UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2007-08**

UE : Algèbre S3 (MI0B08Y) - Régime contrôle continu

Contrôle de connaissances.

Durée deux heures. Les documents et les calculatrices sont interdits.
Les quatre exercices sont indépendants
Bon courage.

Exercice 1. Sous-espaces stables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

1. Donner la définition de sous-espace f-stable (ou stable par f).
2. Un sous-espace propre de f est-il un sous-espace f-stable ? Justifiez votre réponse.
3. À présent l'espace E est égal à $\mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique que l'on notera $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Soient f, g, h des endomorphismes de $\mathbb{R}^5$ représentés respectivement dans la base canonique par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Trouver,
   (a) 4 sous-espaces f-stables autres que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^5$.
   (b) 3 sous-espaces g-stables autres que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^5$.
   (c) 2 sous-espaces h-stables autres que $\{0\}$ et $\mathbb{R}^5$.

Pour décrire ces sous-espaces on en explicitera une base avec l'aide des vecteurs de la base canonique.
Remarque : Ces endomorphismes ont sûrement plus de sous-espaces stables que le nombre demandé, disons que f en a 4 qui sont faciles à trouver. De même pour g et h qui en ont respectivement 3 et 2 que l'on trouve aisément.

Exercice 2. Sans calculs

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$, dont le polynôme caractéristique est :

$$P_f(x) = (x-2)^3(x-1)^2(x+1)^2$$

1. L'endomorphisme f est-il trigonalisable ? Pourquoi ?
2. Soit $\mathcal{B}_T$ une base de trigonalisation obtenue en faisant la réunion de bases des sous-espaces caractéristiques de f. Soit A la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}_T$. Donner l'allure de A (c'est-à-dire indiquer les coefficients nuls, ceux dont on peut connaître la valeur sans faire de calculs et mettre des "?" ou des lettres pour ceux que l'on ne peut pas déterminer sans faire de calcul).

Exercice 3. Avec...

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.
2. Calculer les sous-espaces propres de f.
3. Montrer que f est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, mais pas diagonalisable.
4. Calculer une base de trigonalisation $\mathcal{B}_T = (v_1, v_2, v_3)$.
5. Calculer la matrice représentant f dans $\mathcal{B}_T$.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 4. Etude d'une suite vectorielle

On considère les suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Définies par la relation de récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 1 \end{array}\right. , \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n - y_n \\ y_{n+1} & = & x_n + y_n \end{array}\right.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vectorielle.

1. Pour quelle matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ a-t-on : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$?
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
3. On note $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
   (a) Donner une base de diagonalisation $\mathcal{B}_d$ de A.
   (b) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_d$. On notera cette matrice P.
   (c) Calculer l'inverse de P.
   (d) Soit D la matrice $P^{-1}AP$, expliciter D.
4. Calculer A^n en fonction de n.
   Indication : On rappelle que $1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\pi/4}$ *et* $1 - i = \sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$.
5. En déduire x_n et y_n en fonction de n.

Exercice 5. Bonus. Hors Barème.

On considère la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de C ?
2. Donner un argument simple (sans faire de calcul) pour montrer que C n'est pas diagonalisable.

Fin.