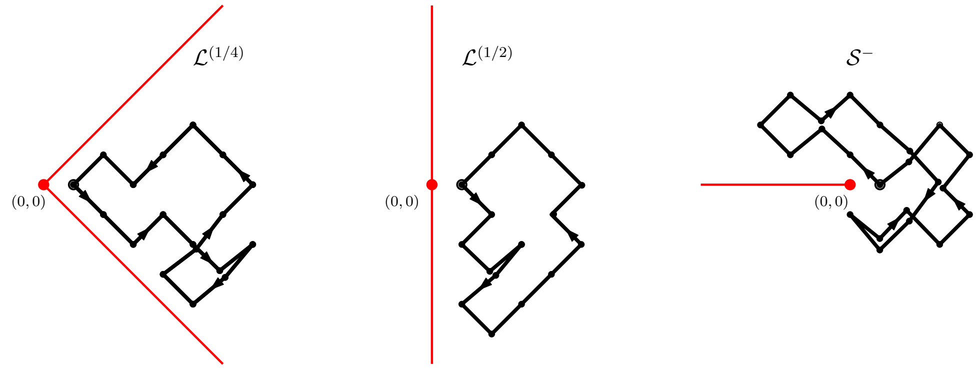
Aspects algorithmiques de la combinatoire (deuxième période)
Exercices du 21/2/25

Exercice 1 : Génération de chemins à pas diagonaux (7 points)

On considère des boucles dans $\mathbb{Z}^2$ à pas $\{(\pm 1, \pm 1)\}$, issus du point $(1, 0)$, et soumis à différentes restrictions illustrées par la figure ci-dessous :



On considère tout d'abord les chemins de $\mathcal{L}_{2n}^{(1/4)}$ formés de $2n$ pas, partant et revenant au point $(1, 0)$ et qui ne visitent que les points (x, y) avec $-x < y < x$ (quart de plan).

1. Montrer que

$$|\mathcal{L}_{2n}^{(1/4)}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \cdot \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} \cdot \frac{1}{n-k+1}\binom{2n-2k}{n-k}$$

à l'aide d'un argument de mélange de deux chemins de longueur respective $2k$ et $2(n-k)$ pris dans une famille de chemins classiques. En déduire un algorithme de tirage aléatoire uniforme des chemins de $\mathcal{L}_{2n}^{(1/4)}$ et discuter la complexité en temps et en espace des différentes étapes.

2. Montrer que le nombre de chemins de la question précédente peut se réécrire plus simplement à l'aide de l'identité de Chu-Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1} = \binom{2n+2}{n+2}.$$

et en déduire l'asymptotique du nombre de ces chemins quand n tend vers l'infini.

3. Donner une interprétation combinatoire de l'identité de Chu-Vandermonde et en déduire une façon de choisir en temps linéaire la valeur de k nécessaire au tirage des chemins de $\mathcal{L}_{2n}^{(1/4)}$ par la méthode de mélange.

(On ne demande pas de donner une preuve combinatoire de la formule simplifiée pour $\mathcal{L}_{2n}^{(1/4)}$: c'est possible mais assez difficile, cf Cori-Dulucq-Viennot 1986, Bernardi 2007.)

On considère maintenant les chemins de $\mathcal{L}_{2n}^{(1/2)}$, constitué de $2n$ pas, issus de $(1, 0)$ et y revenant, et qui ne visitent que des points de coordonnée (x, y) avec $x > 0$ (demi-plan).

4. Donner un algorithme pour le tirage aléatoire uniforme des chemins de $\mathcal{L}_{2n}^{(1/2)}$ à l'aide d'un argument de bicoloriage de pas appliqué à une famille de chemins classique. Quelle est la complexité de l'algorithme obtenu ?

Finalement on considère les chemins de $\mathcal{S}_{2n}^{-}$, constitué de $2n$ pas, issus de $(1, 0)$ et y revenant, et qui ne visitent pas les points de la forme $(x, 0)$ avec $x \leqslant 0$ (quatre quart de plan). Remarquer que ces chemins se décomposent en séquences de boucles *premières*, qui ne visitent pas le point $(1, 0)$ en dehors du premier et dernier pas. On peut montrer (ce n'est pas demandé ici) plus généralement que l'étude des chemins de $\mathcal{S}_{2n}^{-}$ se ramène à celle des chemins de $\mathcal{S}_{2n}'$ issus du point $(0, 0)$ et finissant au point $(2, 0)$ sans jamais revisiter les points de coordonnée $(x, 0)$ avec $x \leqslant 0$ après leur premier pas.

5. En combinant un principe de réflexion avec une conjugaison au niveau du $i$ème pas de w, donner une bijection entre les paires (w, i) où w est un chemin de $\mathcal{S}'_{2n}$ et $i \in [\![0, 2n-1]\!]$, et les chemins dans $\mathbb{Z}^2$ constitués de $2n$ pas de $\{(\pm 1, \pm 1)\}$, issus de l'origine et terminant sur la droite verticale d'équation $x = 2$.

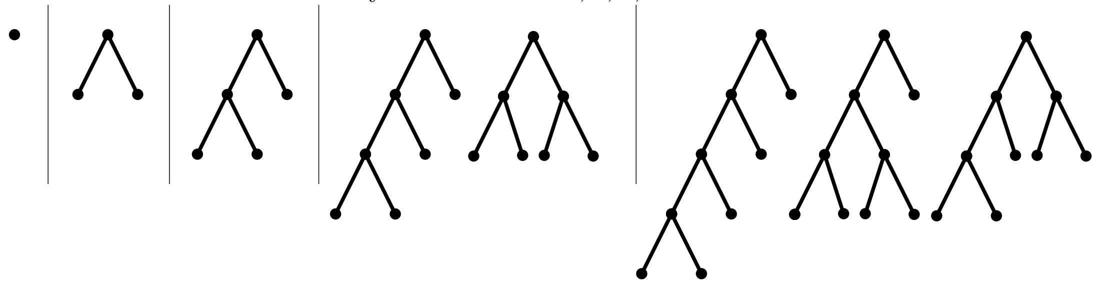
6. Déduire de la question précédente un algorithme de génération pour les chemins de $\mathcal{S}'_{2n}$.

Exercice 2 : Random generation of unlabeled free binary trees

The set $\mathcal{U}_n$ of unlabeled free binary trees of size n can be defined as follows :

- For $n = 1$ there is a unique unlabeled free binary tree with one node.
- For $n > 1$ each unlabeled free binary tree of size n consists of a root vertex carrying an unordered pair of unlabeled free binary trees with respective size k, $n-1-k$ for some $1 \leqslant k \leqslant n-2-k$.

The first few unlabeled free binary trees for $n = 1, 3, 5, 7$ are :



Observe that all (unlabeled free) binary trees have odd size and let $\mathcal{U} = \cup_{n \geqslant 0} \mathcal{U}_{2n+1}$. Finally let $U(z) = \sum_{a \in \mathcal{U}} z^{|a|}$ be the ordinary generation funtion of unlabelled free trees.

1. Show that $U(z) = z + \frac{z}{2}U(z)^2 + \frac{z}{2}U(z^2)$.

2. Give the pseudocode of a Boltzmann sampler for the class $\mathcal{U}$.

3. Give the pseudocode of a recursive uniform sampler for the class $\mathcal{U}_{2n+1}$.