I_n, alors en appliquant la même séquence d'opérations aux lignes (resp. aux colonnes) de I_n on obtiendra la matrice A^{-1}.

ATTENTION ! **Le résultat est faux si l'on applique des transvections à la fois aux lignes et aux colonnes, il faut choisir son camps dès le début.**

Démonstration. On va démontrer le résultat pour des opérations sur les lignes l'autre démonstration étant quasiment similaire, est laissée en exercice.

Appliquer aux lignes de A une séquence de transvections et de dilatations revient à la multiplier à gauche par des matrices de transvections et de dilatations. Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ les matrices de transvections ou dilatations correspondant aux différentes opérations appliquées.

$$\begin{array}{cc} \text{Opération 1 :} & \Phi_1 A \\ \text{Opération 2 :} & \Phi_2\Phi_1 A \\ \vdots & \vdots \\ \text{Opération m :} & \Phi_m \ldots \Phi_2\Phi_1 A \end{array}$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé on a,

$$\Phi_m \ldots \Phi_2\Phi_1 A = I_n$$

donc,

$$\Phi_m \ldots \Phi_2\Phi_1 = A^{-1}$$

donc,

$$\Phi_m \ldots \Phi_2\Phi_1 I_n = A^{-1}$$

Ce qui revient bien à dire qu'en appliquant la même séquence d'opérations aux lignes de la matrice identité on obtient la matrice A^{-1}

□