UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Formes quadratiques.

Exercice 1. Formes quadratiques réelles.

Pour les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ suivantes,

$$\begin{array}{rcl} q_1 & = & x^2+y^2+z^2-4(xy+yz+xz) \\ q_2 & = & xz+yz+xy \\ q_3 & = & x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-10yz \end{array}$$

1. Donner la matrice de la forme quadratique dans la base canonique, ainsi que la forme polaire associée.
2. Décomposer la forme en une somme de carrés indépendants.
3. En déduire le rang et la signature de la forme quadratique.
4. Donner une base orthogonale pour cette forme.
5. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la forme quadratique est sous forme de Sylvester.
6. Même question, mais cette fois ci, notre forme quadratique est vue comme une forme quadratique sur $\mathbb{C}^3$.

Exercice 2. Forme quadratique dégénérée.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x,y,z)=x^2-z^2+2xy+2yz$. Soit φ sa forme polaire.

1. Ecrire q sous forme d'une some de carrés.
2. En déduire le rang et la signature de q. Donner une base du noyau N de q.
3. Soit $v=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ et $F=$Vect$\{v\}$.
   (a) Déterminer $F^\perp$.
   (b) Vérifier que $N\subseteq F^\perp$.
   (c) Vérifier que $\left(F^\perp\right)^\perp=N+F$.

Exercice 3. Formes quadratiques complexes.

Même énoncé que l'exercice 1 en otant la question 5, pour les formes quadratiques sur $\mathbb{C}^3$ suivantes,

$$\begin{array}{rcl} q_1 & = & 2xy+2iy^2+iz^2-(1+i)xz+(1-i)yz \\ q_2 & = & (1+2i)xz+(2-i)yz \end{array}$$

Exercice 4. Avec des polynômes.

Soit ϕ, l'application définie par,

$$\phi:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 P(t)P''(t)dt \end{array}\right.$$

1. Vérifier que ϕ est bien une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa forme polaire associée.
2. Donner le rang la signature le noyau et une base ortogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ϕ.
3. Soit $F=$Vect$\{Q\}$, avec $Q=1-2X+15X^2$. Calculer $F^\perp$. A-t-on $\mathbb{R}_2[X]=F\oplus F^\perp$?