UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2006-07**

UE : Algèbre S3 (MI0A08) - Régime contrôle continu

Contrôle de connaissances.

Durée deux heures. Les documents et les calculatrices sont interdits.
Bon courage.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f un endomorphisme de E. Donner la définition d'une valeur propre de f.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Aucune justification n'est demandée, par contre, une réponse fausse en annule une juste.
   (a) $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
   (b) $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
   (c) Une matrice inversible n'admet jamais 0 pour valeur propre.
   (d) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $\bar{\lambda}$ l'est aussi.
   (e) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
   (f) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à la dimension de n, alors A est digonalisable.

Exercice 2. Diagonalisation.

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & -2-i \\ 1-i & 1 & -1-i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer et factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme caractéristique P_A.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A et calculer une base de chaque sous-espace propre associé.
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui donner une matrice de passage P, donner la matrice diagonale D_A obtenue ainsi que la relation qui lie A, P et D_A.
4. Mêmes questions pour la matrice B.
5. Calculer A^8.

Tournez la page s.v.p

Exercice 3.

Dans cet exercice on rappelle que la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplictés.

On considère la matrice carrée suivante,

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

1. Donner le rang de M_n. La matrice M_n est-elle inversible ?
2. Donner l'ensemble des valeurs propres de M_n ainsi que leurs multipicités et les dimensions des sous-espaces propres associés (en fonction de n).
3. En déduire que M_n est digonalisable, donner une base de diagonalisation et représenter matriciellement l'endomorphisme associé à M_n dans cette base de diagonalisation.

Exercice 4. Exercice Bonus, hors barème.

Soit f l'endomorphisme suivant,

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(a) Montrer que f admet 1 et -1 pour valeurs propres.

(b) Calculer des bases des sous-espaces propres associées, l'endomorphisme a-t-il d'autres valeurs propres ? Est-il diagonalisable ?

Fin.