Deuxième contrôle de connaissances.

Durée deux heures. Les documents et les calculatrices sont interdits.
Bon courage.

Exercice 1. Vrai ou Faux ?

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Aucune justification n'est demandée, par contre, une réponse fausse en annule une juste.

1. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, (le $<,>$ désignant le produit scalaire). Alors,
$$\forall x, y \in E, \ | < x, y > | \leq \|x\| \ \|y\|$$
2. Toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k, avec $k < n$. Alors l'annulateur de F, $F^\circ \subset E^*$ est de dimension $n - k$.
4. Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ peut être de rang 2 et avoir pour signature $(1, 2)$.

Exercice 2. Etude d'une forme quadratique complexe.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{C}^4$, définie par,

$$q : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (12 - 16i)xy - 100zt \end{array} \right.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. Appliquer la procédé de réduction de Gauss à q, en déduire son rang.
3. Calculer une base orthogonale pour q, et exprimer la matrice de q dans cette base.
4. Calculer une base de Sylvester pour q et exprimer la matrice de q dans cette base.

Exercice 3. Trigonalisation sans calcul

Soit $A \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est égal à,

$$P_A = (2 - x)^3(1 - x)^2(-x)$$

1. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que tous les sous-espaces propres de A sont de dimension 1. Soit $\mathcal{B}_T$ une base de trigonalisation par blocs de A. Et soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_T$. Donner l'allure de la matrice $P^{-1}AP$. (Indiquer les coefficients nuls, ceux dont on peut connaitre la valeur sans faire de calculs et mettre des "?" pour ceux que l'on ne peut pas déterminer sans faire de calcul).

Tournez la page s.v.p

Exercice 4. Trigonalisation, avec des calculs cette fois ci.

On note $\mathcal{B}_c$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et A la matrice représentant f dans la base canonique.

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.
2. Calculer les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$? est-il trigonalisable ?
4. Calculer une base $\mathcal{B}_T = (v_1, v_2, v_3)$ telle que,

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_T}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_T$, quelle relation lie A, P et T ?
6. Soient D et N les matrices,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que $N^2 = 0$ et que $DN = ND$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^n en fonction de n, D et N.
9. Sans faire de calcul, expliquer comment en déduire la matrice A^n.

Questions bonus (Hors Barème).

10. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui commute avec f, c'est à dire que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que
    (a) $g(v_3) \in \mathrm{Vect}\{v_3\}$
    Indication : On pourra essayer de montrer que si $g(v_3)$ est non nul, alors c'est un vecteur propre pour f associé à 3.
    (b) $g(v_1) \in \mathrm{Vect}\{v_1\}$
    (c) $g(v_2) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$
    Indication : on pourra commencer par écrire $g(v_2)$ comme une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 et considérer $f(g(v_2))$.
11. En déduire que, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_T}(g)$ est de la forme,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_T}(g) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

12. Calculer la dimension du commutant de f c'est à dire du sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ des endomorphismes g vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

Fin.