UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Dualité. (Solutions des exercices)

Exercice 1. Bases duales.

1. $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$, où,

$$e_1^* = x + 2y \quad e_2^* = y \quad e_3^* = x + \frac{7}{2}y + \frac{1}{2}z$$

2. $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$, où,

$$\begin{array}{rclcrcl} e_1^* & = & \frac{1-i}{2}z & \qquad & e_2^* & = & \frac{1}{2}x + \frac{6-15i}{58}y + \frac{-1-i}{4}z + \frac{-3-7i}{58}t \\ e_3^* & = & \frac{10+4i}{29}y + \frac{5+2i}{29}t & & e_4^* & = & \frac{15+6i}{29}y + \frac{-7+3i}{29}t \end{array}$$

Exercice 2. Bases préduales.
Dans cet exercice, nous noterons ${}^*\mathcal{B}$ la base préduale associée à $\mathcal{B}$.

1.
$$^*\mathcal{B} = \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i \\ -3-i \\ -2 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -i \\ 3 \\ -3+i \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-i \\ 3+3i \\ 2i \end{pmatrix} \right)$$

2.
$$^*\mathcal{B} = \left(1 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3, \quad X - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3, \quad \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X^3, \quad -\frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3 \right)$$

3.
$$^*\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 3. Annulateurs.

1. Il faut commencer par constater que E_1 est en fait de dimension 2, car la famille génératrice donnée dans l'énoncé est liée, le troisième est combinaison linéaire des deux autres. Donc en fait

$$E_1 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

On en déduit que ${E_1}^\circ$ est de dimension $4-2 = 2$. ensuit on cherche les formes linéaires, c'est à dire les applications de la forme $f(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt$ qui s'annulent sur E_1. Cela nous ra mène à un système de deux équations à 4 inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{rclcccccccc} f(1,0,i,1) = 0 & \Longrightarrow & a & & & + & ic & + & d & = & 0 \\ f(0,2i,0,-1) = 0 & \Longrightarrow & & & 2ib & & & - & d & = & 0 \end{array} \right.$$

Puis, après résolution du système linéaire, on trouve que, ${E_1}^\circ$ =Vect$\{f_1, f_2\}$, où f_1 et f_2 sont deux formes linéaires du type :

$$\begin{array}{rcl} f_1(x, y, z, t) & = & -ix + z \\ f_2(x, y, z, t) & = & -x - \frac{i}{2}y + z \end{array}$$

2. Ici par contre E_2 est de dimension 3, donc son annulateur sera de dimension $4-3=1$. Après résolution d'un système linéaire on trouve E_2 =Vect$\{f\}$, où f est féfinie par,

$$f(x,y,z,t) = -ix + \frac{-1+i}{2}y + z + it$$

3. $E_3{}^\circ$ est de dimension 3, $E_3{}^\circ$ =Vect$\{f_1, f_2, f_3\}$, avec,

$$f_1(x,y,z,t) = x + (1+2i)t \quad f_2(x,y,z,t) = y \quad f_3(x,y,z,t) = z$$

Exercice 4. Interpolation de Lagrange.

1. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, tels que,

$$\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0 \quad (*)$$

Nous allons montrer que tous les λ_i sont nuls. Pour ce faire, nous introduisons les polynômes, $P_0, \ldots, P_n$, définis par,

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X - x_k)$$

On vérfie que ces polynômes sont de degré n, ils sont donc bien éléments de E.

Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$ **fixé**, le poynôme P_i s'annule en tous les x_j sauf x_i. Si on applique $(*)$ à P_i, on obtient,

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda_0\varphi_0(P_i) + \cdots + \lambda_i\varphi_i(P_i) + \lambda_n(P_i)\varphi_n & = & 0 \\ \text{donc} & P_i(x_0) + \cdots + P_i(x_n) & = & 0 \quad (**) \end{array}$$

Or, comme P_i s'annule en tous les x_j sauf x_i, on déduit de $(**)$, l'égalité $\lambda_i P_i(x_i) = 0$. Or P_i ne s'annule pas en x_i car il est non nul, de degré n, et admet déjà tous les x_j sauf x_i comme racines. S'il admettait x_i pour racine, il aurait en tout $n+1$ racines ce qui est impossible pour un polynôme non nul de degré n. Par conséquent λ_i est nul et ce pour tout i, la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est donc une famille libre de formes linaires sur E.

2. On note $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_n$ les éléments de cette base duale (que l'on va calculer). On les a en fait presque calculés étant donné que les P_i de la question précédente vérifient déjà $\varphi_j(P_i) = 0$ si $j \neq i$ et $\varphi_i(P_i) \neq 0$. Il suffit donc de prendre,

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \Lambda_i = \frac{1}{P_i(x_i)} P_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

On appelle ces poynômes, les polynômes de Lagrange assosicés au $n+1$-uplet $(x_0, \ldots, x_n)$

3. — **Existence** Le polynôme $P = f_0\Lambda_0 + f_1\Lambda_1 + \cdots + f_n\Lambda_n$ est solution du problème.
   — **Unicité** Soient P_1 et P_2 deux polynômes solutions du problème, alors le polynôme $P_1 - P_2$ est un élément de E, donc un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Or,

   $$\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ (P_1 - P_2)(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = f_i - f_i$$

   Donc $P_1 - P_2$ a $n+1$ racines il est donc nul. En conclusion, $P_1 = P_2$

4. $$P = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2\frac{X(X-2)(X-3)}{(1)(1-2)(1-3)} + 3\frac{X(X-1)(X-3)}{(2)(2-1)(2-3)} + \frac{X(X-1)(X-2)}{(3)(3-1)(3-2)}$$

Je vous laisse le développer si le coeur vous en dit.