UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.2 - M.A.S.S - Algèbre S3
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Diagonalisation.

Exercice 1. Activité A.

On considère la matrice suivante,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de P.
2. Calculer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres associés.
3. Diagonaliser P.
4. Dans le plan représenter les sous-espaces propres de P, puis représenter une base de vecteurs propres ainsi que leurs images.

Exercice 2. Activité B.

Même exercice avec la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Diagonalisation

Calculer les valeurs propres et des bases des sous-espaces propres associés des matrices suivantes. Les diagonaliser lorsque c'est possible.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Minimisons les calculs

1. Montrer que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.
2. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
3. Où apparaissent le déterminant et la trace dans le polynôme caractéristique ?
4. Considérons la matrice suivante.

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Sachant que 1 et -1 sont valeurs propres de M, calculer les autres sans calculer le polynôme caractéristique.

5. Même question avec la matrice T ci-dessous, sachant que $1-i$ est une valeur propre de T,

$$T := \begin{pmatrix} -12 & -29 & -59 & -91 \\ 11 & 26 & 50 & 74 \\ -4 & -9 & -17 & -27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Même question avec la matrice,

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire que M_n est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de celle-ci.

Exercice 5. Application : Etude d'une suite vectorielle.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par,

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = w_0 = t_0 = 1 \\ u_{n+1} &= t_n \\ v_{n+1} &= -w_n \\ w_{n+1} &= v_n \\ t_{n+1} &= -u_n \end{cases}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A
2. En déduire A^n
3. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 6. Diagonalisation simultanée.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent, i.e. $f\circ g = g\circ f$. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ (resp. $\mu_1,\dots,\mu_q$) les valeurs propres de f (resp. de g) et $F_1,\dots,F_p$ les sous espaces propres associés (resp. $G_1,\dots G_q$).

1. Montrer que chaque G_j est stable par f, et que chaque F_i est stable par g.
2. On pose $H_{i,j} = F_i \cap G_j$. Montrer que pour tout i,

$$F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{i,j}$$

3. En déduire les résultats suivants,
   (a) Etant donnés deux endomorphismes diagonalisables f et g, il existe une base de vecteurs propres commune à f et g si et seulement si f et g commutent.
   (b) La somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est un endomorphisme diagonalisable.