UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Espaces euclidiens (Solutions)

Exercice 1. Produits scalaires

1. On peut montrer que ϕ est bilinéaire symétrique, mais ce n'est pas nécessaire. Il suffit en fait de remarquer qu'elle n'est pas positive, en effet, soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\phi(u,u) = -1 < 0$. Donc ϕ n'est pas un produit scalaire.
2. Si l'on fait les vérifications (qui sont en fait inutiles au vu de ce qui va suivre), on peut montrer que ϕ est bilinéaire symétrique positive, mais elle n'est pas définie positive. En effet :
$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ \phi(X,X) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$
Le vecteur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\phi(u,u) = 0$ alors qu'il est non nul. Donc ϕ n'est pas un produit scalaire.
3. (a) **Linéarité.** Nous allons montrer que ϕ est linéaire à gauche, (si elle est symétrique elle sera linéaire à droite et cela permettra de conclure quant à la bilinéarité). On rappelle que la trace et la transposition sont des applications linéaires. Soient $A, A', B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \mathrm{tr}({}^t(\lambda A + \mu A')B) &= \mathrm{tr}((\lambda {}^tA + \mu {}^tA')B) \\ &= \mathrm{tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tA'B) \\ &= \lambda \mathrm{tr}({}^tAB) + \mu \mathrm{tr}({}^tA'B) \\ &= \lambda\phi(A,B) + \mu\phi(A',B). \end{aligned}$$
   (b) **Symétrie** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n\mathbb{R}$,
$$\phi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tA.B) = \mathrm{tr}({}^t({}^tA.B)) = \mathrm{tr}({}^tB.{}^t({}^tA)) = \mathrm{tr}({}^tB.A) = \phi(B,A)$$
   N.B. La secondé égalité est dûe au fait que la trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée.
   (c) **Positivité.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n\mathbb{R}$, calculons les coefficients diagonaux de ${}^tAA$.
$$({}^tAA)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$$
   Le coefficient (i,i) de ${}^tAA$ est donc la somme des carrés des coefficients de la i-ème colonne de A. De ce fait
$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum i = 1^n ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$$
   C'est la somme des carrés de **tous** les coefficients de A. Comme la matrice A est à coefficients réels, cette somme est positive et n'est nulle que si tous les coefficients de A sont nuls, c'est à dire que $\phi(A,A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

   Ainsi ϕ est un produit scalaire.
4. L'application ϕ n'est pas un produit scalaire. En effet on pourrait montrer que c'est bien une forme bilinéaire symétrique, mais elle n'est pas définie positive car si l'on prend le polynôme 1, c'est un polynôme non nul et pourtant, $\phi(1,1) = 0$.
5. (a) **Linéarité.** C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.
   (b) **Symétrie.** C'est immédiat. On voit aisément qu'échanger P et Q dans l'expression n'aura pas d'influence sur le résultat.
   (c) **Positivité.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\phi(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)dt$. Or la fonction P^2 est positive sur $[-1,1]$ et l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle est positive. De plus, une telle intégrale est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur cet intervalle (faire un dessin pour s'en convaincre ou se référer à votre cours d'analyse de L1). Donc $\phi(P,P) \geq 0$ et $\phi(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Exercice 2. L'inégalité de Cauchy Schwarz

1. c.f. cours.
2. On commence par vérifier que l'application qui à deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ associe,

$$< P, Q >= \int_a^b P(t)Q(t)dt$$

est bien un produit scalaire. La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale. La symétrie est immédiate. Enfin, on peut montrer que cette forme bilinéaire est définie positive en utilisant le fait que l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle est positive, et que cette intégrale est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Ensuite il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux polynômes P et 1 pour obtenir l'inégalité demandée.

D'après le cours il y a égalité si et seulement si les polynômes 1 et P sont des vecteurs colinéaires ce qui revient à dire que P est un polynôme constant.

3. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. On introduit les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et on applique l'inégalité de Cauchy Schwarz.

$$\begin{array}{rcl} |< X, U >| & \leq & \|X\| \, \|U\| \\ |3x + 2y + 5z| & \leq & \sqrt{38}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (\star) \end{array}$$

Ensuite on remarque que $\sqrt{38} \leq 7$. Remarquons alors que l'égalité n'est possible que si X est nul. En effet si $X \neq 0$, le second membre de l'inégalité $(\star)$ est non nul et $\sqrt{38}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 7\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et l'égalité avec $|3x + 2y + 5z|$ est impossible.

Exercice 3. La quatrième dimension

$$E^\perp = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad F^\perp = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G^\perp = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 4. Relations

1. (a) On développe $\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >$
   (b) Même chose avec $\|x - y\|^2$.
   (c) On fait la somme des relations obtenues précédemment et on en déduit le résultat.
2. C'est une conséquence immédiate du résultat obtenu en (**??**).
3. On commence par remarquer que le résulat précédent permet de démontrer par récurrence que si $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sont des vecteurs 2 à 2 orthogonaux, alors,

$$\|v_1 + \cdots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_k\|^2$$

Ensuite, soit $x \in E$, alors x se décompose de façon unique dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ en $x = x_1.e_1 + \ldots + x_n.e_n$ où les x_i sont des réels. Comme les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont deux à deux ortogonaux, il en est de même pour les vecteurs $x_1.e_1, \ldots, x_n.e_n$ et on peut donc appliquer le résultat précédent à x, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} \|x\|^2 & = & \|x_1.e_1\|^2 + \cdots + \|x_n.e_n\|^2 \\ & = & |x_1|^2\|e_1\|^2 + \cdots + |x_n|^2\|e_n\|^2 \\ & = & |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \end{array}$$

Reste à montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i =< x, e_i >$. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{array}{rcl} < x, e_i > & = & < x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n, e_i > \\ & = & x_1 < e_1, e_i > + \cdots + x_i < e_i, e_i > + \cdots + x_n < e_n, e_i > \end{array}$$

Dans l'expression de droite, tous les termes sont nuls sauf le i-ème qui est égal à x_i. c.q.f.d.

Exercice 5. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
L'orthonormalisation de $\mathcal{B}$ donne,

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 6. Orthonormalisation de Schmidt. (bis)
L'orthonormalisation de la base canonique donne la base,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \sqrt{\frac{3}{2}} X , \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \frac{1}{3}), \frac{5\sqrt{7}}{4\sqrt{11}}(X^3 - \frac{3}{5}X) \right)$$

Exercice 7. Projections orthogonales.

1. On commence par rappeler que la projection P_F étant orthogonale, son image est F et son noyau $F^\perp$. Soient $x \in E$ et $y \in F$, x se décompose de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$ de la façon suivante,
$$x = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x)}_{\in F}$$
Le premier terme est dans $F^\perp$ car il est dans le noyau de p_F (pourquoi ?).
On a alors,
$$\|x - y\|^2 = \| \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F} \|^2$$
On utilise alors le résultat de l'exercice précédent et on déduit que,
$$\|x - y\|^2 = \| \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} \|^2 + \| \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F} \|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$
D'ou le résultat.
2. D'après la question précédente, on a que $d(x, F) \geq \|x - p_F(x)\|$. Comme $p_F(x) \in F$, on peut également dire que $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$. D'où l'égalité attendue.
3. Soit p l'endomorphisme de E défini par :
$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} < x, e_i > e_i$$
p est une application linéaire, pour montrer que c'est un projection, il faut montrer que $p \circ p = p$. Remarquons que comme p est linéaire, $p \circ p$ aussi et que si l'on montre que pour tout i, $p \circ p(e_i) = p(e_i)$ l'égalité recherchée s'en déduira par linéarité. Or un calcul simple permet de montrer que,
$$p(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si} \quad i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(la vérfication est laissée au lecteur)
On peut alors conclure assez facilement que p est bien une projection, mais également que son image est F et son noyau, $F^\perp$. Donc $p = p_F$.
De fait la distance de x à F est donnée par $\|x - p_F(x)\|$, or,
$$x - p_F(x) = \sum_{i=k+1}^{n} < x, e_i > e_i$$
On obtient donc la formule suivante,
$$d(x, F) = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} < x, e_i >^2}$$

4. Par le procéde d'orthonormalisation de Schmidt, on construit une base orthonormale de F.

$$\mathcal{B}_o = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

   On note e_1 et e_2 les deux éléments de cette base. On a alors : $p_F(u) =< u, e_1 > e_1 + < u, e_2 > e_2 = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. $\|u - p_F(u)\| = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Exercice 8. Le produit vectoriel.

1. Le déterminant est une forme trilinéaire, donc l'application $\varphi_{u,v}$ est une forme linéaire.
2. Il y a une équivalence à démontrer, il faut donc montrer deux implications.
   (a) Supposons $\varphi_{u,v} = 0$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \det(u, v, x) = 0$. Soit $x \notin \mathrm{Vect}\{u, v\}$, si $\det(u, v, x) = 0$, cela signifie que la famille (u, v, x) est liée, or $x \notin \mathrm{Vect}\{u, v\}$, donc les vecteurs u et v sont liés.
   (b) Si u et v sont colinéaires, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la famille (u, v, x) est liée et donc $\det(u, v, x) = 0$.
3. C'est le théorème de Riesz (c.f. cours).
4. Soient

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

5. Propriétés connues du produit vectoriel.
   (a) Soit $w = u \wedge v$, montrons que x est orthogonal à u et à v. $< w, u >= \det(u, v, u) = 0$, donc w est orthogonal à u et un raisonnement analogue permet de montrer que w est orthogonal à v.
   (b) C'est une conséquence de la mutilinéairté du déterminant.
   (c) C'est une conséquence du fait que pour tout x, $\det(u, v, x) = -\det(v, u, x)$.