UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2007-08**
UE : Algèbre S3
Alain COUVREUR
mail : couvreur@univ-tlse2.fr
perso : www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Espaces euclidiens

Exercice 1. Produits scalaires.
Les applications suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1. Sur $\mathbb{R}^2$, $\phi\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,X') & \longmapsto & xy'+yx'+yy' \end{array}\right.$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$, $\phi\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,X') & \longmapsto & xx'+yy'+xy'+yx' \end{array}\right.$.
3. Sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\times\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^tA.B) \end{array}\right.$.
4. Sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, $\phi\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \int_0^1 P(x)Q'(x)+P'(x)Q(x)dx \end{array}\right.$.
5. Sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, $\phi\ :\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx \end{array}\right.$.

Exercice 2. L'inégalité de Cauchy Schwarz.

1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy Schwarz. Dans quels cas y a-t-il égalité ?
2. Soient a et b deux nombres réels disctincts, avec $a<b$. Montrer que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$,
$$\left(\int_a^b P(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b (P(t))^2dt$$
Pour quels polynômes y a-t-il égalité ?
3. Montrer que pour tous triplet de réels (x,y,z), on a,
$$|3x+2y+5z|\leq 7\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Exercice 3. La quatrième dimension.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. Donner une base du supplémentaire orthogonal des espaces vectoriels suivants.

$$E=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\},\quad F=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad G=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Exercice 4. Relations .
Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien de dimension n.

1. Montrer que pour tout couple $(x,y)\in E^2$,
   (a) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2<x,y>$
   (b) $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>$
   (c) $2(\|x\|^2+\|y\|^2)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$
2. Soient x et y deux vecteurs orthogonaux de E, montrer que $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$
3. Soit $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, montrer que
$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^n <x,e_i>^2$$

Exercice 5. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Orthonormaliser la base suivante.

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 6. Orthonormalisation de Schmidt. (bis)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant,

$$\forall\ (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2,\ < P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Orthonormaliser la base canonique, c'est à dire la base $(1, X, X^2, X^3)$.

Exercice 7. Projections orthogonales.
Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projection orthogonale sur F et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

1. Soit $x \in E$, montrer que,
$$\forall y \in F,\ \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$$
(Utiliser le résultat de l'exercice **??**)
2. En déduire que, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, où $d(x, F)$ désigne la distance de x à F.
3. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$, une base orthonormale de F, montrer que,
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} < x, e_i > e_i$$
En déduire une formule explicite de la distance de x à F en fonction de x et des $e_1, \ldots, e_n$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique. Calculer le projeté orthogonal de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur l'espace vectoriel $F = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
5. Quelle est la distance entre u et F ?

Exercice 8. Le produit vectoriel.
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et soit $\varphi_{u,v}$ l'application,

$$\varphi_{u,v} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \det(u, v, x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\varphi_{u,v}$ est une forme linéaire.
2. Montrer que $\varphi_{u,v} = 0 \iff u$ et v sont colinéaires.
3. Montrer qu'il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \varphi_{u,v}(x) =< w, x >$. Ce vecteur sera noté $w = u \wedge v$ et sera appelé produit vectoriel de u par v.
4. Exprimer les coordonnées de $u \wedge v$ en fonction de celles de u et v.
5. Déduire de sa construction les propriétés connues du produit vectoriel.
   (a) $u \wedge v \in \text{Vect}\{u, v\}^\perp$.
   (b) Le produit vectoriel est bilinéaire.
   (c) Le produit vectoriel est antisymétrique.