UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Dualité.

Exercice 1. Bases duales.

Trouver la base duale associée aux bases suivantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

2. Dans $\mathbb{C}^4$,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 2. Bases préduales.

Calculer la base préduale associée aux bases suivantes. On commencera par bien vérifier que les familles de formes linéaires proposées forment bien une base.

1. Dans ${\mathbb{C}^3}^*$, $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$

$$f_1 : (x,y,z) \mapsto 3x + iy, \quad f_2 : (x,y,z) \mapsto 2x + (1+i)z, \quad f_3 : (x,y,z) \mapsto x + y - z$$

2. Dans $\mathbb{R}_3[X]^*$, $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$

$$\varphi_1 : P \mapsto P(0), \quad \varphi_2 : P \mapsto P'(0), \quad \varphi_3 : P \mapsto P(1), \quad \varphi_4 : P \mapsto P''(1)$$

3. Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})^*$, $\mathcal{B} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$

$$\phi_1 = tr, \quad \phi_2 : M \mapsto M_{1,1}, \quad \phi_3 : M \mapsto M_{2,1} - M_{1,2}, \quad \phi_4 : M \mapsto M_{1,1} + M_{1,2}$$

Exercice 3. Annulateurs.

Calculer une base de l'annulateur des sous-espaces de $\mathbb{C}^4$ suivants,

1.
$$E_1 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2.
$$E_2 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

3.
$$E_3 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1+2i \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 4. Interpolation de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'espace vectoriel, $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ réels distincts. On considère les formes linéaires sur E, $\varphi_i : P \mapsto P(x_i)$.

1. Montrer que ces formes linéaires sont indépendantes.
2. Calculer une base préduale associée.
3. En déduire que pour tout $n+1$-uplet de réels $(f_0, \ldots, f_n)$, il existe un unique polynôme P tel que ,

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \; P(x_i) = f_i$$

   Exprimer P en fonction des f_i et des éléments de la base duale caculée dans la question précédente.
4. Application. Trouver l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que, $P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 3$ et $P(3) = 0$