

# Comptons des cartes !

Gilles Schaeffer

LIX, CNRS/École Polytechnique

~~Comptons des cartes !~~

Gilles Schaeffer

LIX, CNRS/École Polytechnique

~~Comptons des cartes !~~

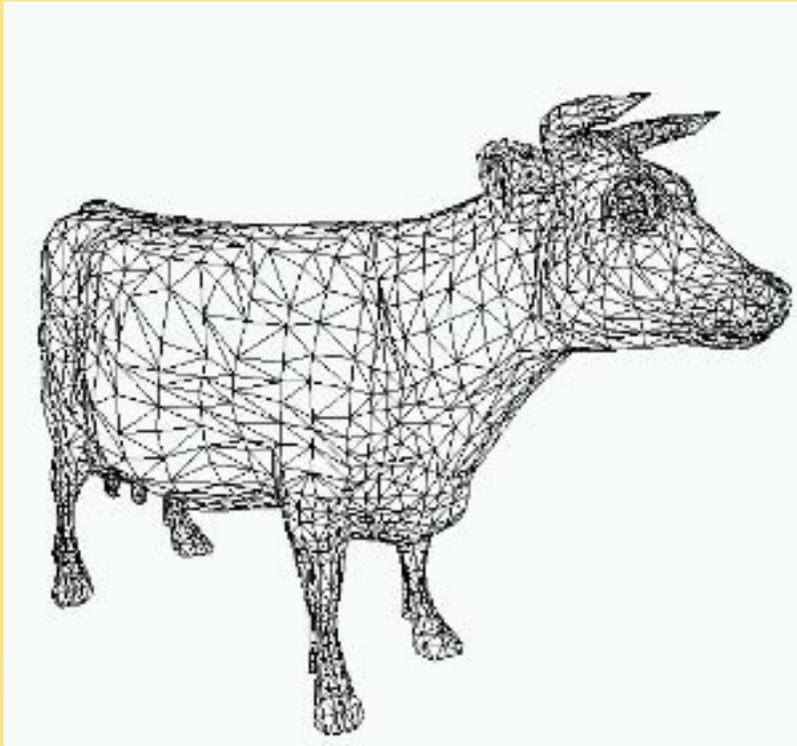
Compression monorésolution optimale de  
maillages polygonaux de topologie sphérique

Gilles Schaeffer

LIX, CNRS/École Polytechnique

Un théorème de compression monorésolution optimale  
des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique

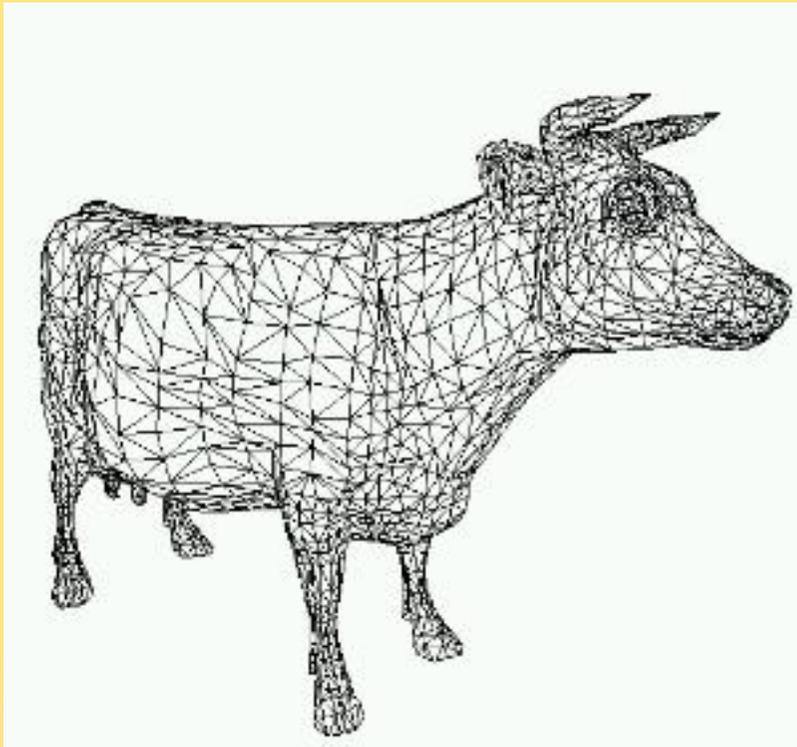
# Un théorème de compression monorésolution optimale des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique



géométrie  
(coordonnées sommets)

combinatoire  
(la carte sous-jacente)

# Un théorème de compression monorésolution optimale des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique



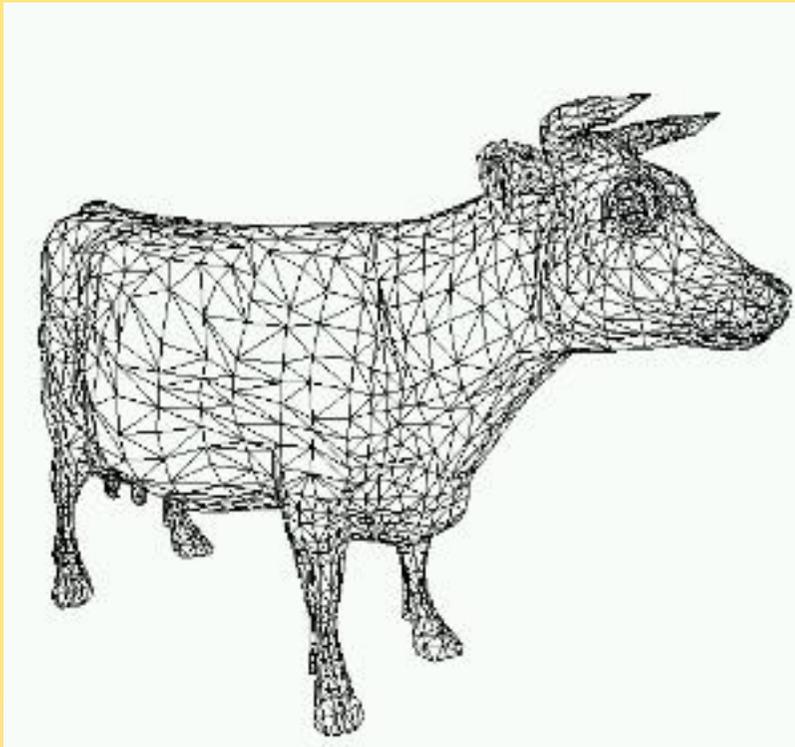
géométrie  
(coordonnées sommets)

32 bits/arêtes

combinatoire  
(la carte sous-jacente)

224 bits/arêtes

# Un théorème de compression monorésolution optimale des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique



géométrie  
(coordonnées sommets)

32 bits/arêtes

combinatoire  
(la carte sous-jacente)

224 bits/arêtes

D'où une importante littérature sur la compression de la combinatoire

224 bits/arêtes  $\longrightarrow$  4 bits/arêtes

(Rosignac et al, 90's + dizaines d'articles)

# Un théorème de compression monorésolution optimale des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

Il existe un algorithme linéaire pour le codage (et le décodage) d'une carte 3-connexe planaire ayant  $n$  arêtes par un mot binaire de longueur  $2n$  (soit 2 bits/arêtes).

# Un théorème de compression monorésolution optimale des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

Il existe un algorithme linéaire pour le codage (et le décodage) d'une carte 3-connexe plane ayant  $n$  arêtes par un mot binaire de longueur  $2n$  (soit 2 bits/arêtes).

Comme  $\log_2 \#\{\text{graphes}\} = 2n + O(\log n)$ ,  
ce taux de compression est optimal.

~~Un théorème de compression monorésolution optimale  
des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique~~

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

Il existe un algorithme linéaire pour le codage (et le décodage) d'une carte 3-connexe plane ayant  $n$  arêtes par un mot binaire de longueur  $2n$  (soit 2 bits/arêtes).

Comme  $\log_2 \#\{\text{graphes}\} = 2n + O(\log n)$ ,  
ce taux de compression est optimal.

~~Un théorème de compression monorésolution optimale  
des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique~~

Un codage de cartes par des arbres

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

Il existe un algorithme linéaire pour le codage (et le décodage) d'une carte 3-connexe plane ayant  $n$  arêtes par un mot binaire de longueur  $2n$  (soit 2 bits/arêtes).

Comme  $\log_2 \#\{\text{graphes}\} = 2n + O(\log n)$ ,  
ce taux de compression est optimal.

~~Un théorème de compression monorésolution optimale  
des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique~~

Un codage de cartes par des arbres

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

Il existe une **jolie quasi-bijection** entre  
des **cartes** 3-connexes planaires ayant  $n$  arêtes  
et des **arbres binaires** à  $n$  sommets

Comme  $\log_2 \#\{\text{graphes}\} = 2n + O(\log n)$ ,  
ce taux de compression est optimal.

~~Un théorème de compression monorésolution optimale  
des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique~~

Un codage de cartes par des arbres

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

Il existe une **jolie quasi-bijection** entre  
des **cartes** 3-connexes planaires ayant  $n$  arêtes  
et des **arbres binaires** à  $n$  sommets

qui explique la formule (Mullin et Schellenberg, 1968):

$$\#\{\text{dissections d'un hexagone en } n + 2 \text{ carrés}\} = \frac{6}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

~~Un théorème de compression monorésolution optimale  
des maillages polygonaux bidimensionnel de topologie sphérique~~

Un codage de cartes par des arbres

**Théorème** [Fusy, Poulalhon, S., *ACM Trans. on Algorithms*, 08]

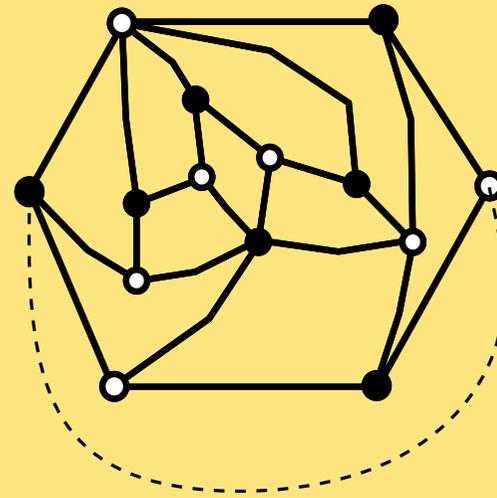
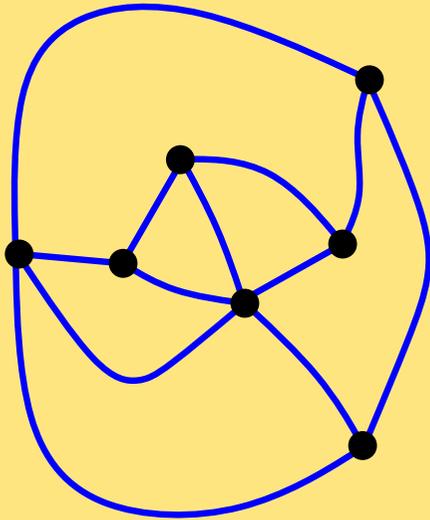
Il existe une **jolie quasi-bijection** entre  
des **cartes** 3-connexes planaires ayant  $n$  arêtes  
et des **arbres binaires** à  $n$  sommets

qui explique la formule (Mullin et Schellenberg, 1968):

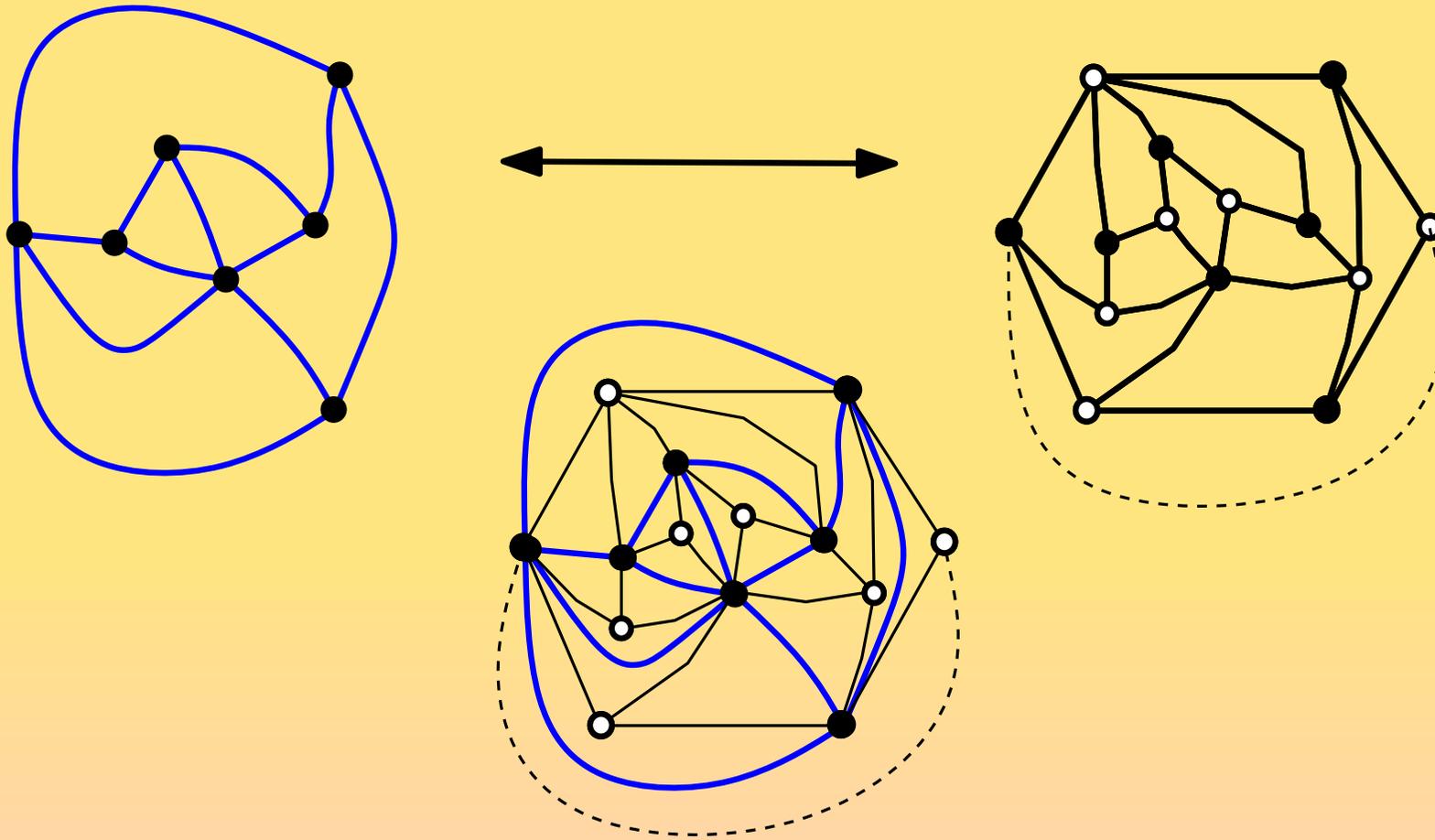
$$\#\{\text{dissections d'un hexagone en } n + 2 \text{ carrés}\} = \frac{6}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Comptons des cartes !

Étape 1 (classique): cartes 3-connexes = quadrangulations  
(d'un hexagone)

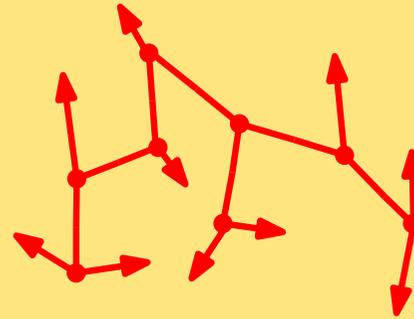
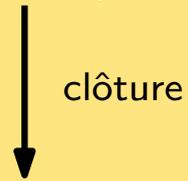


Étape 1 (classique): cartes 3-connexes = quadrangulations  
(d'un hexagone)



## Deuxième étape: avant goût d'une bijection....

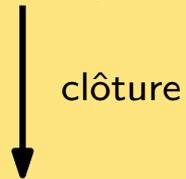
Un arbre binaire complet  
(non enraciné)



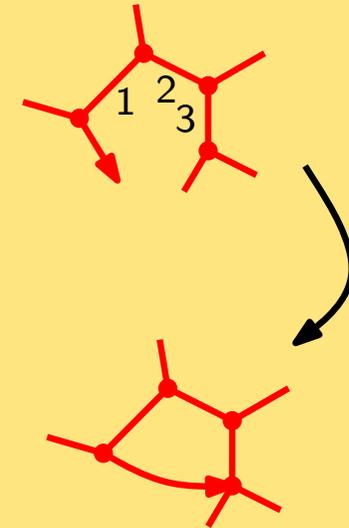
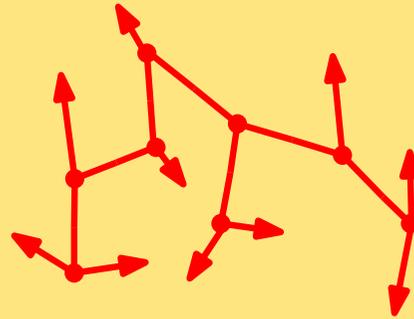
Dissection d'un hexagone  
en carrés

# Deuxième étape: avant goût d'une bijection....

Un arbre binaire complet  
(non enraciné)



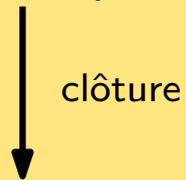
Dissection d'un hexagone  
en carrés



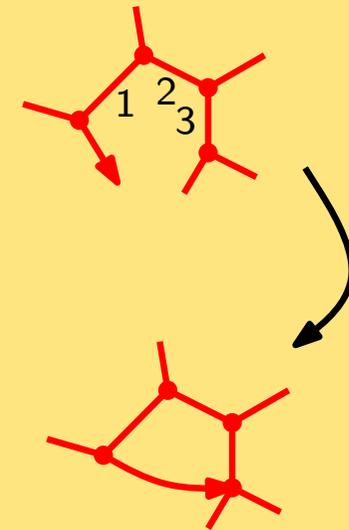
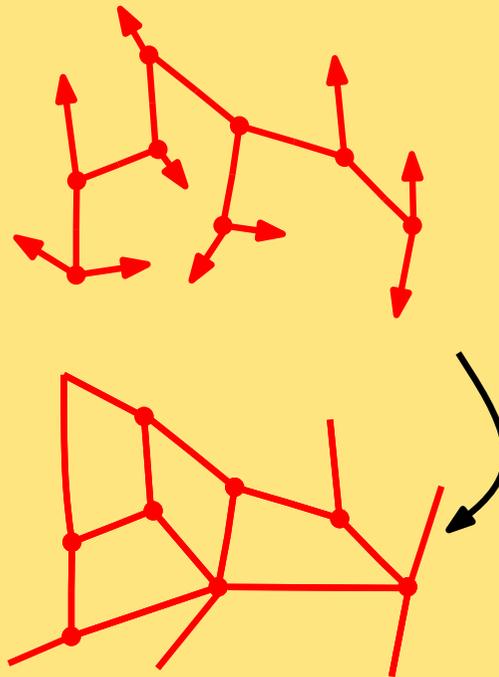
règle  
de clôture

## Deuxième étape: avant goût d'une bijection....

Un arbre binaire complet  
(non enraciné)



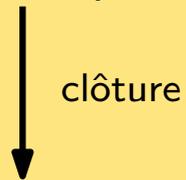
Dissection d'un hexagone  
en carrés



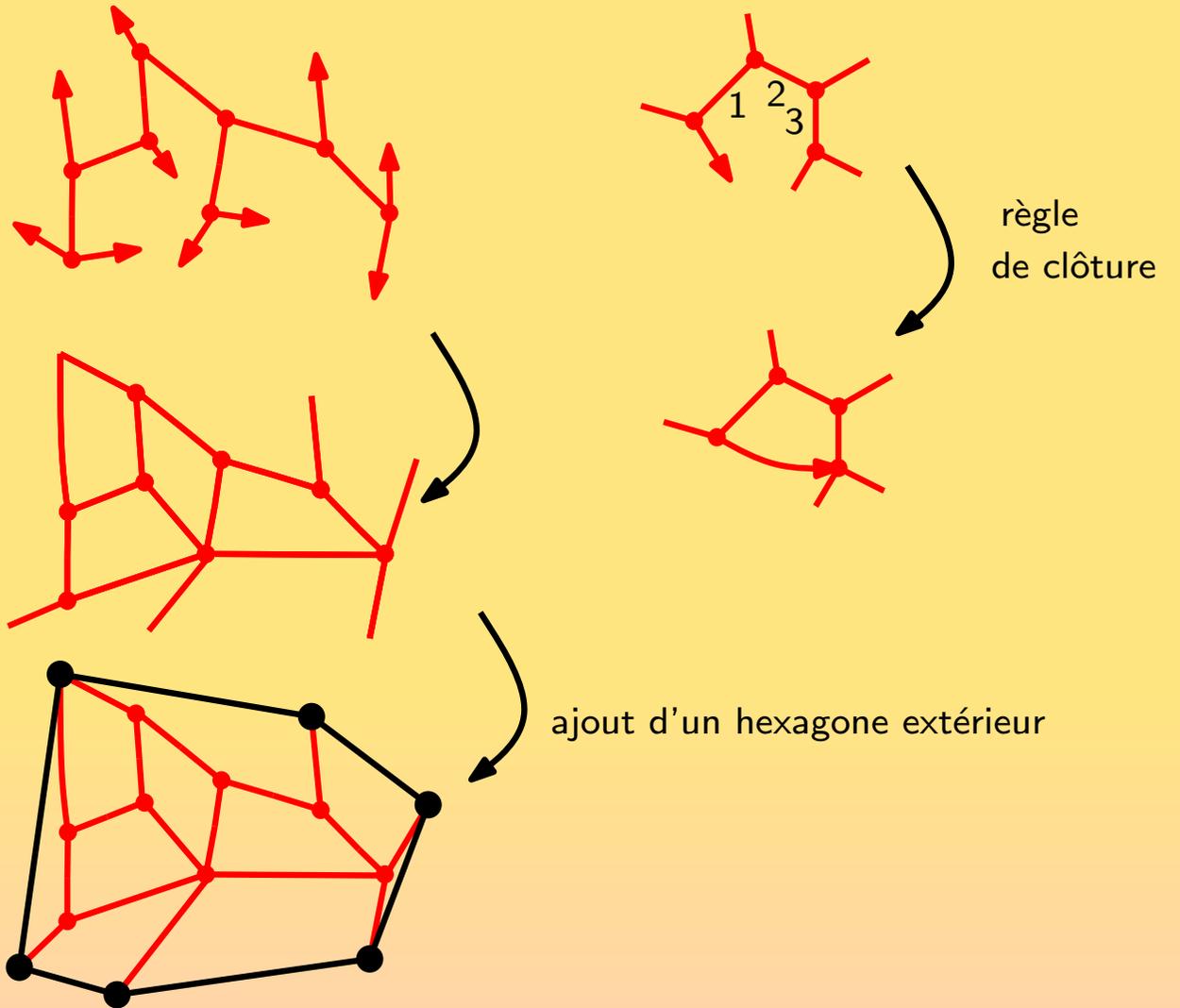
règle  
de clôture

# Deuxième étape: avant goût d'une bijection....

Un arbre binaire complet  
(non enraciné)

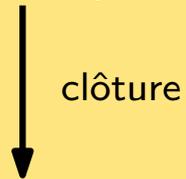


Dissection d'un hexagone  
en carrés



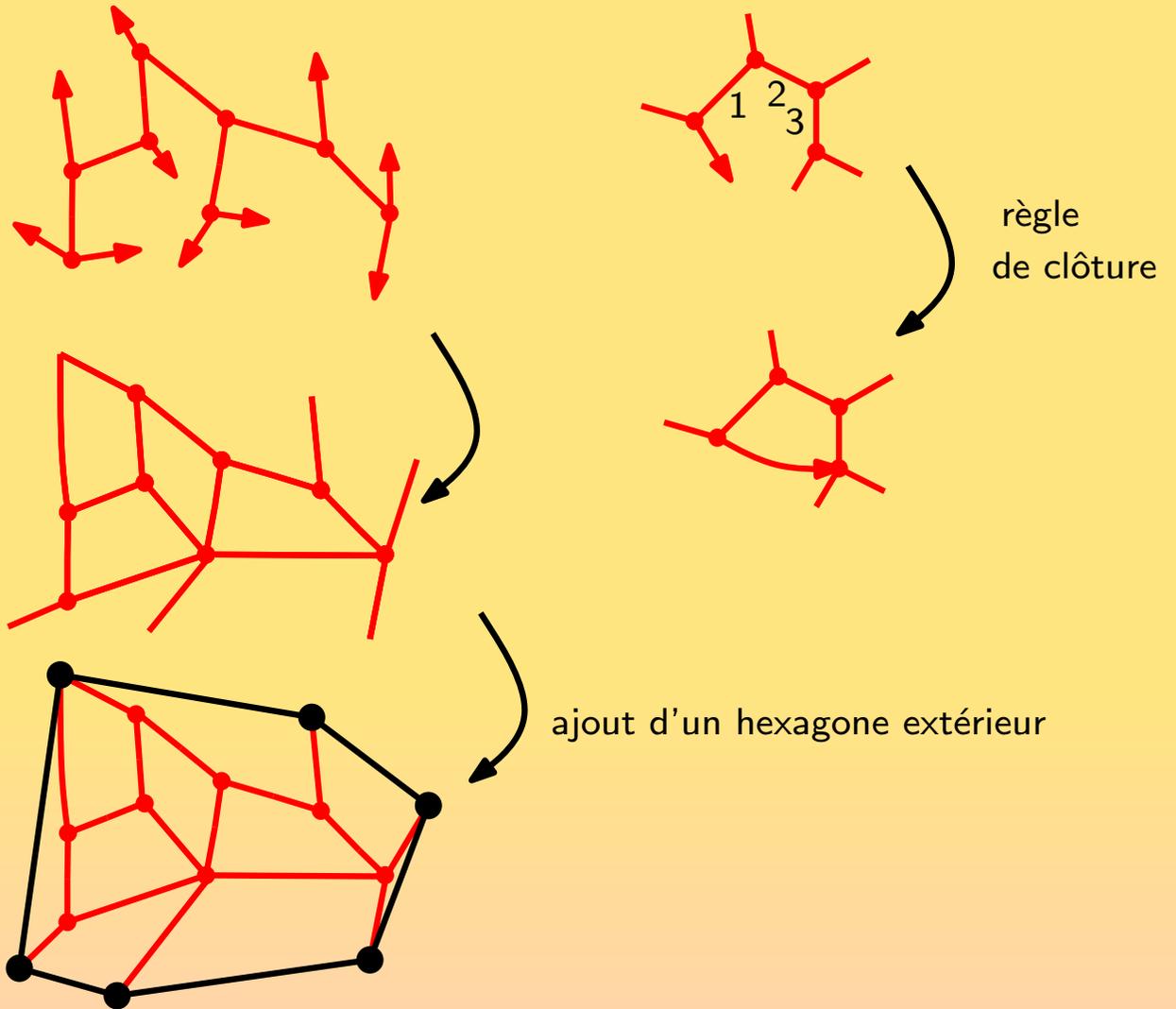
# Deuxième étape: avant goût d'une bijection....

Un arbre binaire complet  
(non enraciné)



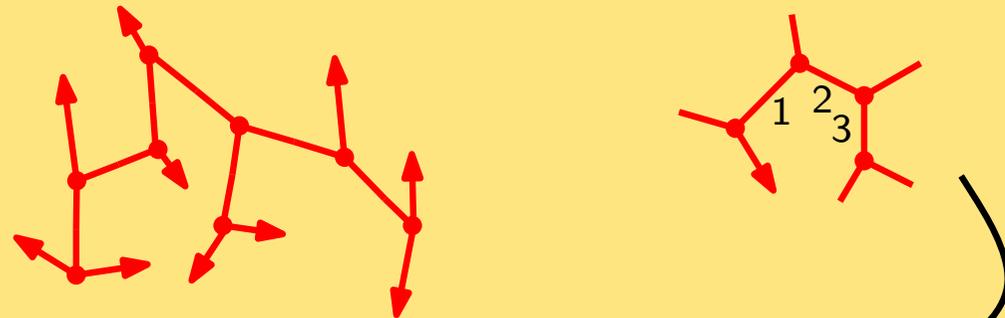
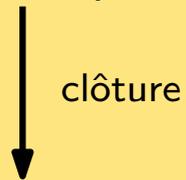
Dissection d'un hexagone  
en carrés

**Théorème. (FPS)**  
C'est une bijection

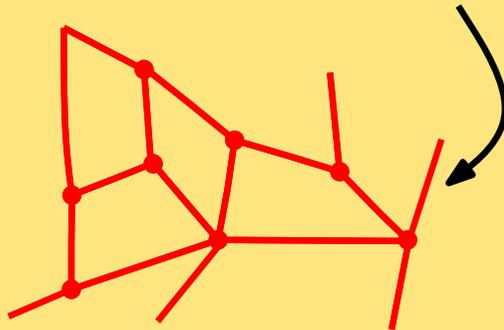


# Deuxième étape: avant goût d'une bijection....

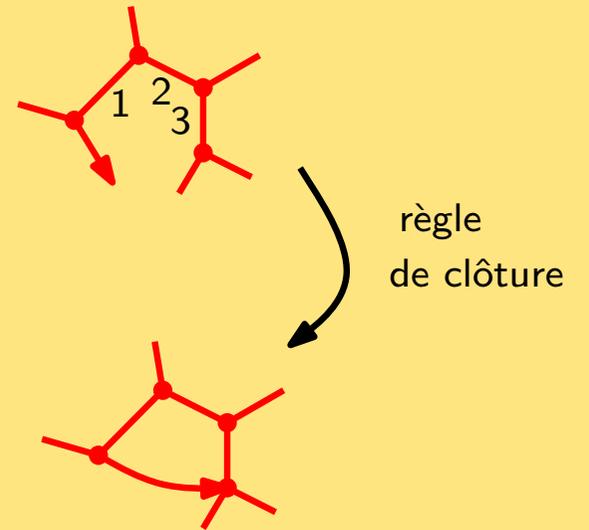
Un arbre binaire complet  
(non enraciné)



Dissection d'un hexagone  
en carrés

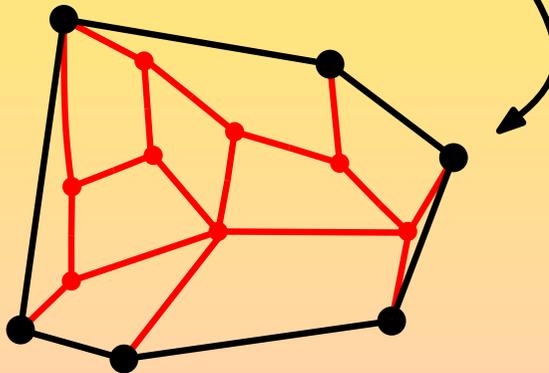


**Théorème. (FPS)**  
C'est une bijection



Réciproque ?

Difficile...  
cf Fusy pour une idée



ajout d'un hexagone extérieur

Aujourd'hui:  
quelques autres bijections  
qui nous ont inspirées

On reprend par le début

William T. Tutte, 1962

Le nombre de **slicings** ayant  $d_i$  sommets de degré  $2i$  est:

$$\frac{2(n+1)!}{\ell!} \prod_{i \geq 1} \binom{2i-1}{i}^{d_i} \frac{1}{d_i!} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = \#\{\text{arêtes}\} \\ \ell = \#\{\text{faces}\} \end{cases}$$

## On reprend par le début

William T. Tutte, 1962

Le nombre de **slicings** ayant  $d_i$  sommets de degré  $2i$  est:

$$\frac{2(n+1)!}{\ell!} \prod_{i \geq 1} \binom{2i-1}{i}^{d_i} \frac{1}{d_i!} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = \#\{\text{arêtes}\} \\ \ell = \#\{\text{faces}\} \end{cases}$$

Tutte, Brown, Mullin, Schellenberg, etc. 1963–1968

Composition des séries et méthode quadratique

⇒ une dizaine de séries génératrices de cartes algébriques

## On reprend par le début

William T. Tutte, 1962

Le nombre de **slicings** ayant  $d_i$  sommets de degré  $2i$  est:

$$\frac{2(n+1)!}{\ell!} \prod_{i \geq 1} \binom{2i-1}{i}^{d_i} \frac{1}{d_i!} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = \#\{\text{arêtes}\} \\ \ell = \#\{\text{faces}\} \end{cases}$$

Tutte, Brown, Mullin, Schellenberg, etc. 1963–1968

Composition des séries et méthode quadratique

⇒ une dizaine de séries génératrices de cartes algébriques

Schützenberger à Cori, milieu des années 60.

*Quand même, on voudrait la comprendre cette algébricité!*

## On reprend par le début

William T. Tutte, 1962

Le nombre de **slicings** ayant  $d_i$  sommets de degré  $2i$  est:

$$\frac{2(n+1)!}{\ell!} \prod_{i \geq 1} \binom{2i-1}{i}^{d_i} \frac{1}{d_i!} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = \#\{\text{arêtes}\} \\ \ell = \#\{\text{faces}\} \end{cases}$$

Tutte, Brown, Mullin, Schellenberg, etc. 1963–1968

Composition des séries et méthode quadratique

⇒ une dizaine de séries génératrices de cartes algébriques

Schützenberger à Cori, milieu des années 60.

*Quand même, on voudrait la comprendre cette algébricité!*

*i.e. avoir un codage par un langage algébrique*

## Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

## Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

⇒ Une première preuve d'algébricité par caractérisation d'un langage code comme différence de 2 langages algébriques.

## Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

⇒ Une première preuve d'algébricité par caractérisation d'un langage code comme différence de 2 langages algébriques.

Cori, Richard 72

Opérateurs sur les séries non-commutatives et algébricité

## Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

⇒ Une première preuve d'algébricité par caractérisation d'un langage code comme différence de 2 langages algébriques.

Cori, Richard 72

Opérateurs sur les séries non-commutatives et algébricité

⇒ Un résultat d'algébricité général à la Bousquet-Mélou-Jehanne

## Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

⇒ Une première preuve d'algébricité par caractérisation d'un langage code comme différence de 2 langages algébriques.

Cori, Richard 72

Opérateurs sur les séries non-commutatives et algébricité

⇒ Un résultat d'algébricité général à la Bousquet-Mélou-Jehanne

Cori, 75 (astérisque) ... *notre travail clôt, dans une certaine mesure, l'étude de l'algébricité des séries génératrices des cartes planaires, ...*

## Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

⇒ Une première preuve d'algébricité par caractérisation d'un langage code comme différence de 2 langages algébriques.

Cori, Richard 72

Opérateurs sur les séries non-commutatives et algébricité

⇒ Un résultat d'algébricité général à la Bousquet-Mélou-Jehanne

Cori, 75 (astérisque) ... *notre travail clôt, dans une certaine mesure, l'étude de l'algébricité des séries génératrices des cartes planaires, ...*

*cependant....* • 14 pages de combinatoire virtuose des mots

• ou autant de calcul sur les séries non commutatives

# Premiers codages

Cori, Lehman, Lenormand 70's

Explorer la carte en profondeur, et coder les opérations effectuées par des mots.

⇒ Une première preuve d'algébricité par caractérisation d'un langage code comme différence de 2 langages algébriques.

Cori, Richard 72

Opérateurs sur les séries non-commutatives et algébricité

⇒ Un résultat d'algébricité général à la Bousquet-Mélou-Jehanne

Cori, 75 (astérisque) ... *notre travail clôt, dans une certaine mesure, l'étude de l'algébricité des séries génératrices des cartes planaires, ...*

*cependant....* • 14 pages de combinatoire virtuose des mots

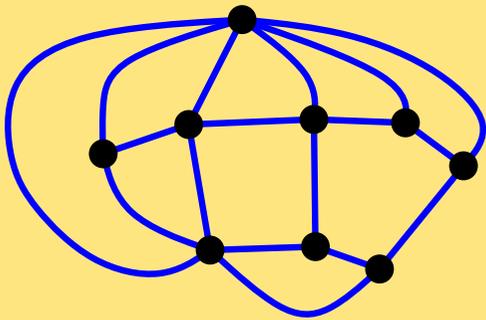
• ou autant de calcul sur les séries non commutatives

$$\text{expliquent ils} \quad \# \left\{ \begin{array}{l} \text{cartes planaires} \\ \text{à } n \text{ arêtes} \end{array} \right\} = \frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

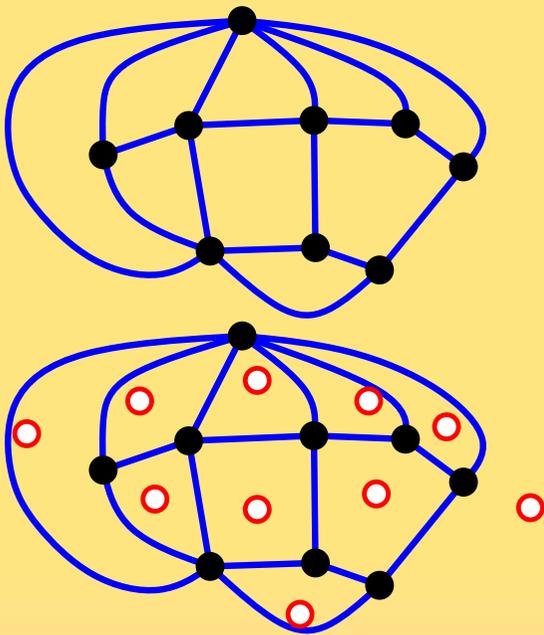
Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

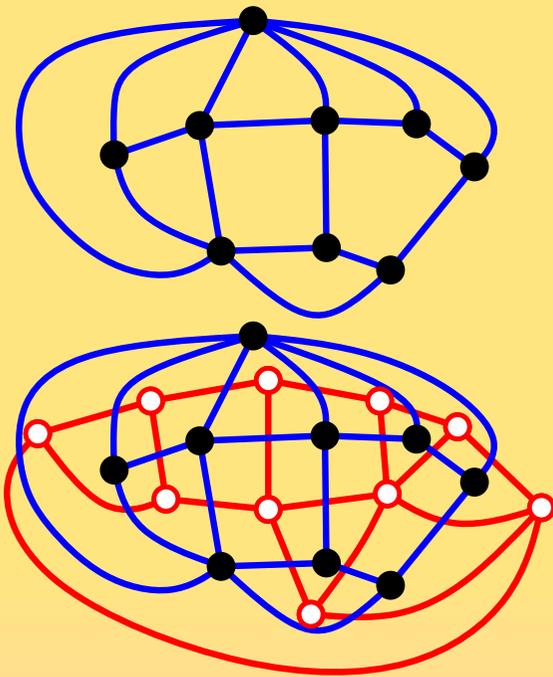
Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

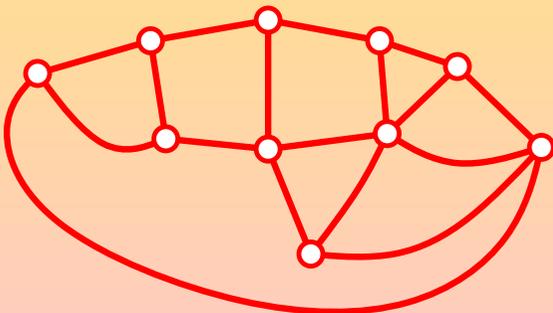
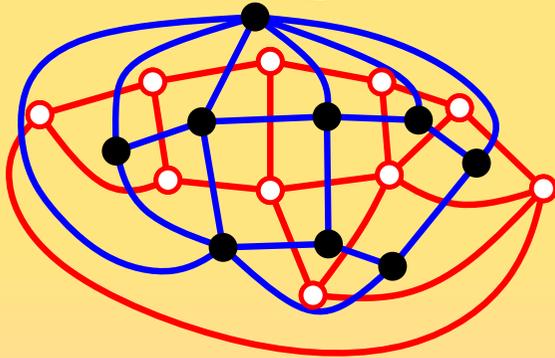
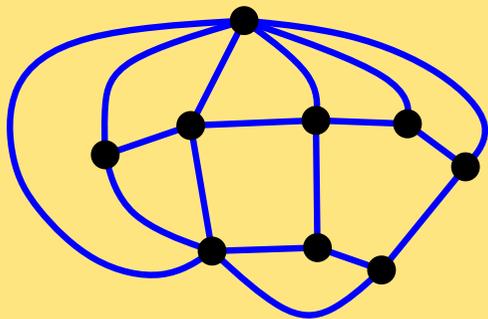
Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

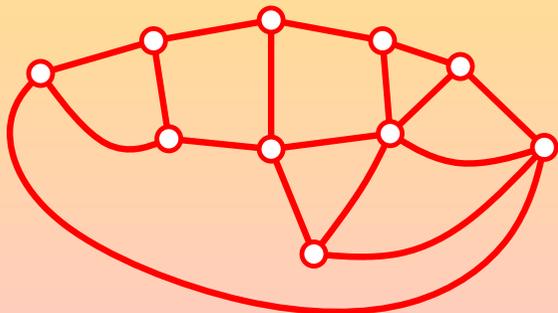
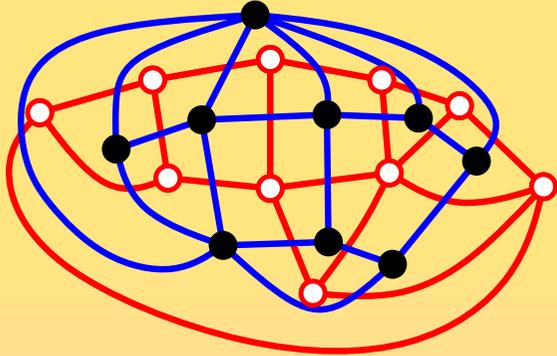
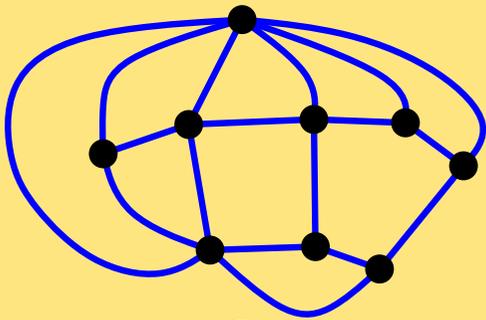
Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$

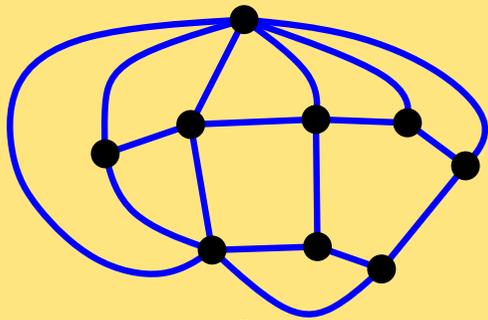


**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

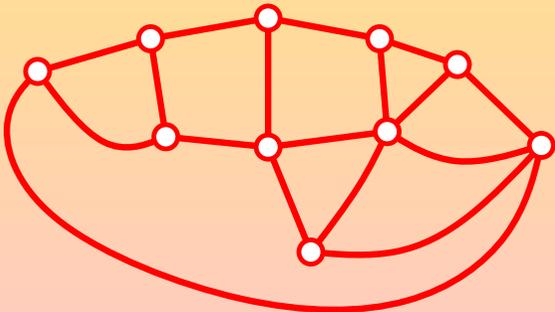
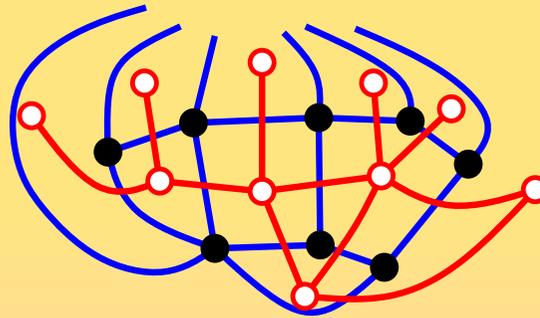
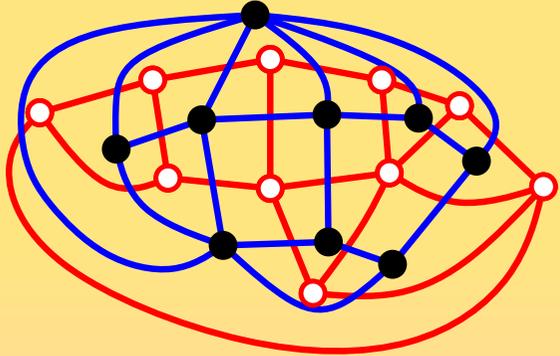
# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



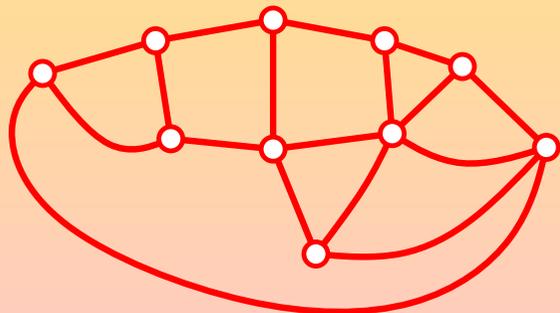
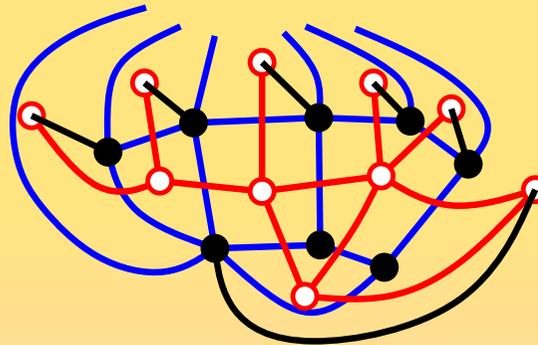
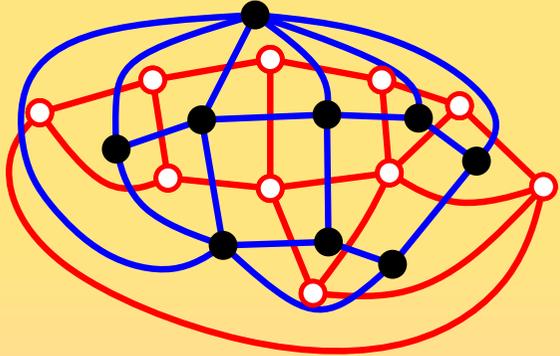
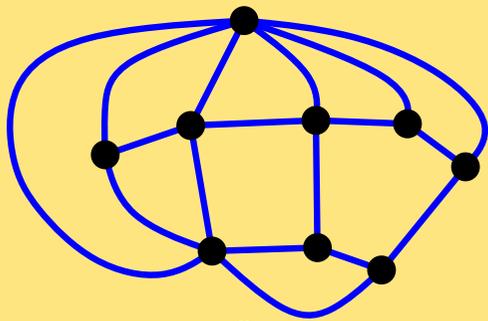
**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$

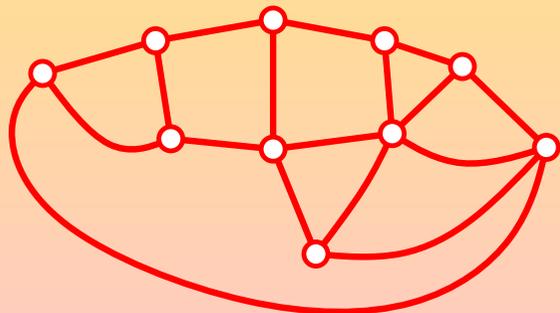
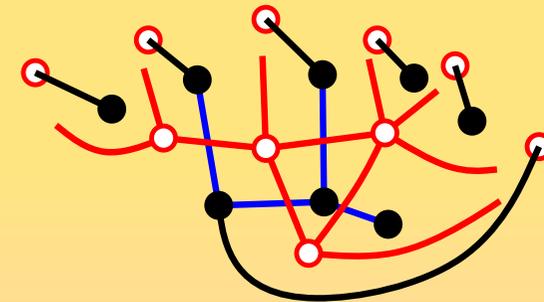
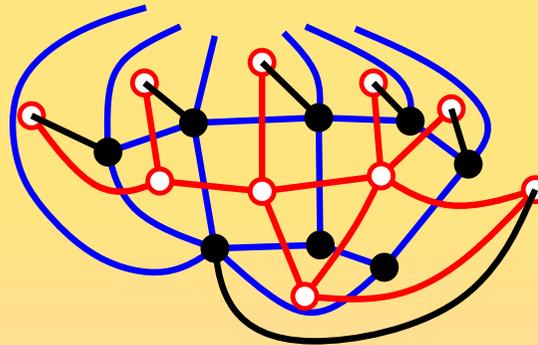
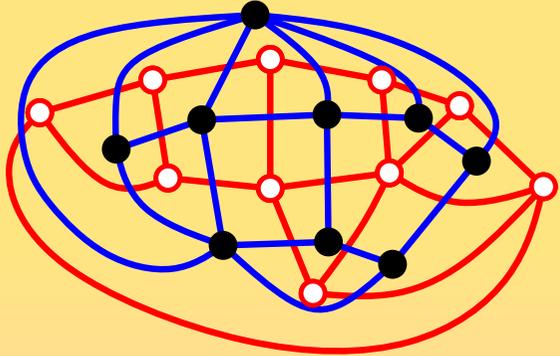
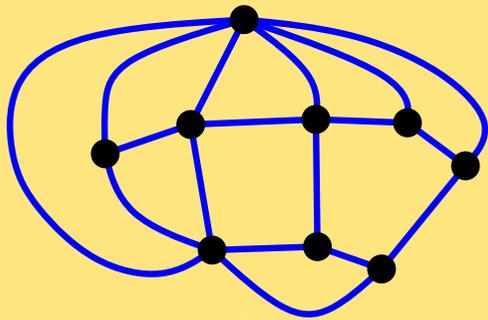


**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$

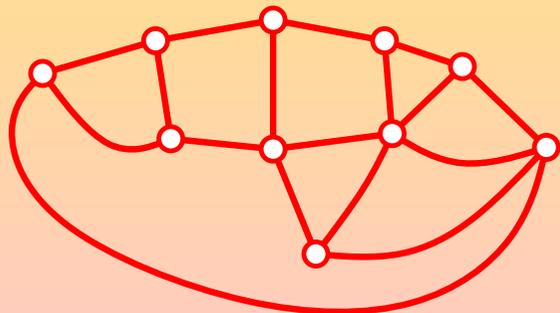
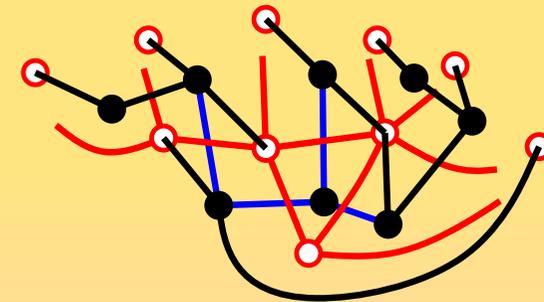
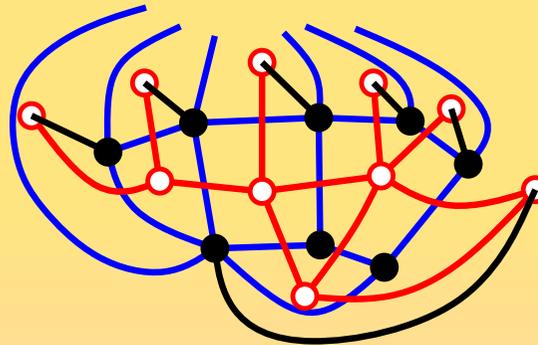
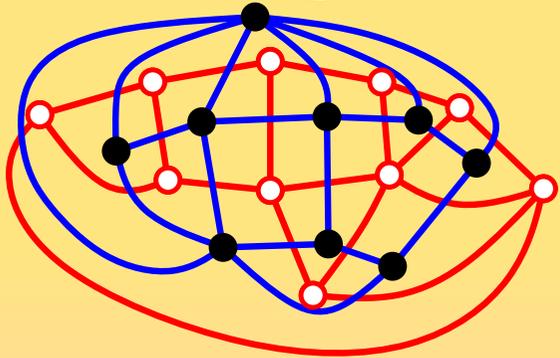
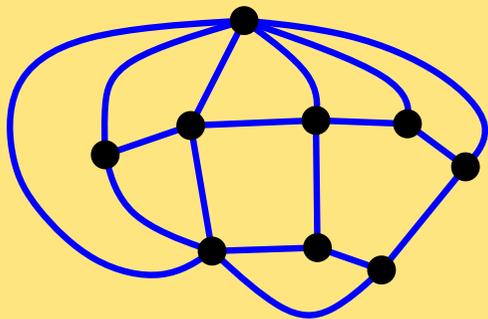


**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$

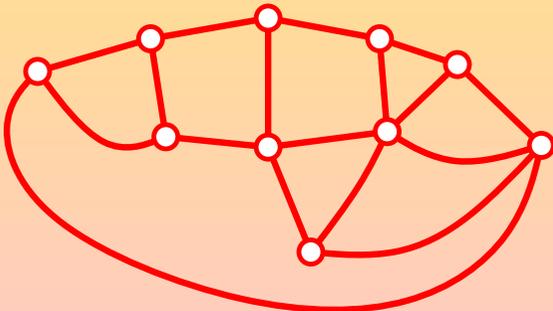
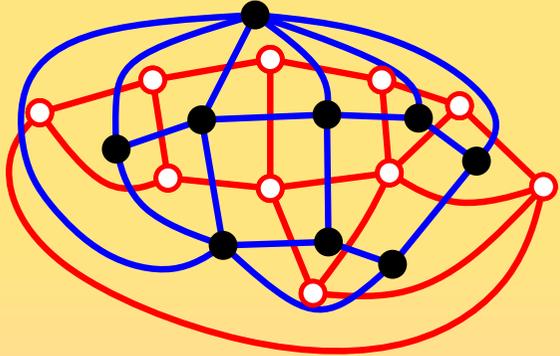
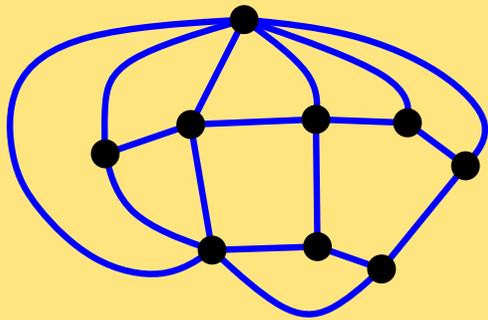


**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

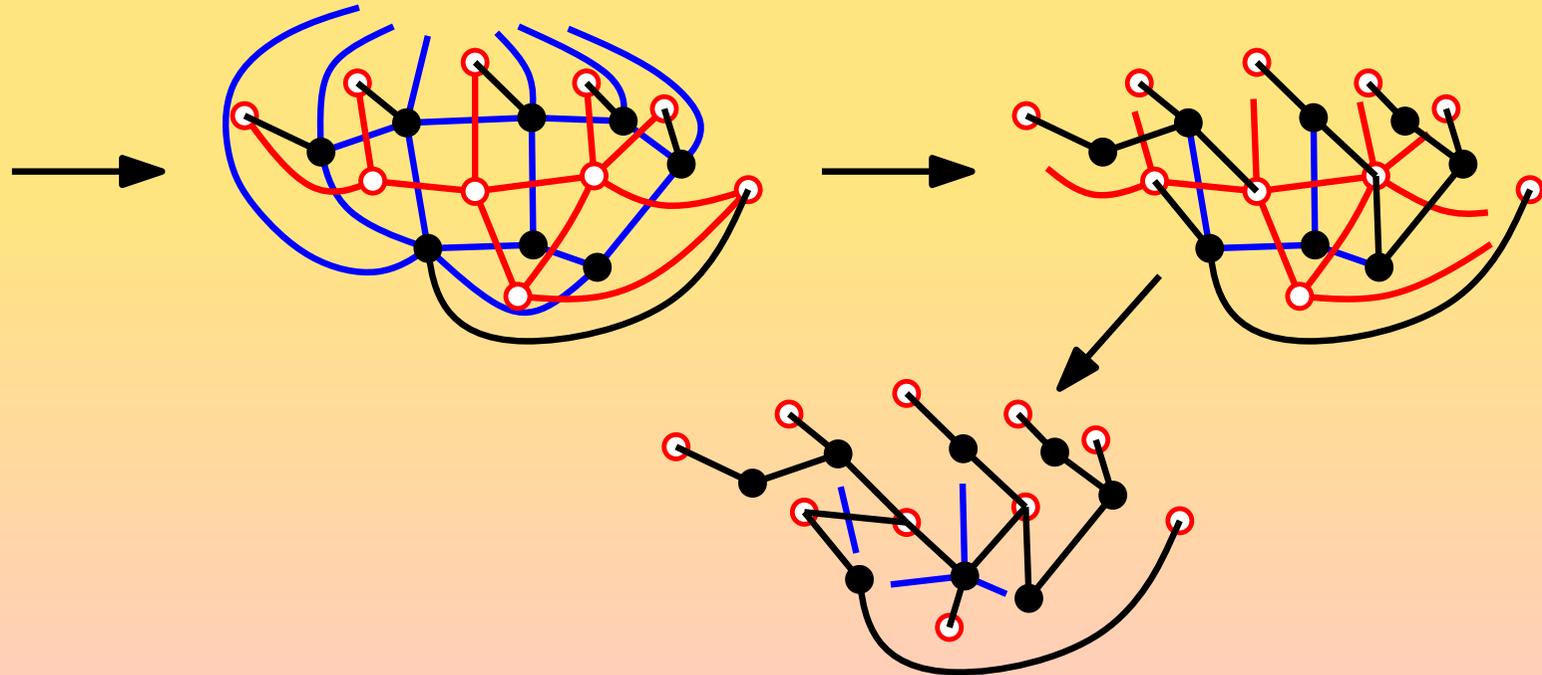
# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



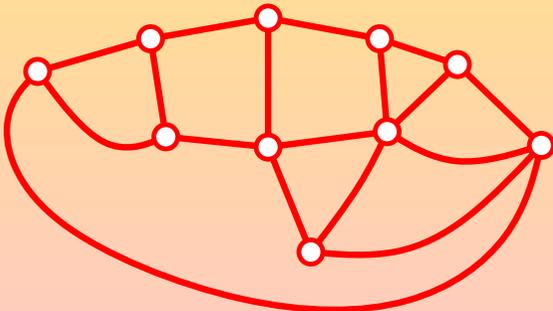
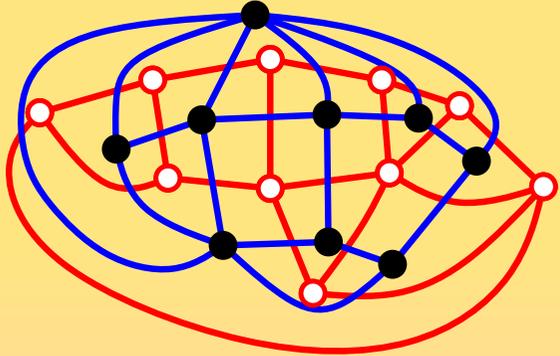
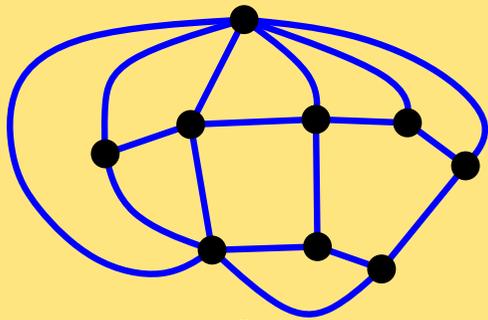
**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres



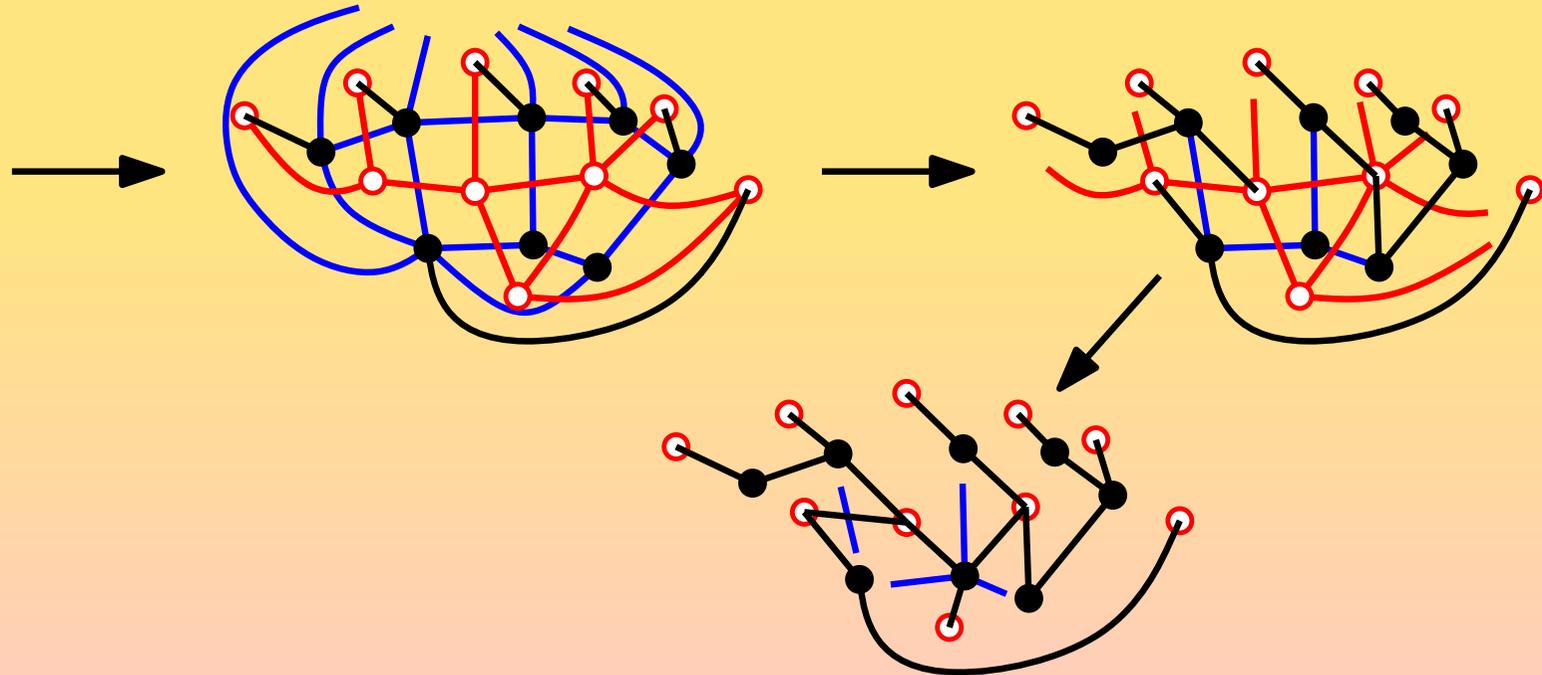
# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



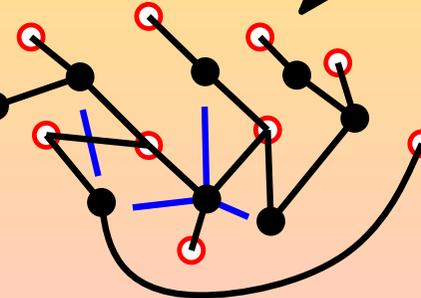
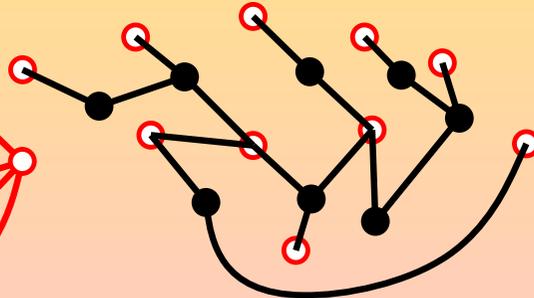
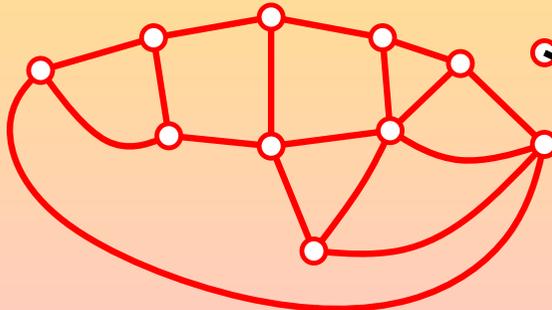
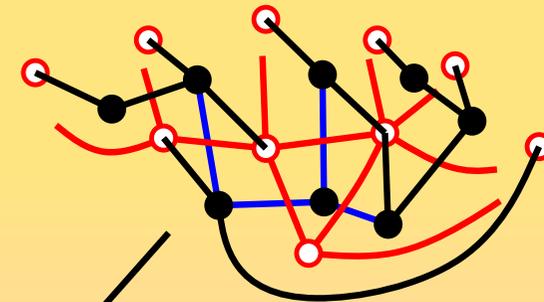
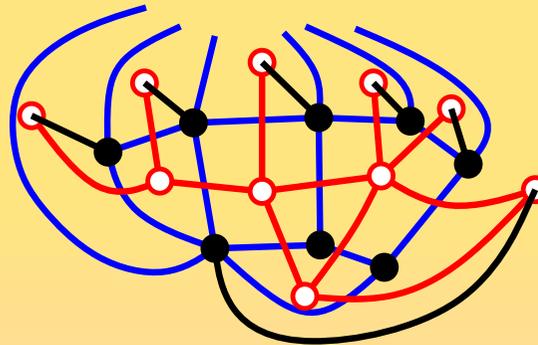
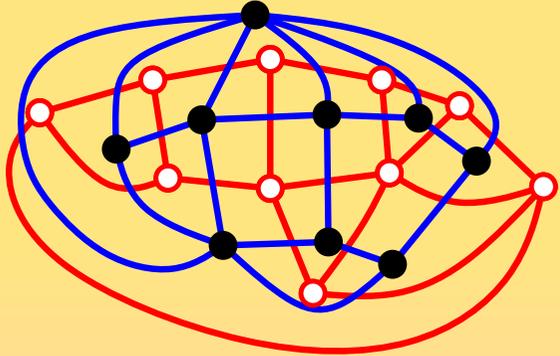
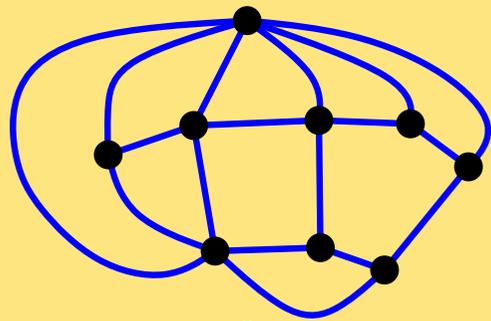
**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$

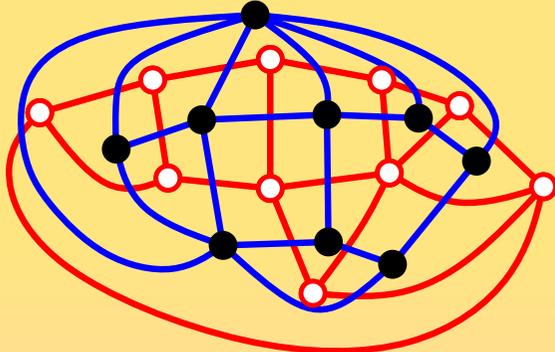
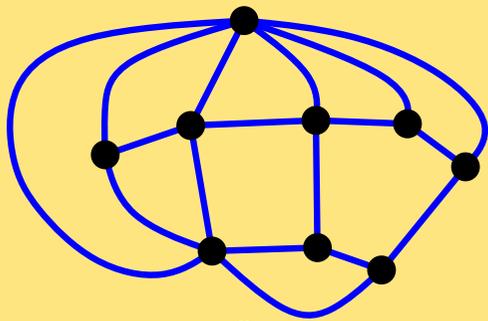


**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

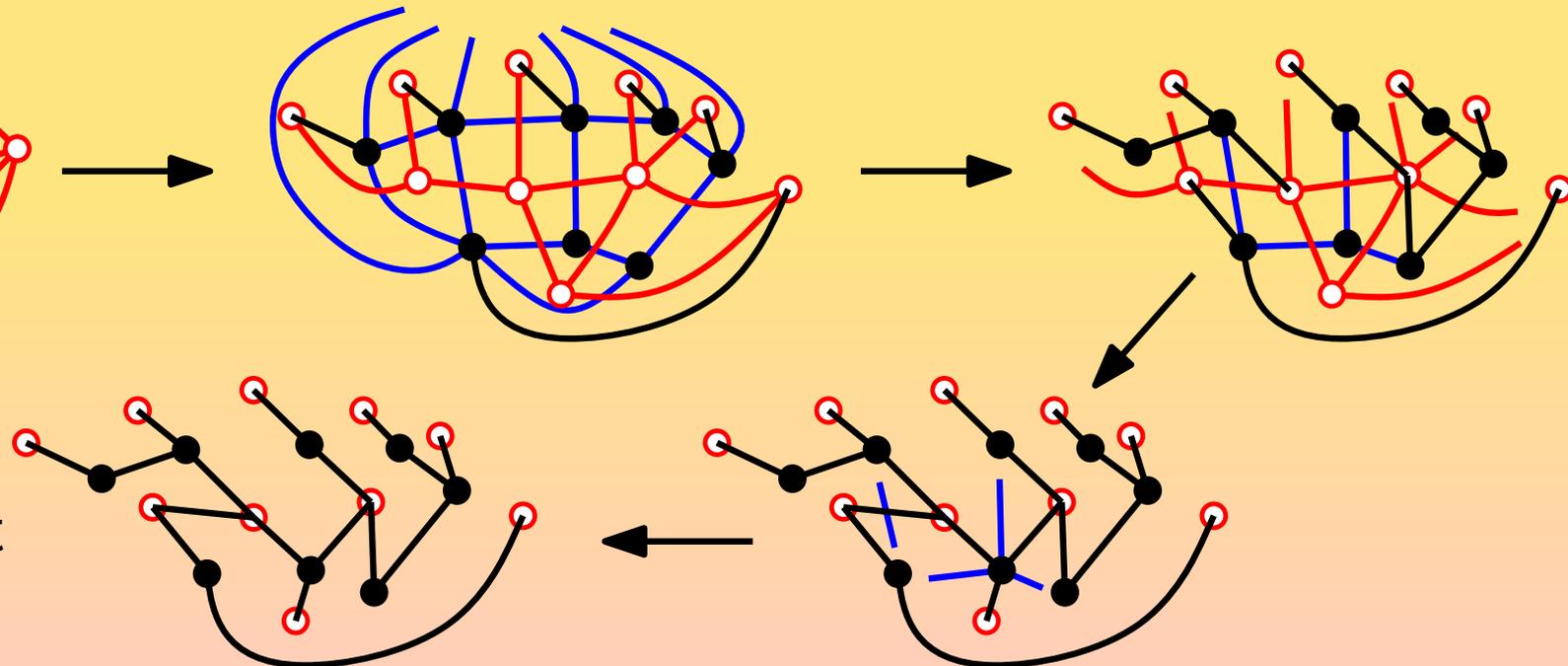
# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

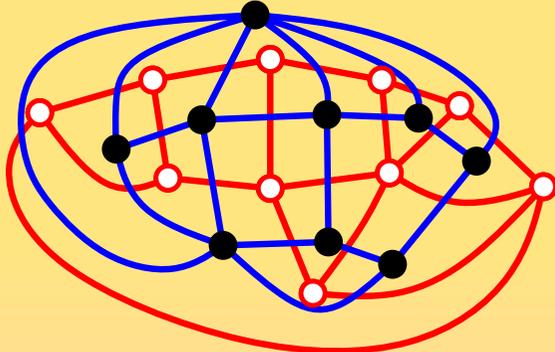
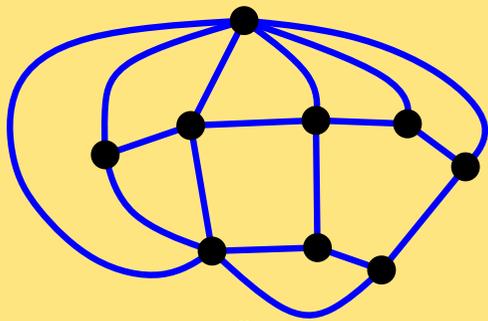


Étiqueter les sommets par leur étape d'éclatement

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

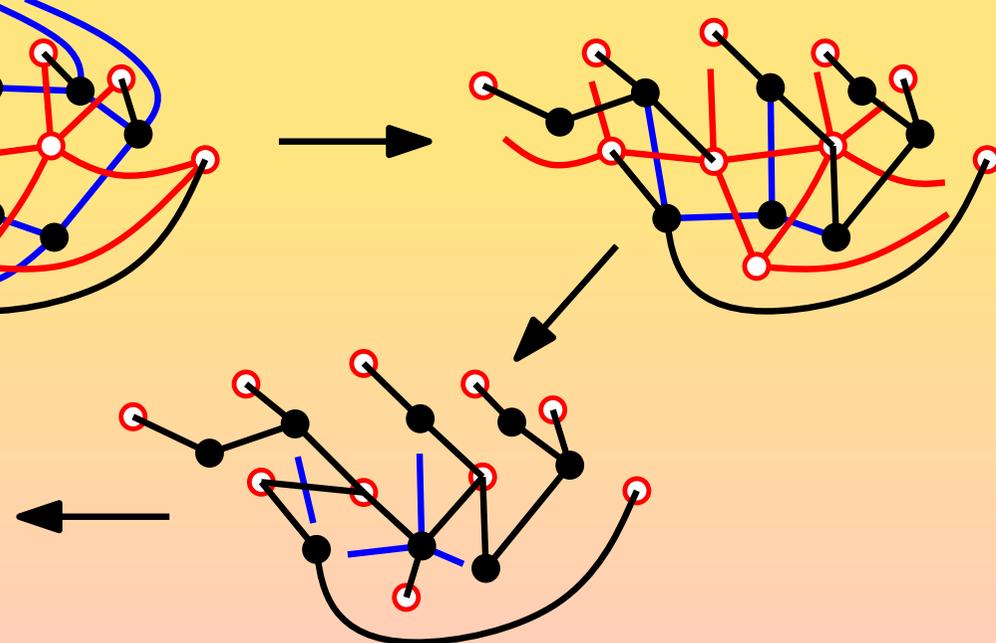
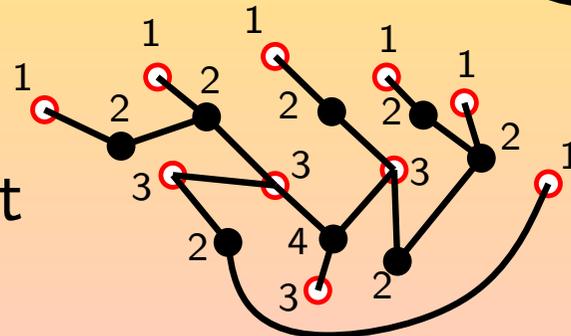
Cori-Vauquelin, début années 80

Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres

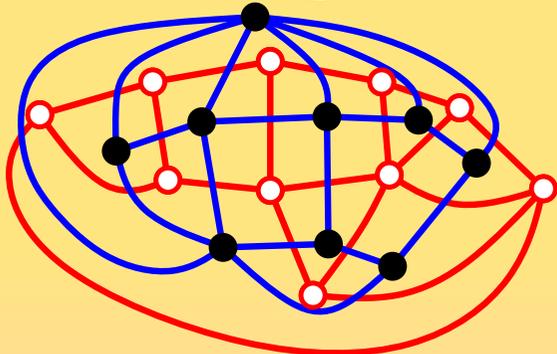
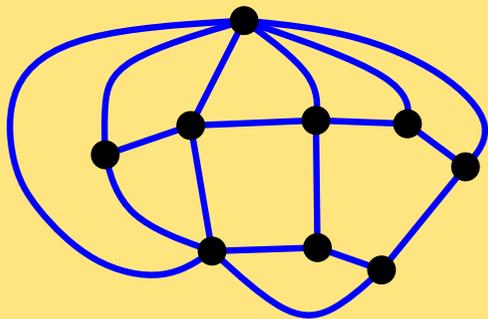
Étiqueter les sommets par leur étape d'éclatement



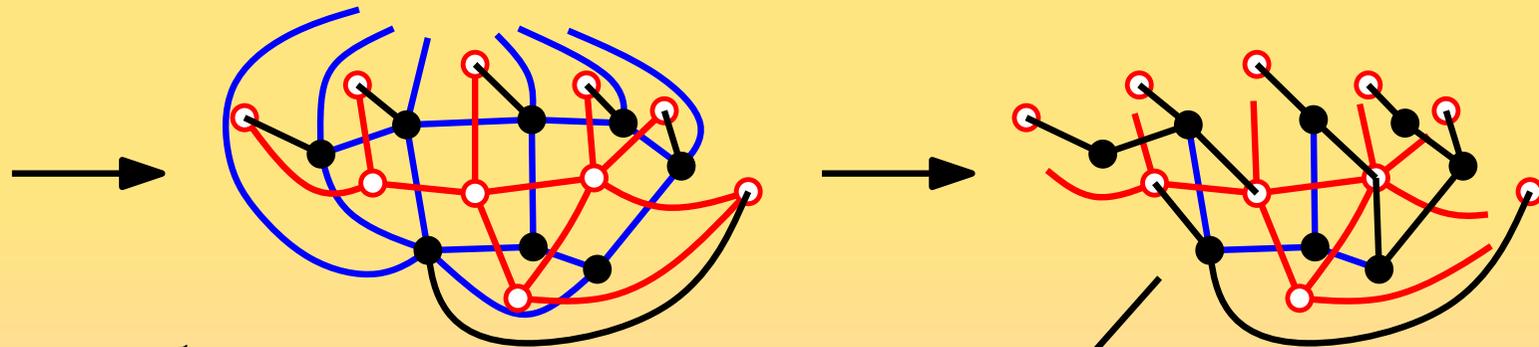
# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

Cori-Vauquelin, début années 80

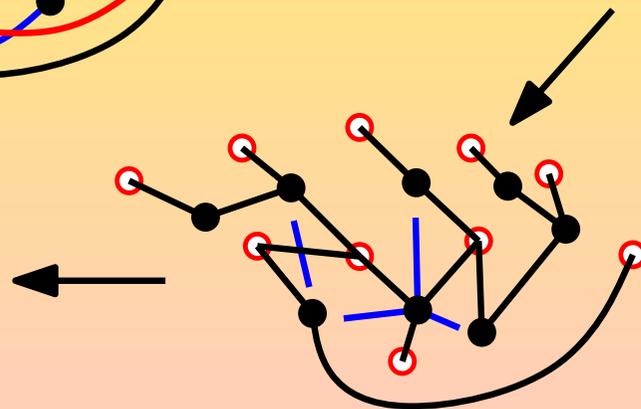
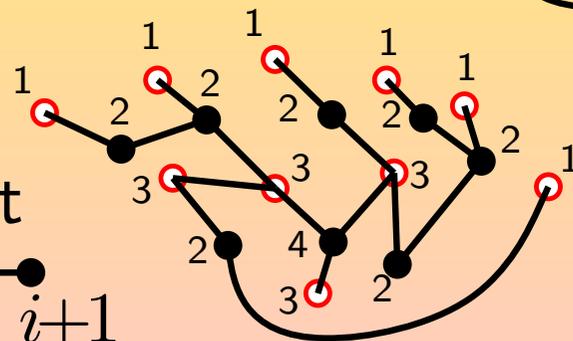
Une carte  $C = (\sigma, \alpha, \alpha\sigma)$  et sa duale  $D = (\alpha\sigma, \alpha, \sigma)$



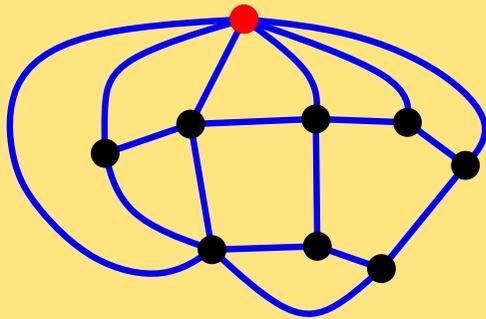
**Règle de Cori-Vauquelin:** Éclater alternat<sup>t</sup> faces et sommets extérieurs et coder l'opération localement en faisant croître des bouts d'arbres



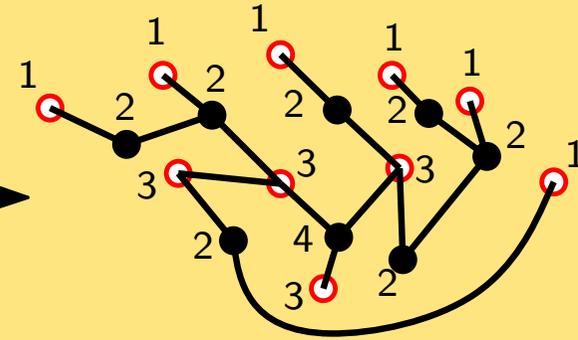
Étiqueter les sommets par leur étape d'éclatement



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



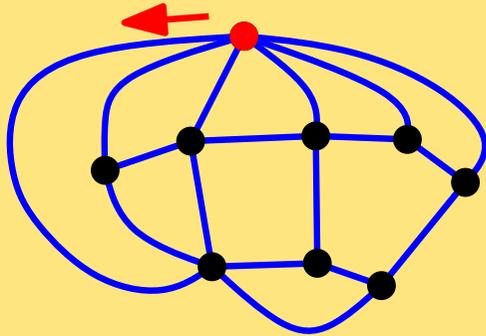
carte  $n$  arêtes, un sommet marqué



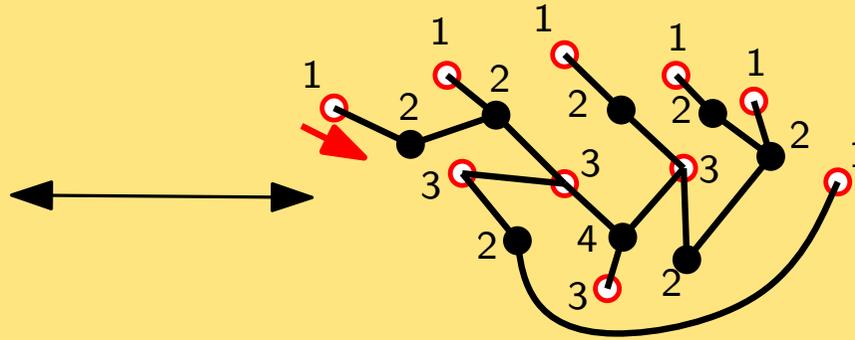
arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes

**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



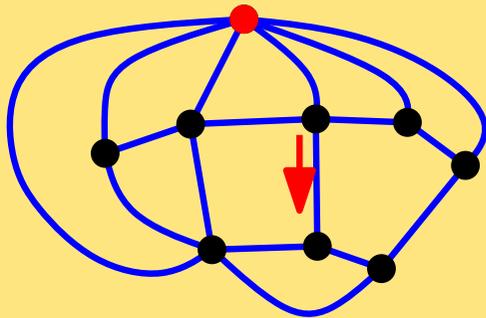
carte  $n$  arêtes, un sommet marqué  
carte enracinée à  $n$  arêtes (le sommet racine)



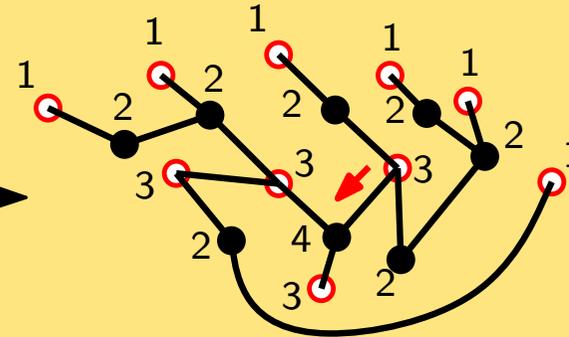
arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes  
arbre plan bien étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



carte  $n$  arêtes, un sommet marqué  
 carte enracinée à  $n$  arêtes (le sommet racine)

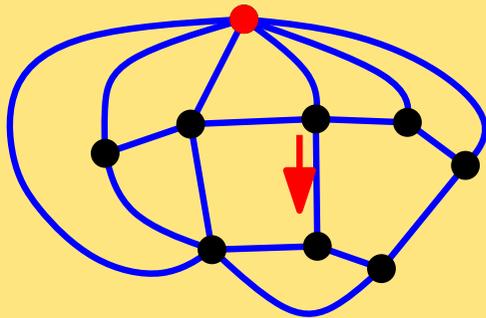


arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes  
 arbre plan bien étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

carte enracinée à  $n$  arêtes, un sommet ou une face marqué     $2 \times$  arbre plan pré-étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

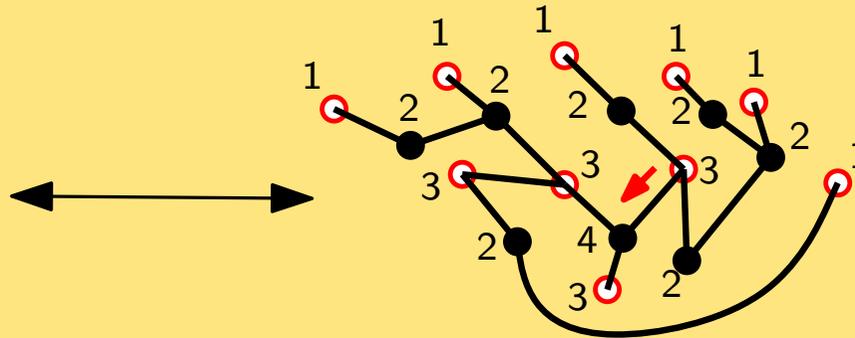
**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



carte  $n$  arêtes, un sommet marqué  
 carte enracinée à  $n$  arêtes (le sommet racine)

carte enracinée à  $n$  arêtes, un sommet ou une face marqué



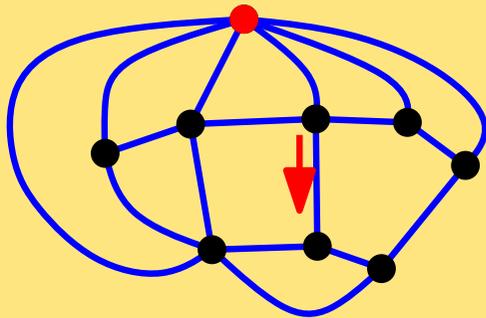
arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes  
 arbre plan bien étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

$2 \times$  arbre plan pré-étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

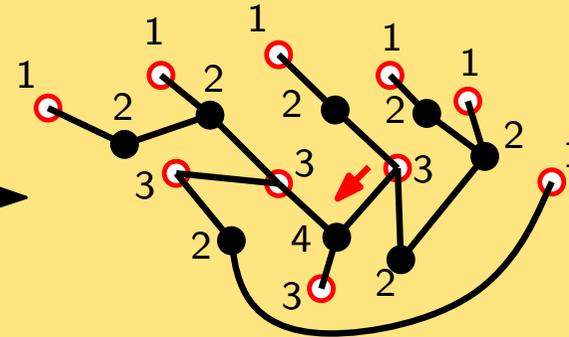
**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

Comptons les arbres pré-étiquetés enracinés à  $n$  arêtes: racine  $i$ , sur chaque branche  $i-i$ ,  $i-(i+1)$ , ou  $i-(i-1)$ : 3 possibilités par arêtes.

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



carte  $n$  arêtes, un sommet marqué  
carte enracinée à  $n$  arêtes (le sommet racine)



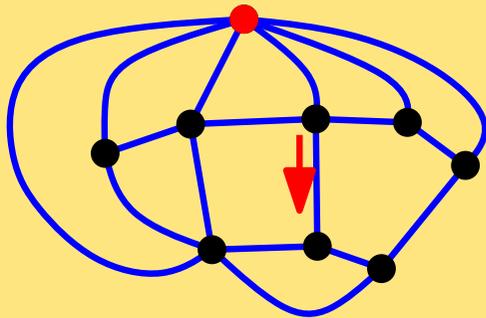
arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes  
arbre plan bien étiqueté enraciné à  $n$  arêtes  
 $2 \times$  arbre plan pré-étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

Comptons les arbres pré-étiquetés enracinés à  $n$  arêtes: racine  $i$ , sur chaque branche  $i-i$ ,  $i-(i+1)$ , ou  $i-(i-1)$ : 3 possibilités par arêtes.

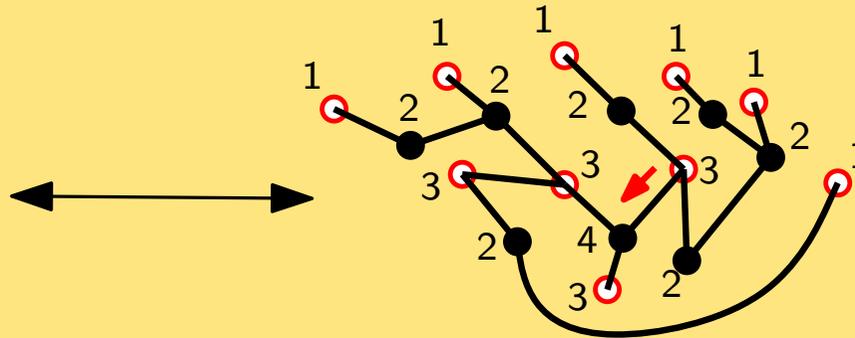
$$3^n \cdot C_n, \text{ ou encore, } A(x) = 1 + 3xA(x)^2.$$

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



carte  $n$  arêtes, un sommet marqué  
carte enracinée à  $n$  arêtes (le sommet racine)

carte enracinée à  $n$  arêtes, un sommet ou une face marqué



arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes  
arbre plan bien étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

$2 \times$  arbre plan pré-étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

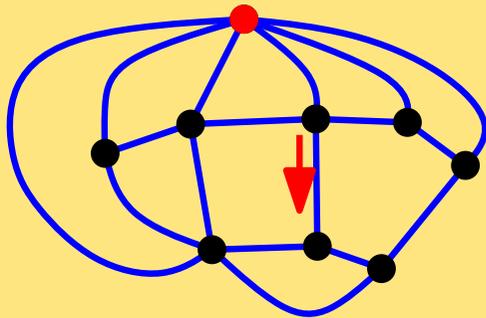
**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

Comptons les arbres pré-étiquetés enracinés à  $n$  arêtes: racine  $i$ , sur chaque branche  $i-i$ ,  $i-(i+1)$ , ou  $i-(i-1)$ : 3 possibilités par arêtes.

$$3^n \cdot C_n, \text{ ou encore, } A(x) = 1 + 3xA(x)^2.$$

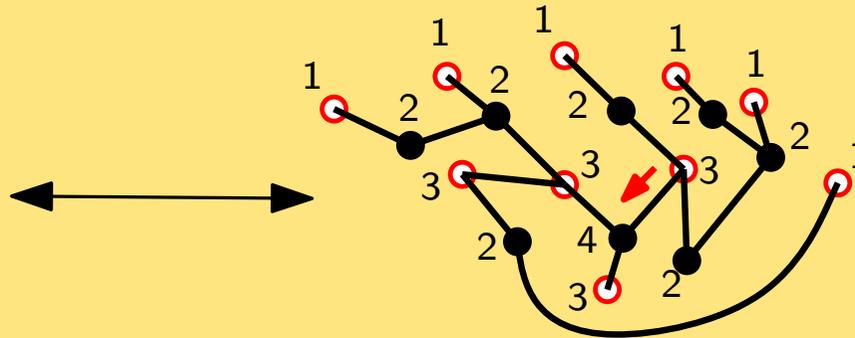
$3^e$  version:  $n + 2$  choix pour sommet/face marqué ( $s + f = n + 2$ ).

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés



carte  $n$  arêtes, un sommet marqué  
carte enracinée à  $n$  arêtes (le sommet racine)

carte enracinée à  $n$  arêtes, un sommet ou une face marqué



arbre plan bien étiqueté à  $n$  arêtes  
arbre plan bien étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

$2 \times$  arbre plan pré-étiqueté enraciné à  $n$  arêtes

**Théorème (CV84)** L'éclatement est une bijection.

Comptons les arbres pré-étiquetés enracinés à  $n$  arêtes: racine  $i$ , sur chaque branche  $i-i$ ,  $i-(i+1)$ , ou  $i-(i-1)$ : 3 possibilités par arêtes.

$$3^n \cdot C_n, \text{ ou encore, } A(x) = 1 + 3xA(x)^2.$$

3<sup>e</sup> version:  $n + 2$  choix pour sommet/face marqué ( $s + f = n + 2$ ).

D'où le nombre de cartes enracinées à  $n$  arêtes:  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

## L'éclatement et les arbres bien étiquetés

La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

## L'éclatement et les arbres bien étiquetés

La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

## L'éclatement et les arbres bien étiquetés

La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

arbre de minimum  $i \leq 0$

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

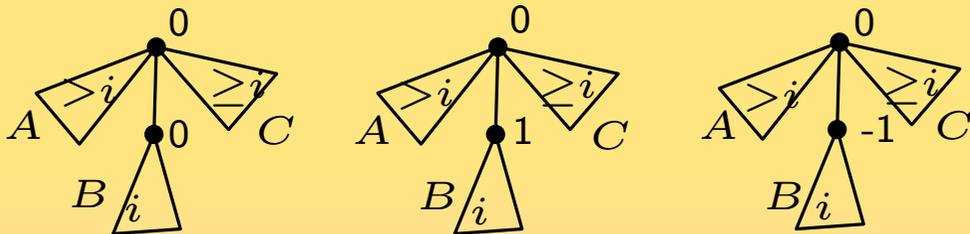
La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

arbre de minimum  $i \leq 0$



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

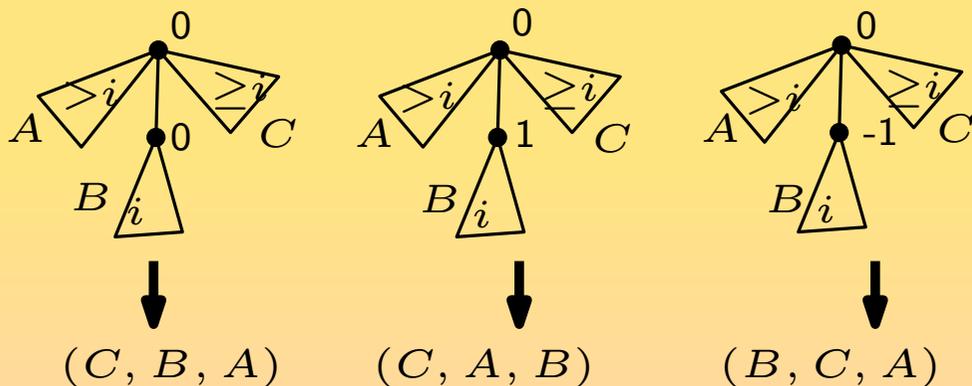
La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

arbre de minimum  $i \leq 0$



# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

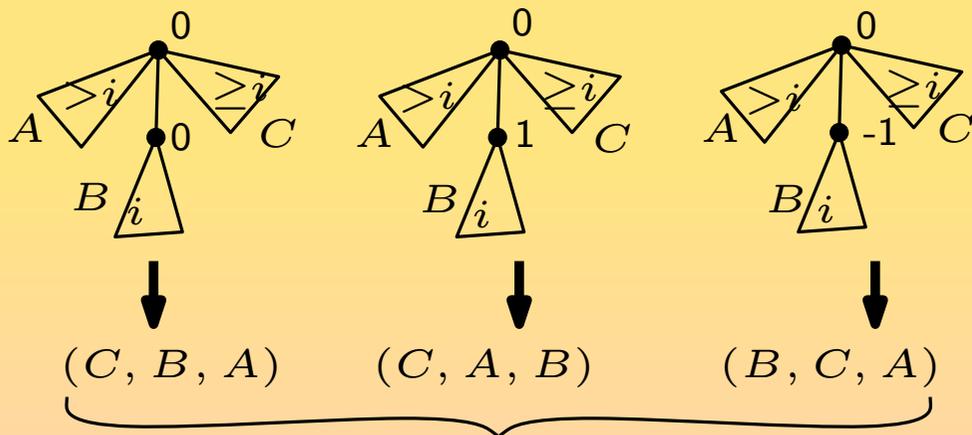
La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

arbre de minimum  $i \leq 0$



Triplets d'arbres:  $xA(x)^3$

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

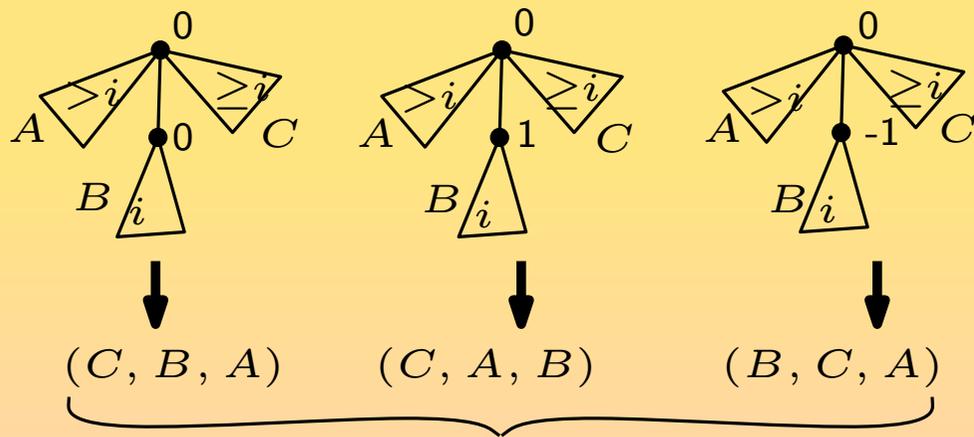
$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

À la Chapuy:  $A_i(x)$ : série des arbres  $\geq i = 0, -1, \dots$   
 $A_0(x)$ : série des arbres bien étiquetés

arbre de minimum  $i \leq 0$



Triplets d'arbres:  $xA(x)^3$

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

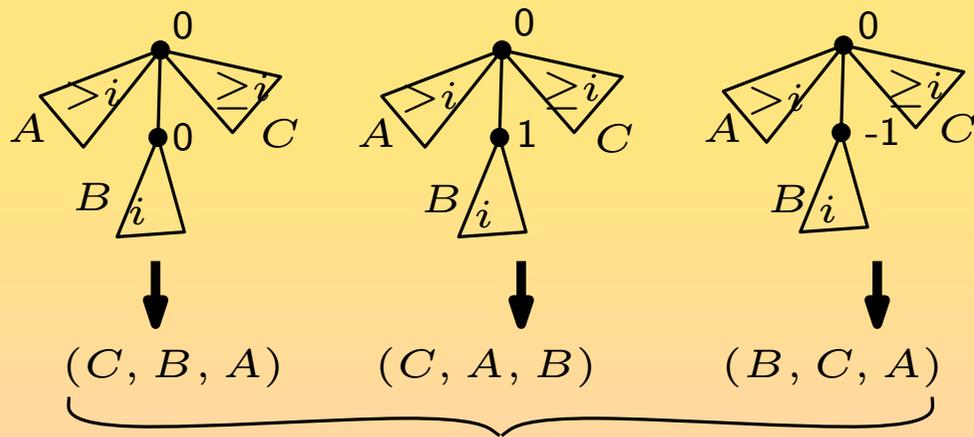
$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

À la Chapuy:  $A_i(x)$ : série des arbres  $\geq i = 0, -1, \dots$   
 $A_0(x)$ : série des arbres bien étiquetés

arbre de minimum  $i \leq 0$



$$A_i - A_{i-1} = xA_{i+1}A_i [(A_i - A_{i-1}) + (A_{i-1} - A_{i-2}) + (A_{i+1} - A_i)]$$

Triplets d'arbres:  $xA(x)^3$

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

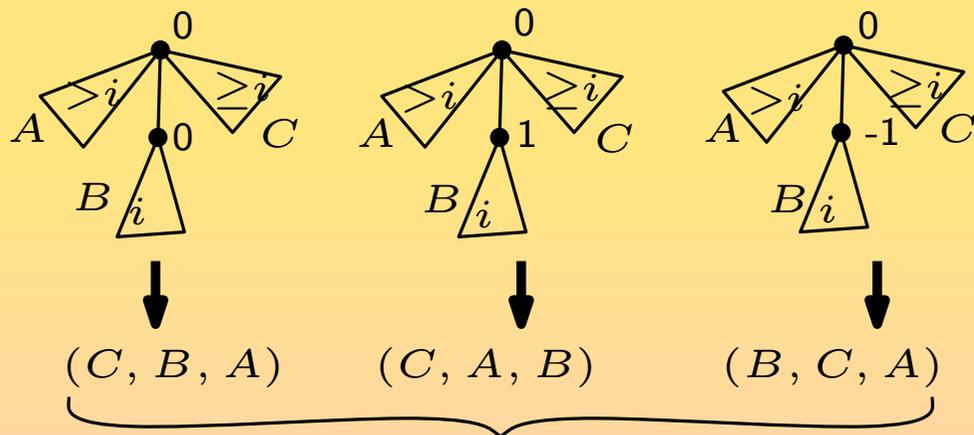
$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

À la Chapuy:  $A_i(x)$ : série des arbres  $\geq i = 0, -1, \dots$   
 $A_0(x)$ : série des arbres bien étiquetés

arbre de minimum  $i \leq 0$



Triplets d'arbres:  $xA(x)^3$

$$A_i - A_{i-1} = xA_{i+1}A_i \left[ (A_i - A_{i-1}) + (A_{i-1} - A_{i-2}) + (A_{i+1} - A_i) \right]$$

en sommant:  $A_j - A_0 = xA_{j+1}A_jA_{j-1}$ .

# L'éclatement et les arbres bien étiquetés

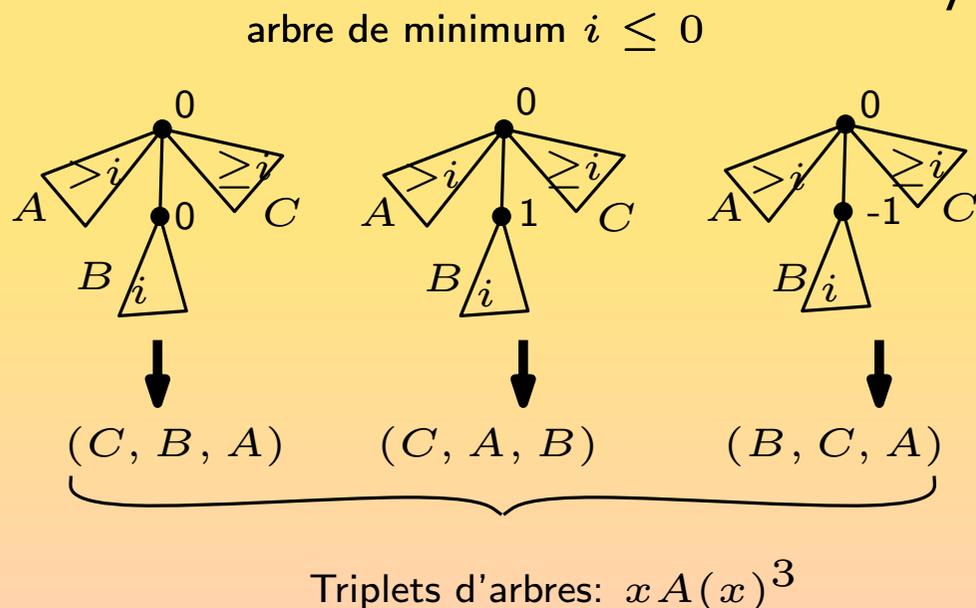
La formule  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$  s'écrit aussi

$$A_0(x) = A(x) - xA(x)^3$$

Autrement dit les arbres mal étiquetés sont comptés par  $xA(x)^3$ .

Déjà prouvé par Cori-Vauquelin par recodage du langage des codes d'arbres non positifs !

À la Chapuy:  $A_i(x)$ : série des arbres  $\geq i = 0, -1, \dots$   
 $A_0(x)$ : série des arbres bien étiquetés



$$A_i - A_{i-1} = xA_{i+1}A_i [(A_i - A_{i-1}) + (A_{i-1} - A_{i-2}) + (A_{i+1} - A_i)]$$

en sommant:  $A_j - A_0 = xA_{j+1}A_jA_{j-1}$ .

puis  $j \rightarrow +\infty$  donne:  $A - A_0 = xA^3$ .

On retrouve l'algébricité de  $A_0(x)$ .

Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

## Dualité, distance et règles locales.

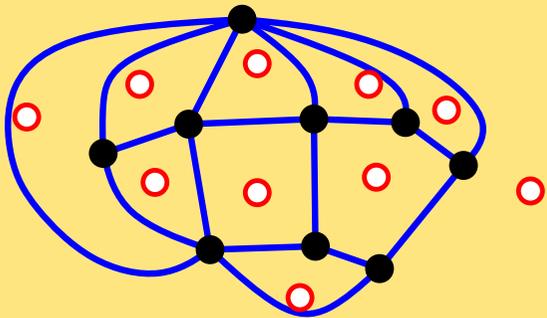
L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.

## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

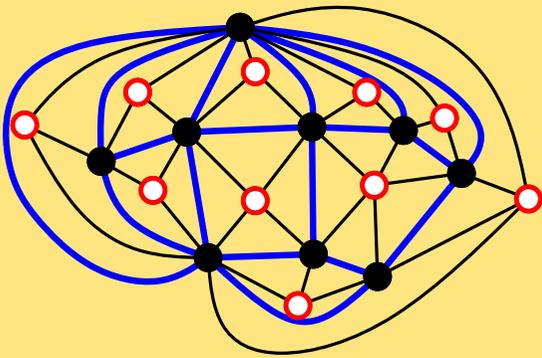
⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

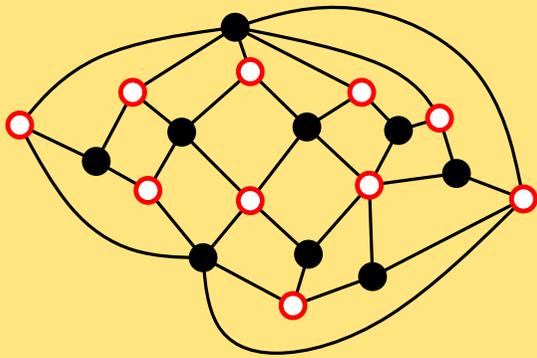
⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

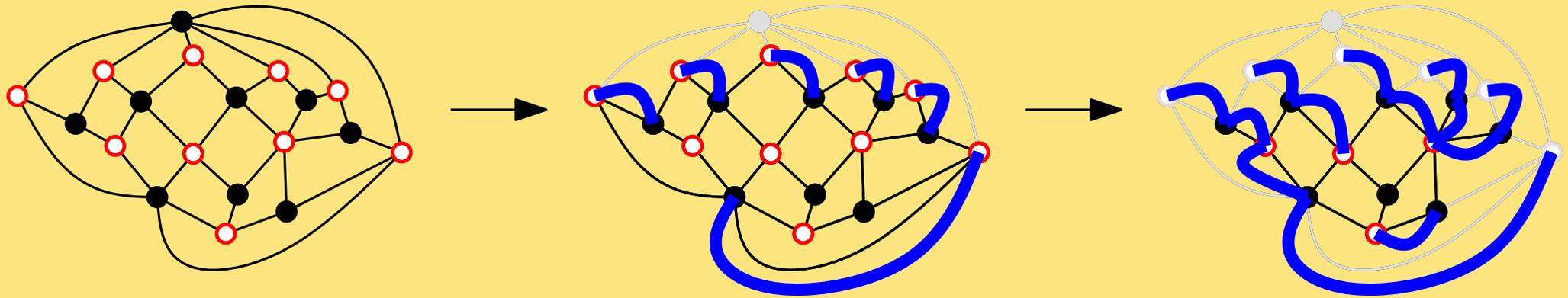
⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

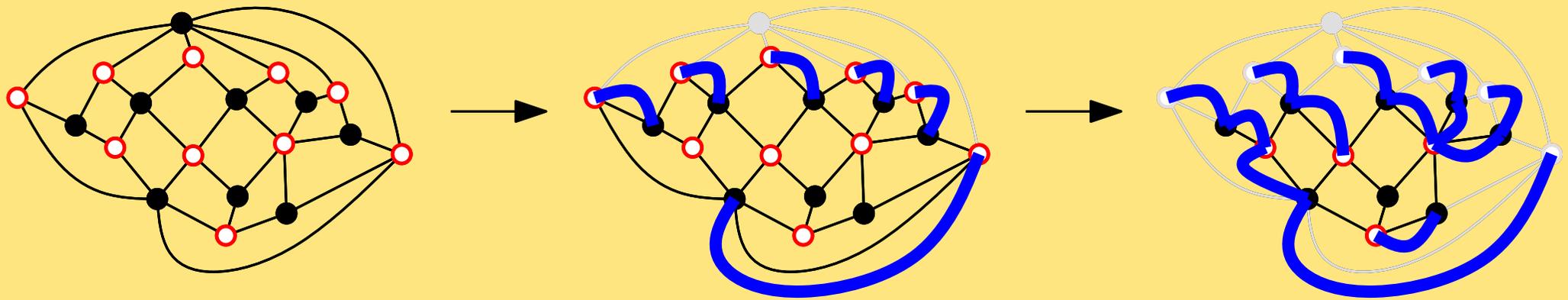
⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.

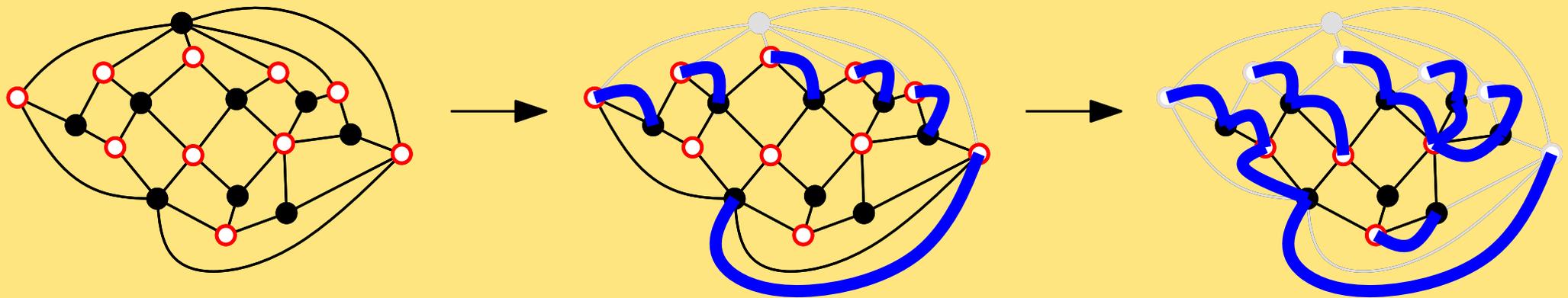


Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i$

## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.

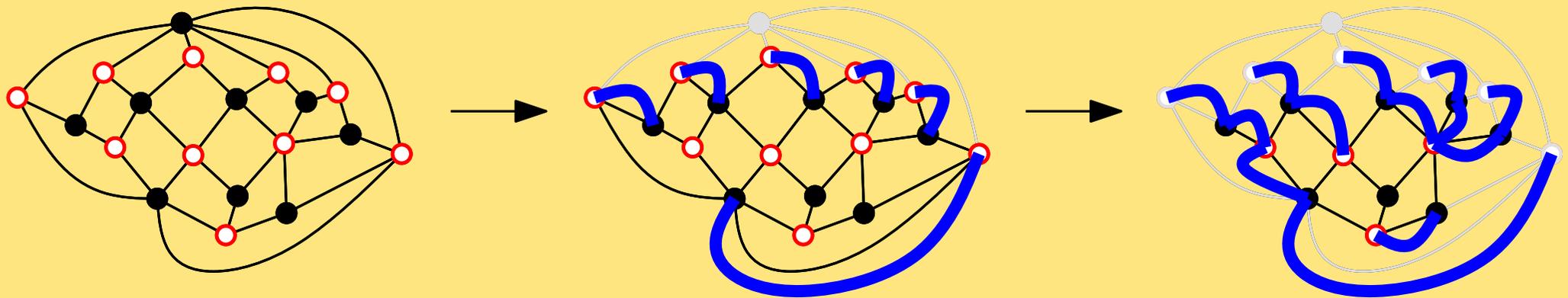


Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i$  ⇒ {étiquettes de l'arbre} = {distances à l'origine}

## Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.

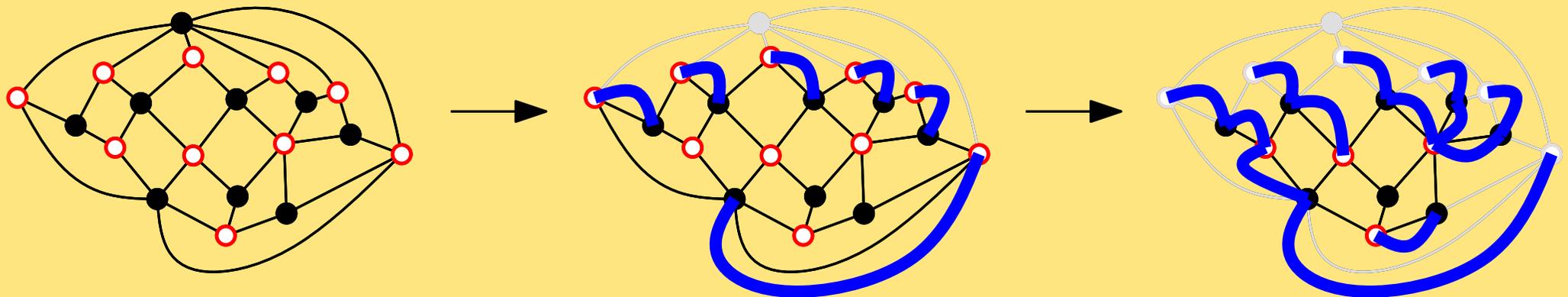


Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i \Rightarrow \{\text{étiquettes de l'arbre}\} = \{\text{distances à l'origine}\}$   
règles locales dans chaque face:

# Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



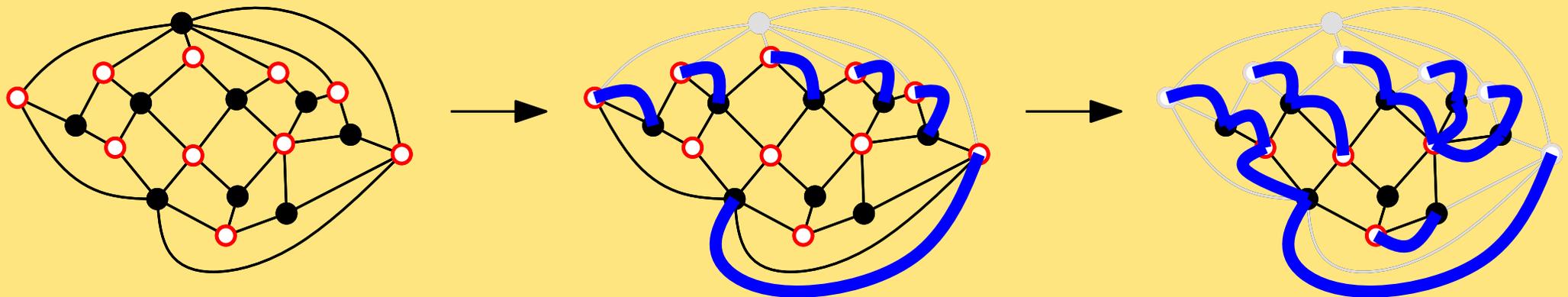
Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i \Rightarrow \{\text{étiquettes de l'arbre}\} = \{\text{distances à l'origine}\}$   
règles locales dans chaque face:



# Dualité, distance et règles locales.

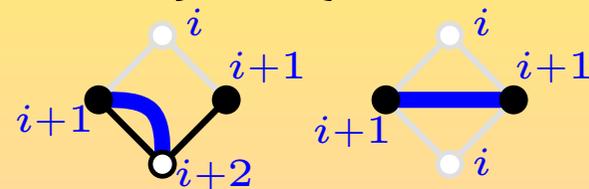
L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i \Rightarrow \{\text{étiquettes de l'arbre}\} = \{\text{distances à l'origine}\}$

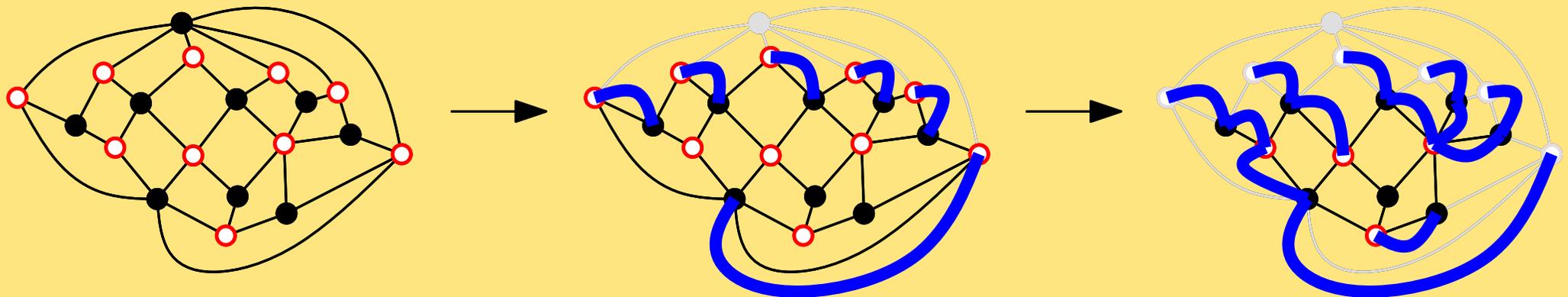
règles locales dans chaque face:



# Dualité, distance et règles locales.

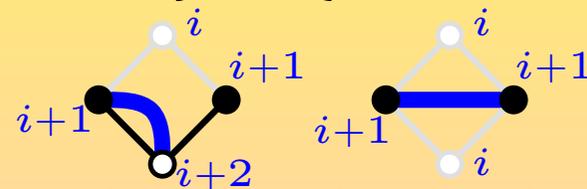
L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i \Rightarrow \{\text{étiquettes de l'arbre}\} = \{\text{distances à l'origine}\}$

règles locales dans chaque face:

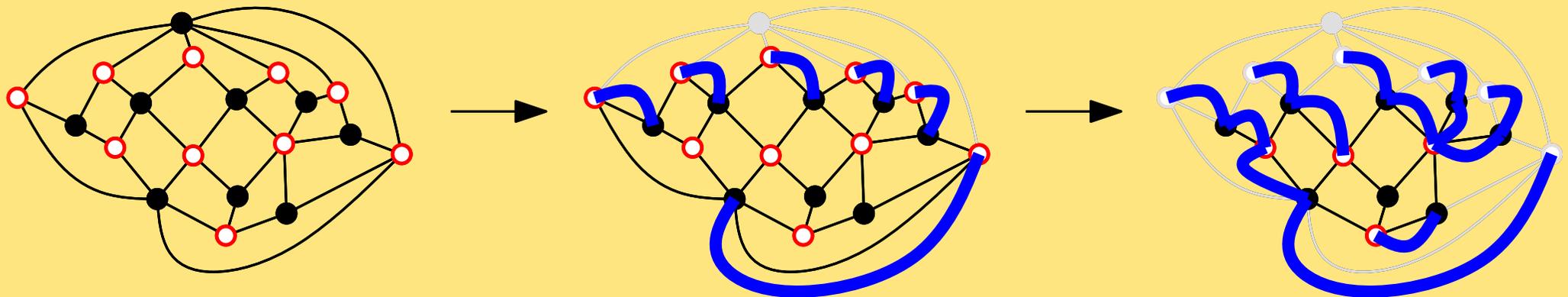


⇒ Chassaing-S. distances en  $n^{1/4}$  dans les quadrangulations

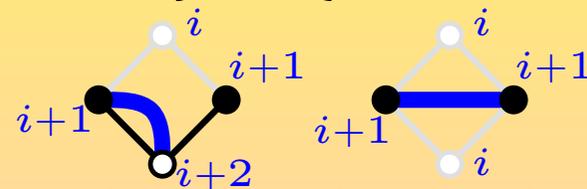
# Dualité, distance et règles locales.

L'éclatement travaille alternativement sur la carte et son dual.

⇒ On obtient une description plus stable travaillant sur la quadrangulation, qui décrit les incidences sommets-faces.



Dans  $Q$ : l'éclatement travaille *en largeur*: à l'étape  $i$  il traite les sommets à distance  $i \Rightarrow \{\text{étiquettes de l'arbre}\} = \{\text{distances à l'origine}\}$   
règles locales dans chaque face:



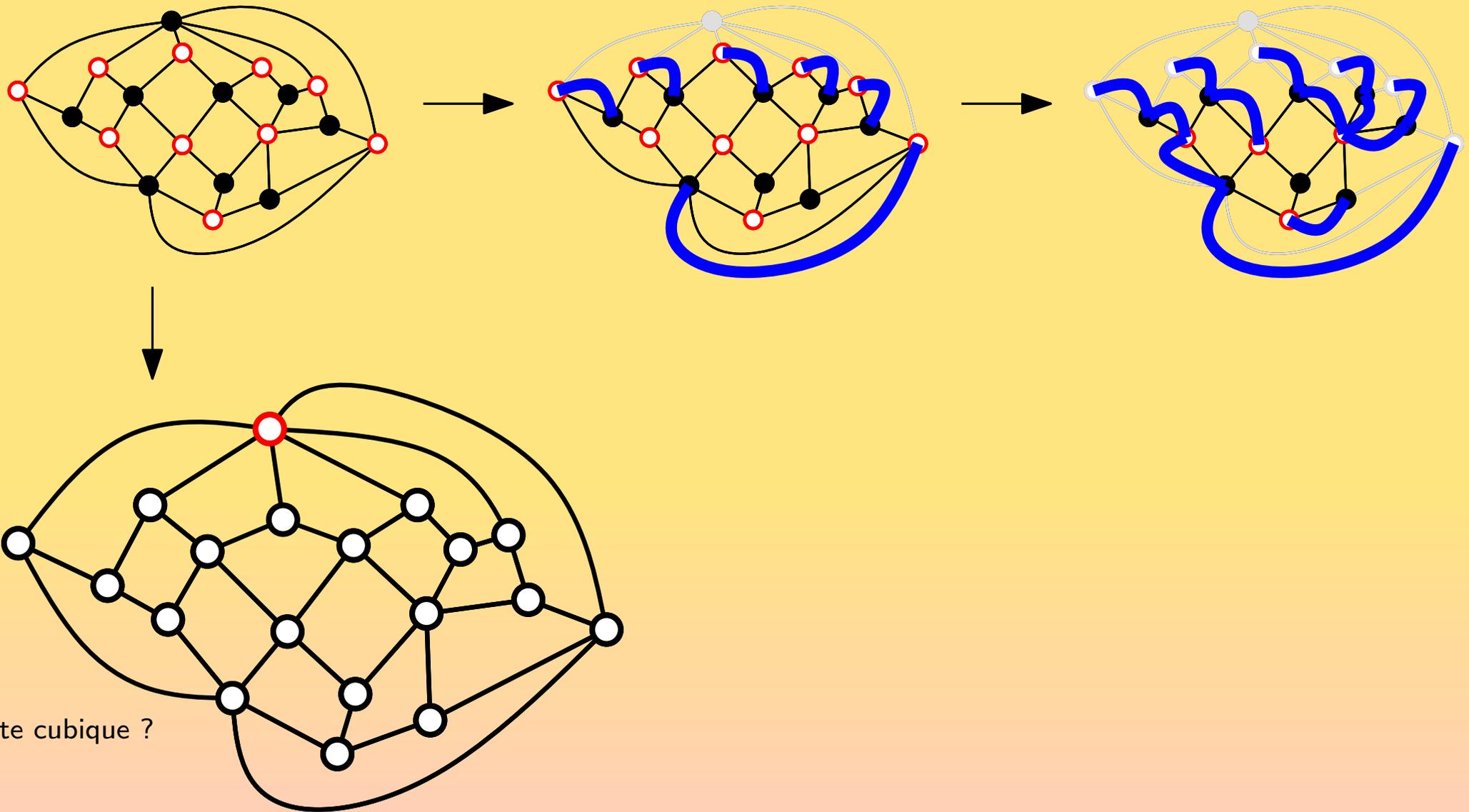
⇒ **Chassaing-S. distances en  $n^{1/4}$  dans les quadrangulations**

Renaissance de Cori-Vauquelin (devenue bijection de Schaeffer...)

papiers de Marckert, Mokraddem, Bouttier, Di Francesco, Guitter, Miermont, Durhuus, Le Gall, Weill, Paulin, Chapuy...

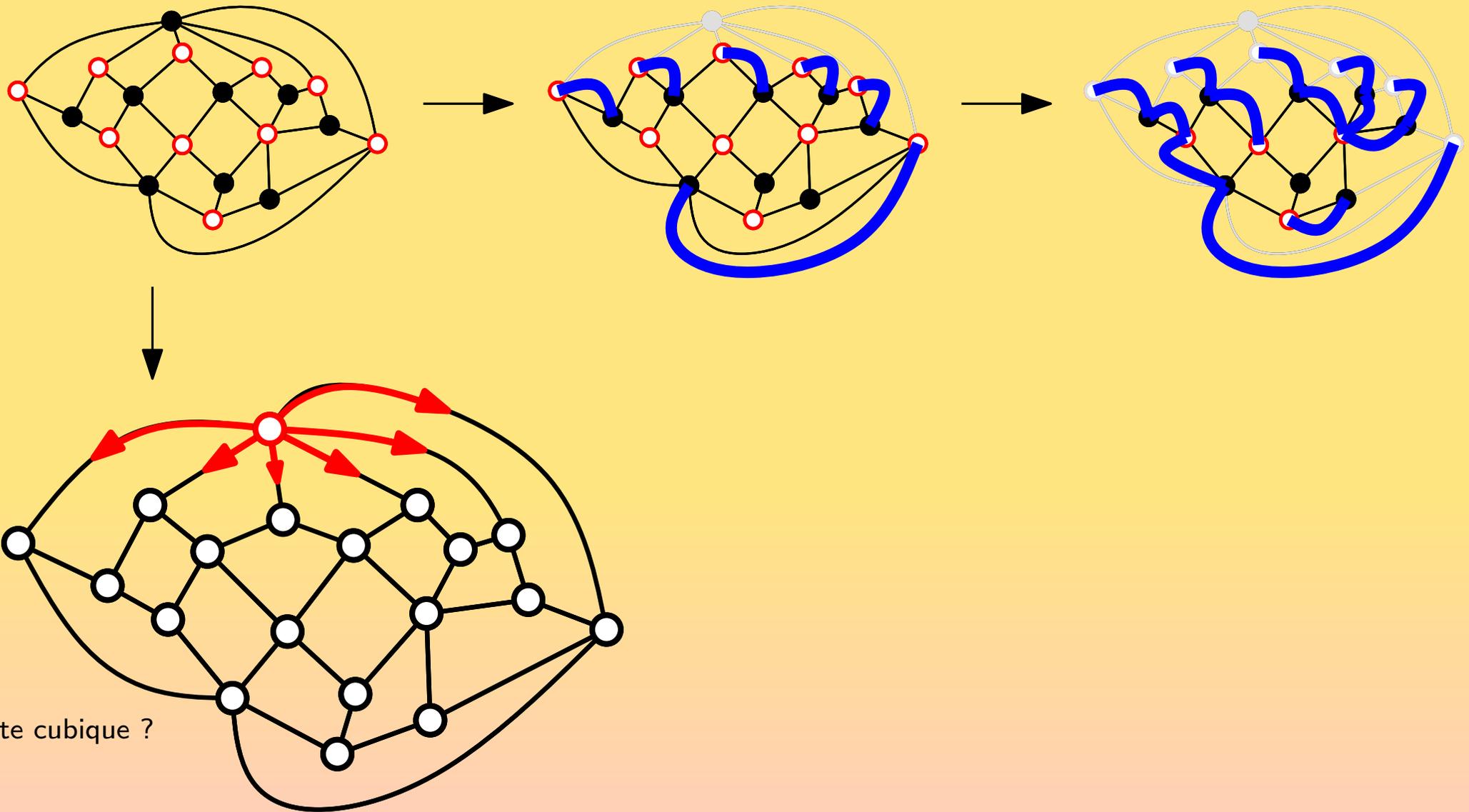
# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



# Ronds-points et retards de Miermont

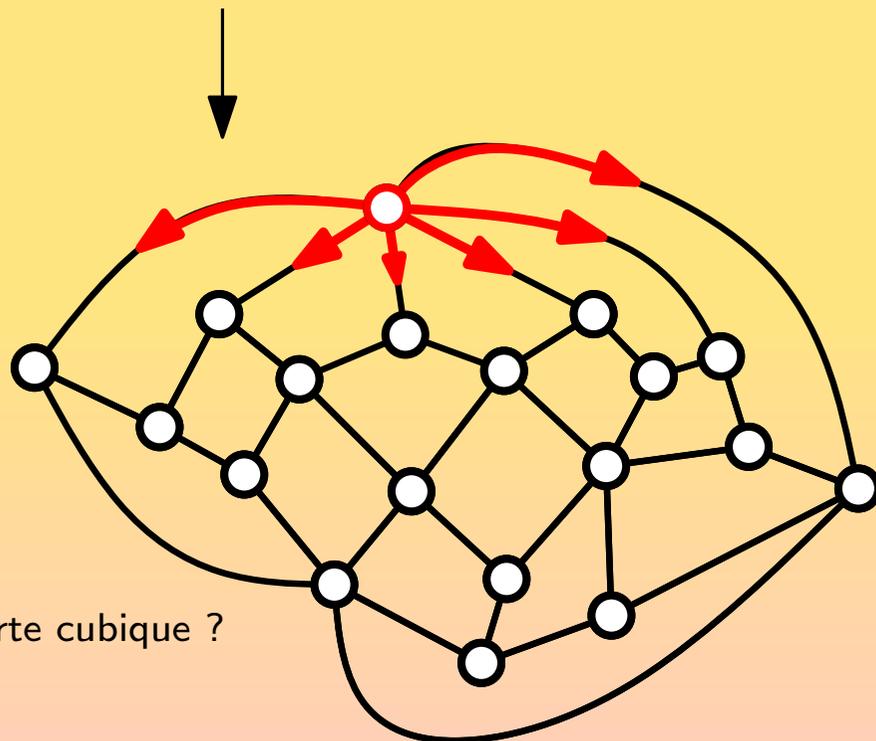
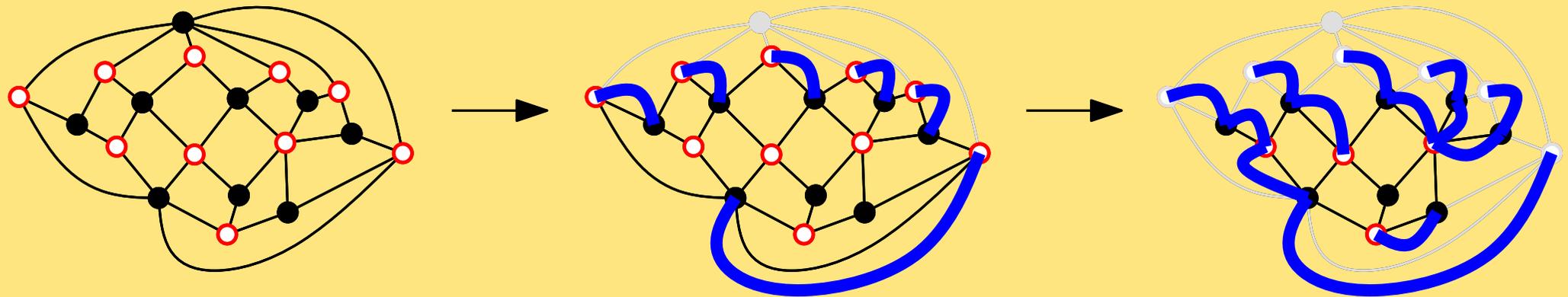
Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



carte cubique ?

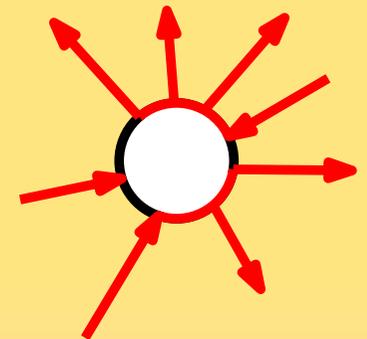
# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



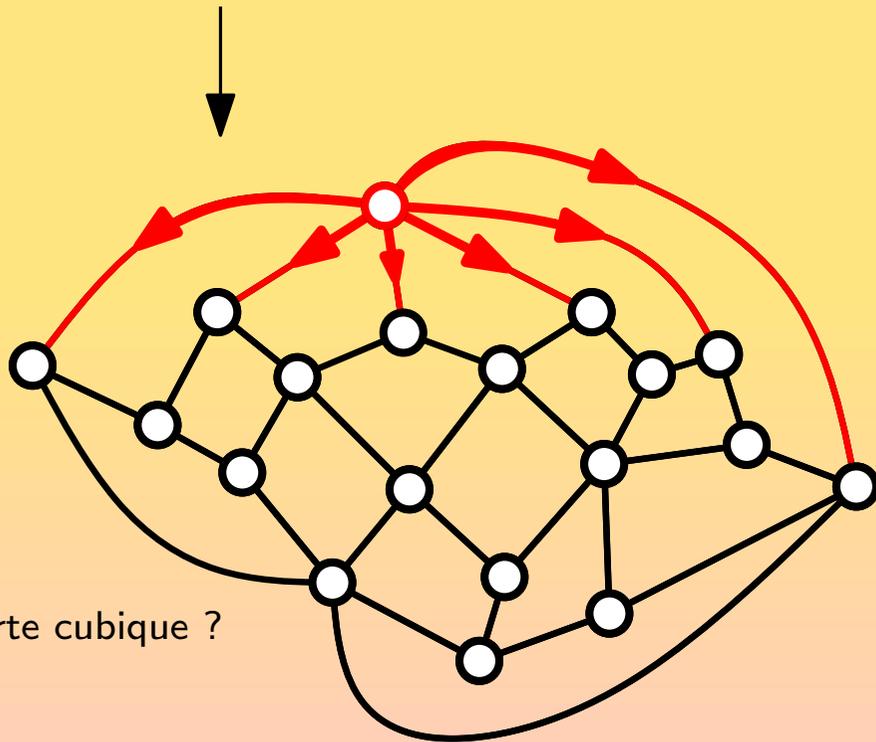
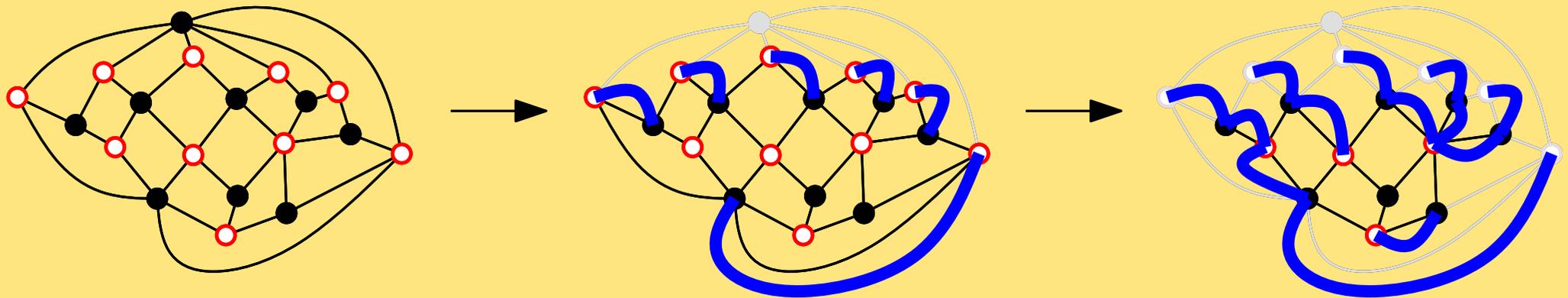
carte cubique ?

Règle des ronds-points  
avec priorité à droite



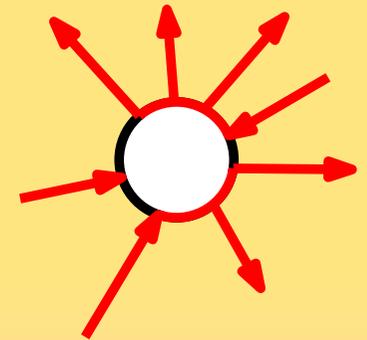
# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



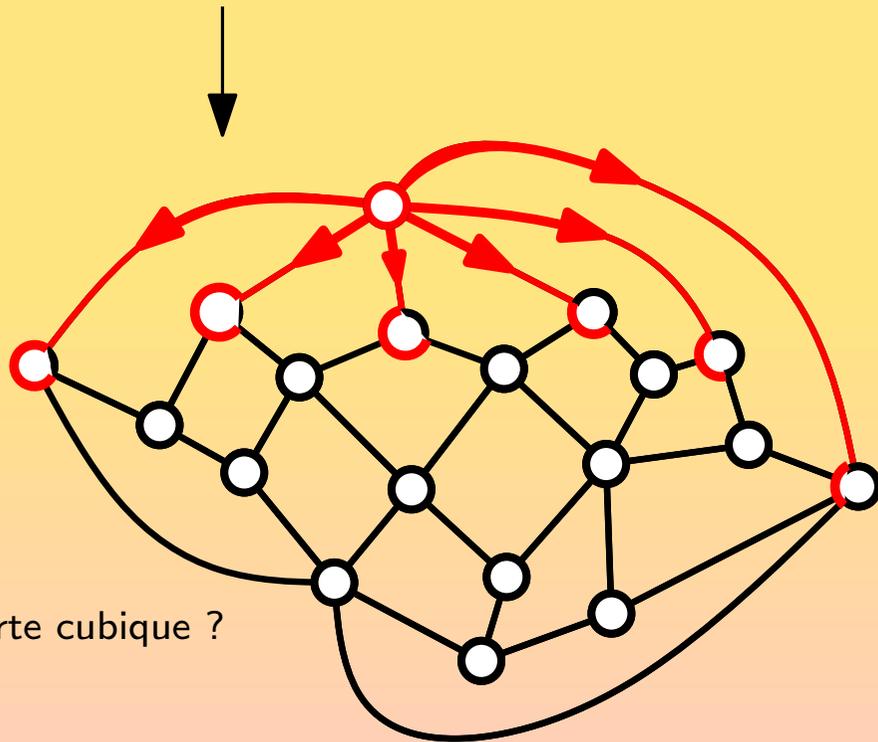
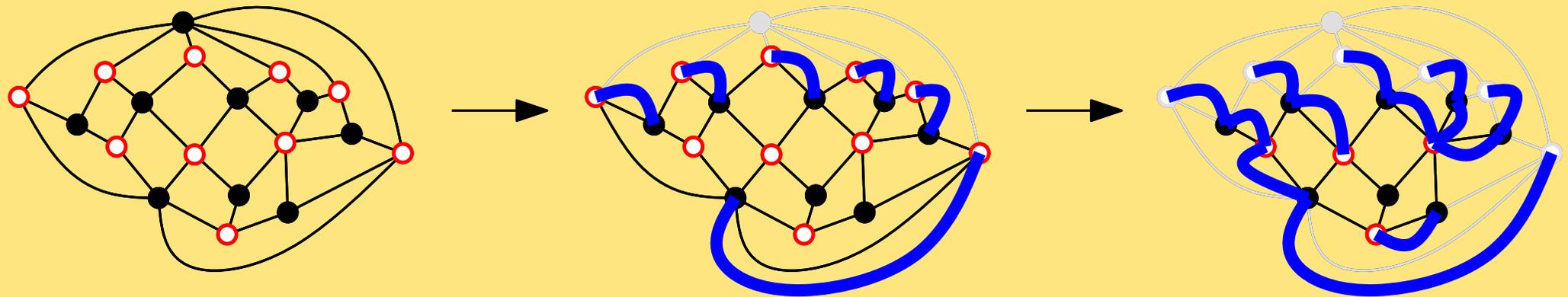
carte cubique ?

Règle des ronds-points  
avec priorité à droite



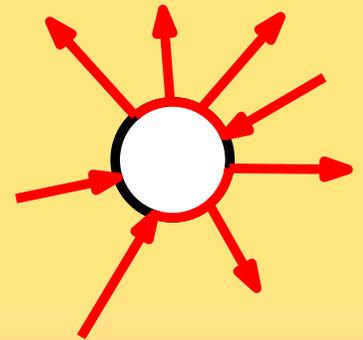
# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



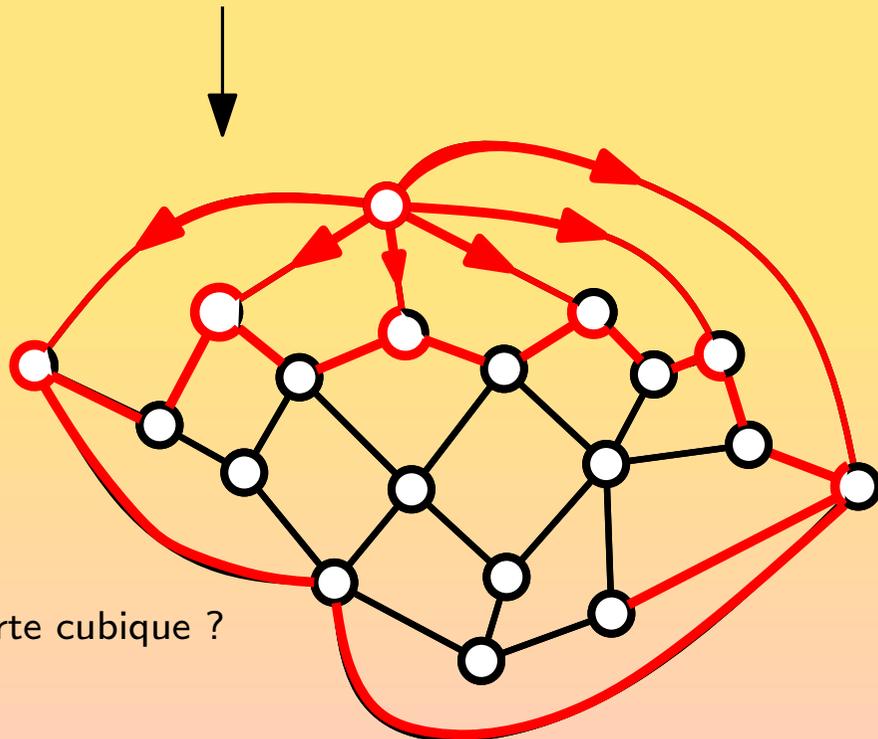
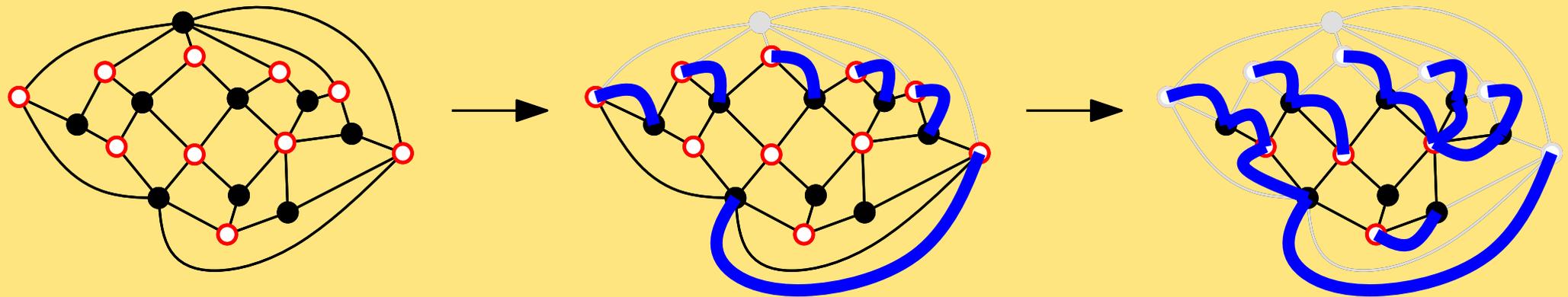
carte cubique ?

Règle des ronds-points  
avec priorité à droite



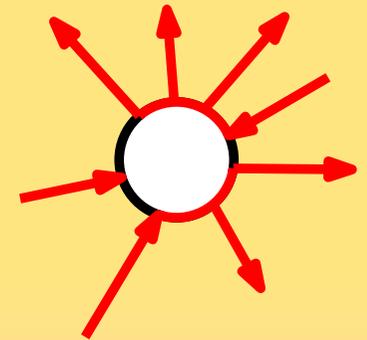
# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



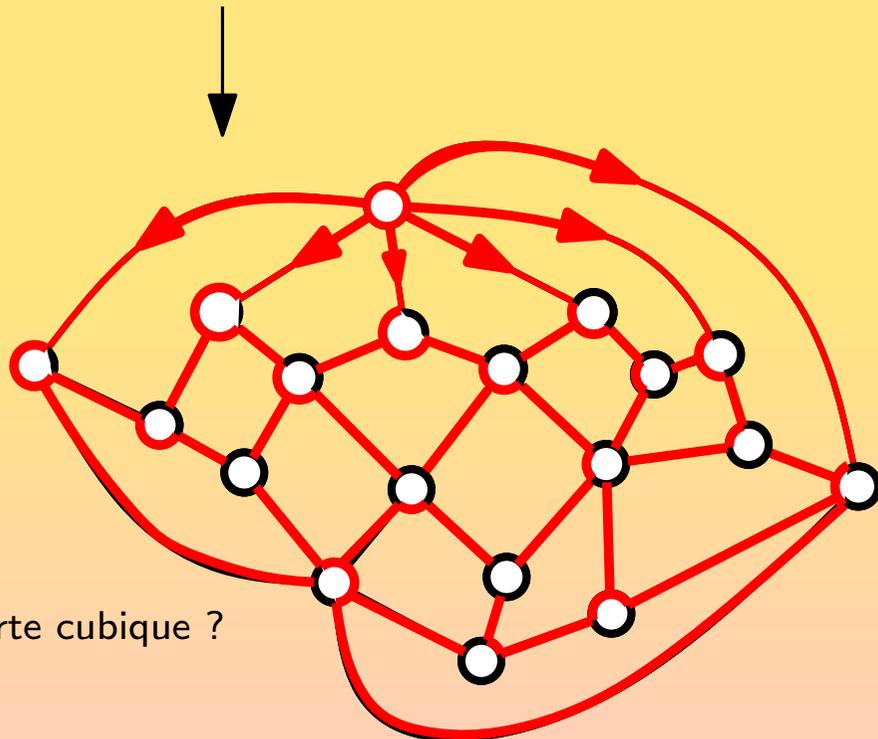
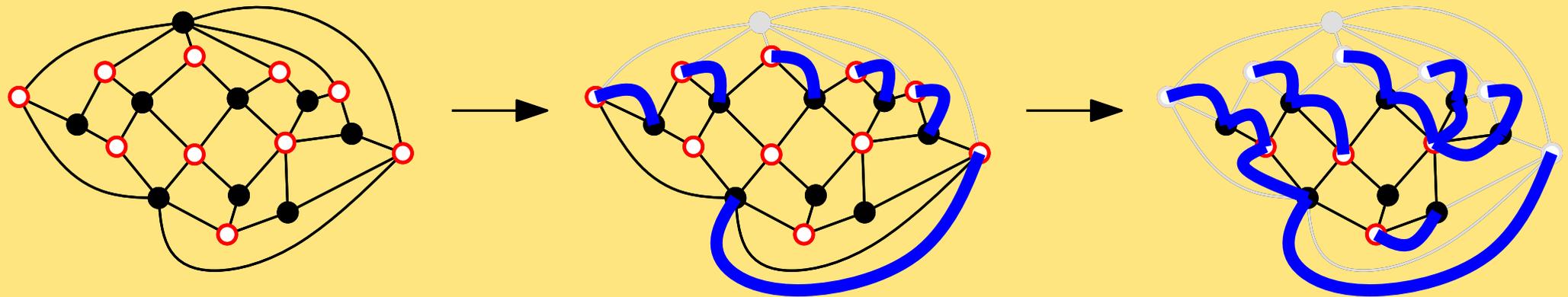
carte cubique ?

Règle des ronds-points  
avec priorité à droite



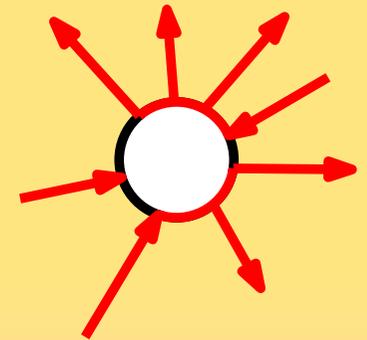
# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



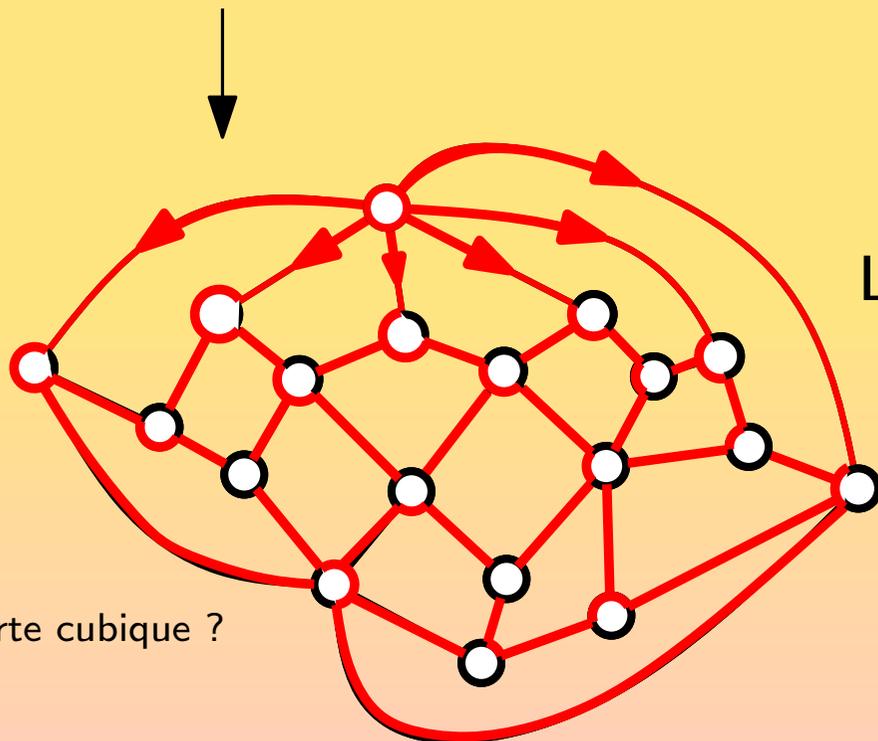
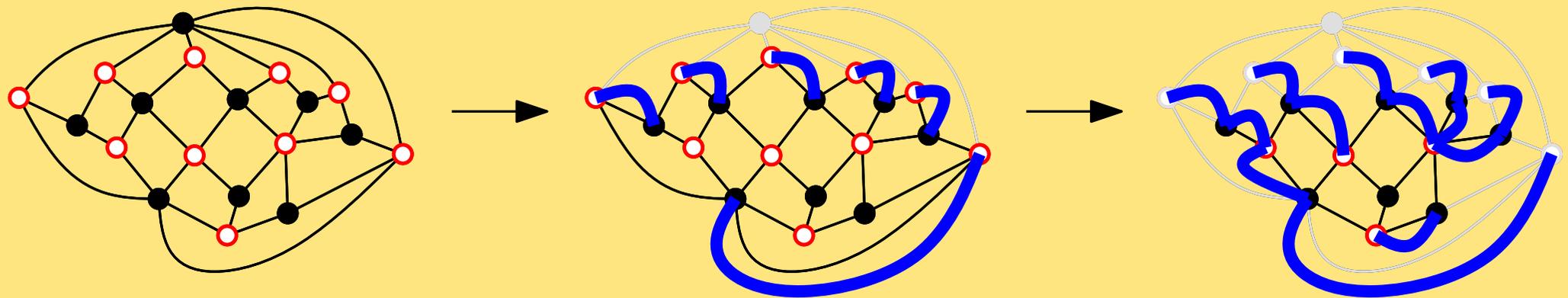
carte cubique ?

Règle des ronds-points  
avec priorité à droite



# Ronds-points et retards de Miermont

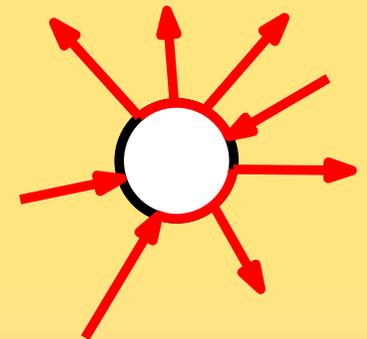
Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



carte cubique ?

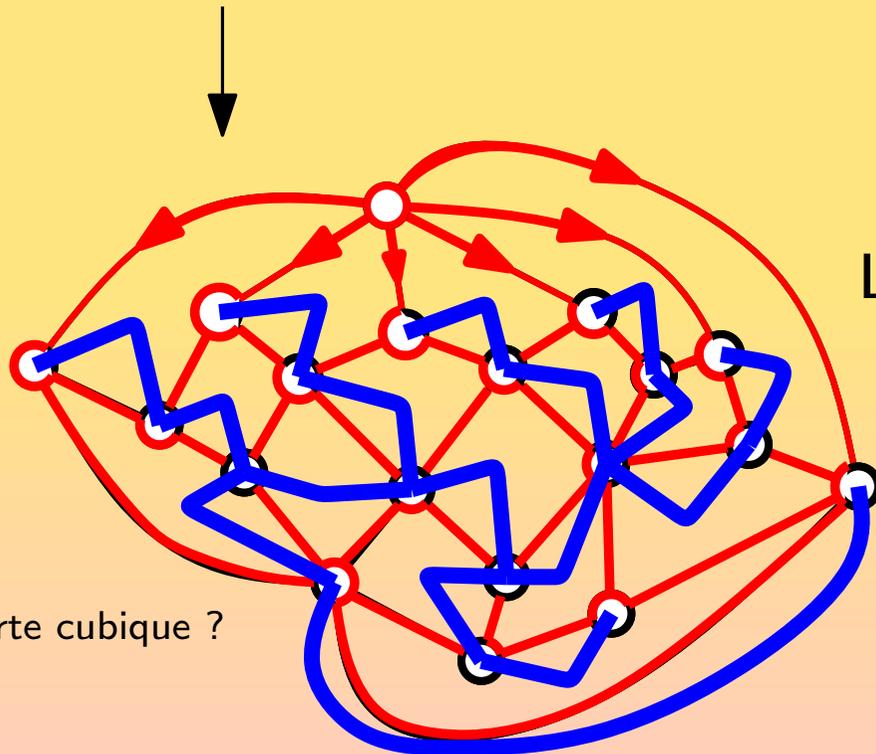
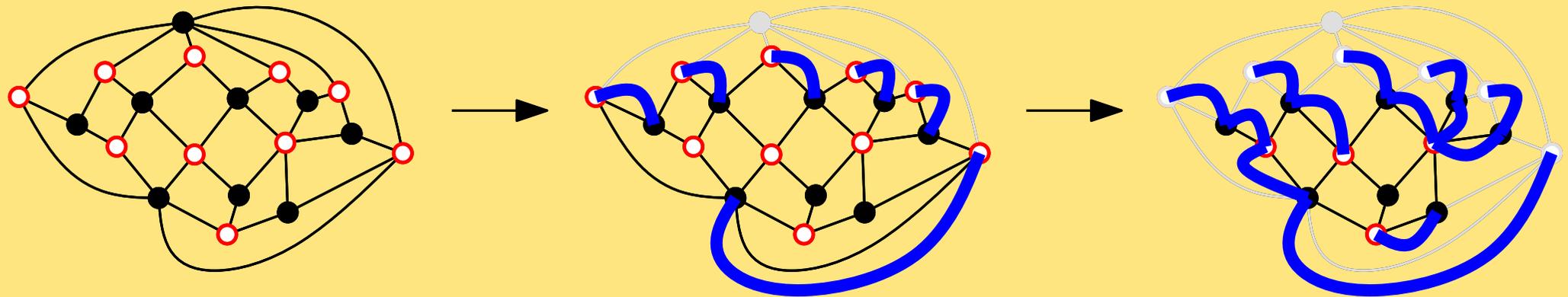
Règle des ronds-points  
avec priorité à droite

La carte rouge est un arbre.



# Ronds-points et retards de Miermont

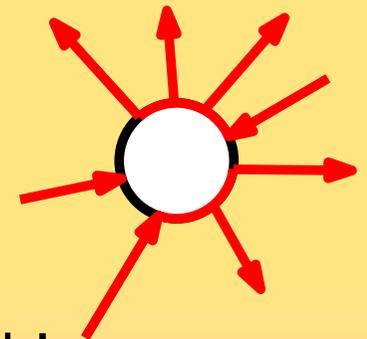
Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



Règle des ronds-points  
avec priorité à droite

La carte rouge est un arbre.

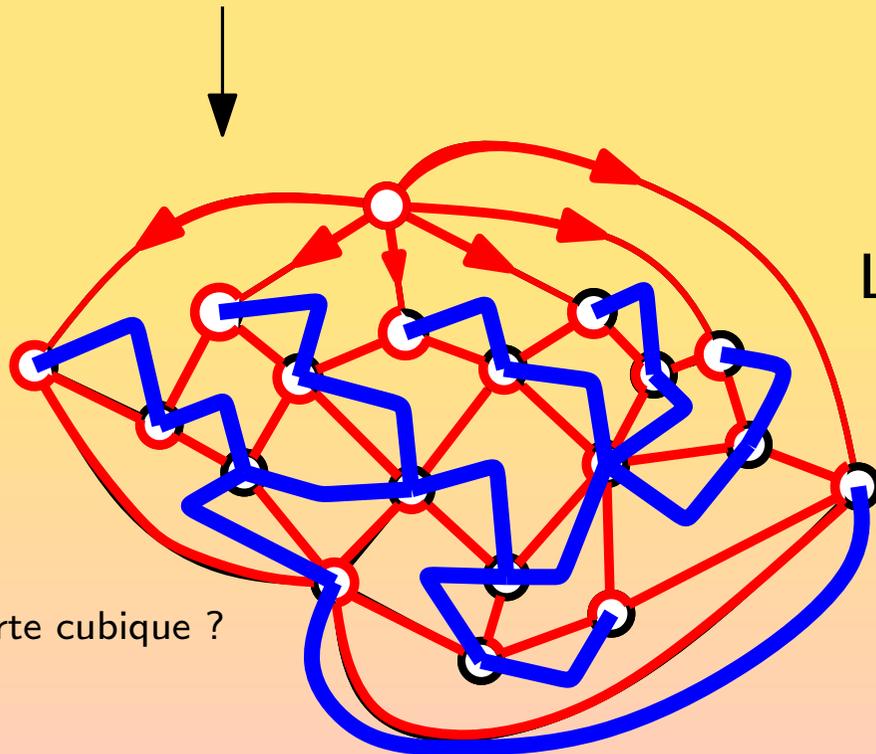
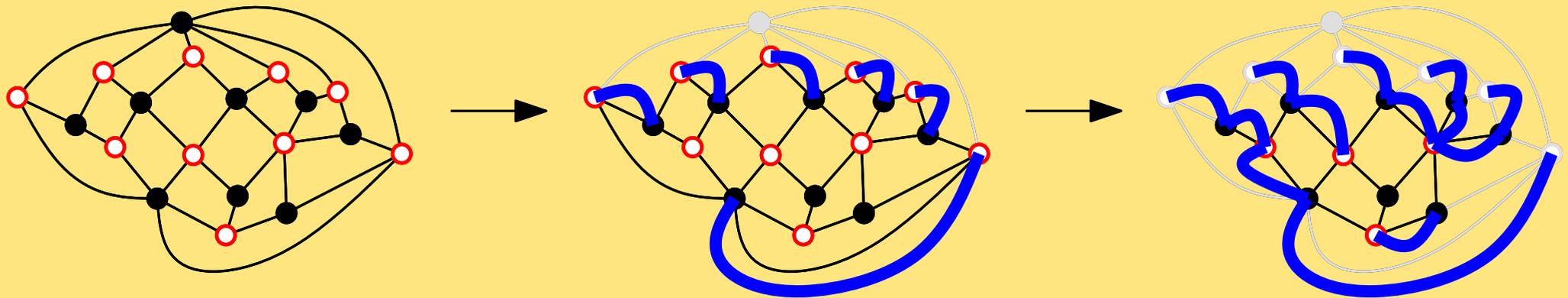
Dans le dual de la carte cubique,  
il reste les arêtes bleues !



carte cubique ?

# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

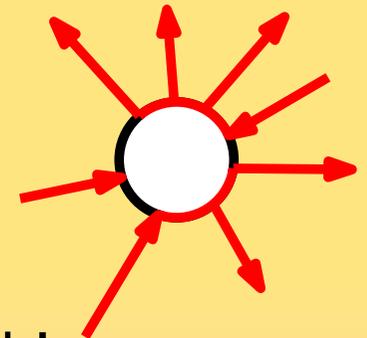


Règle des ronds-points  
avec priorité à droite

La carte rouge est un arbre.

Dans le dual de la carte cubique,  
il reste les arêtes bleues !

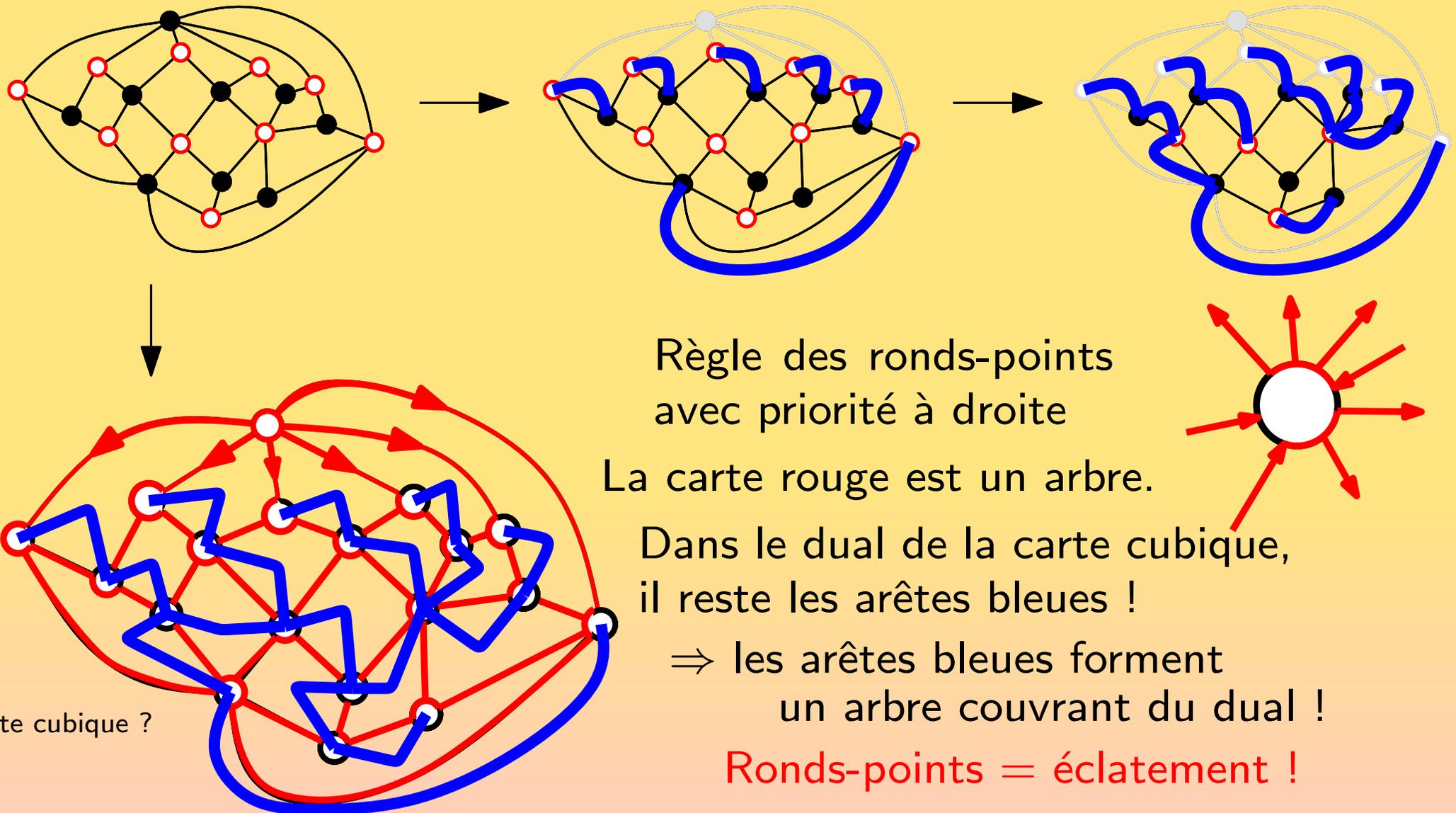
⇒ les arêtes bleues forment  
un arbre couvrant du dual !



carte cubique ?

# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...



## Ronds-points et retards de Miermont

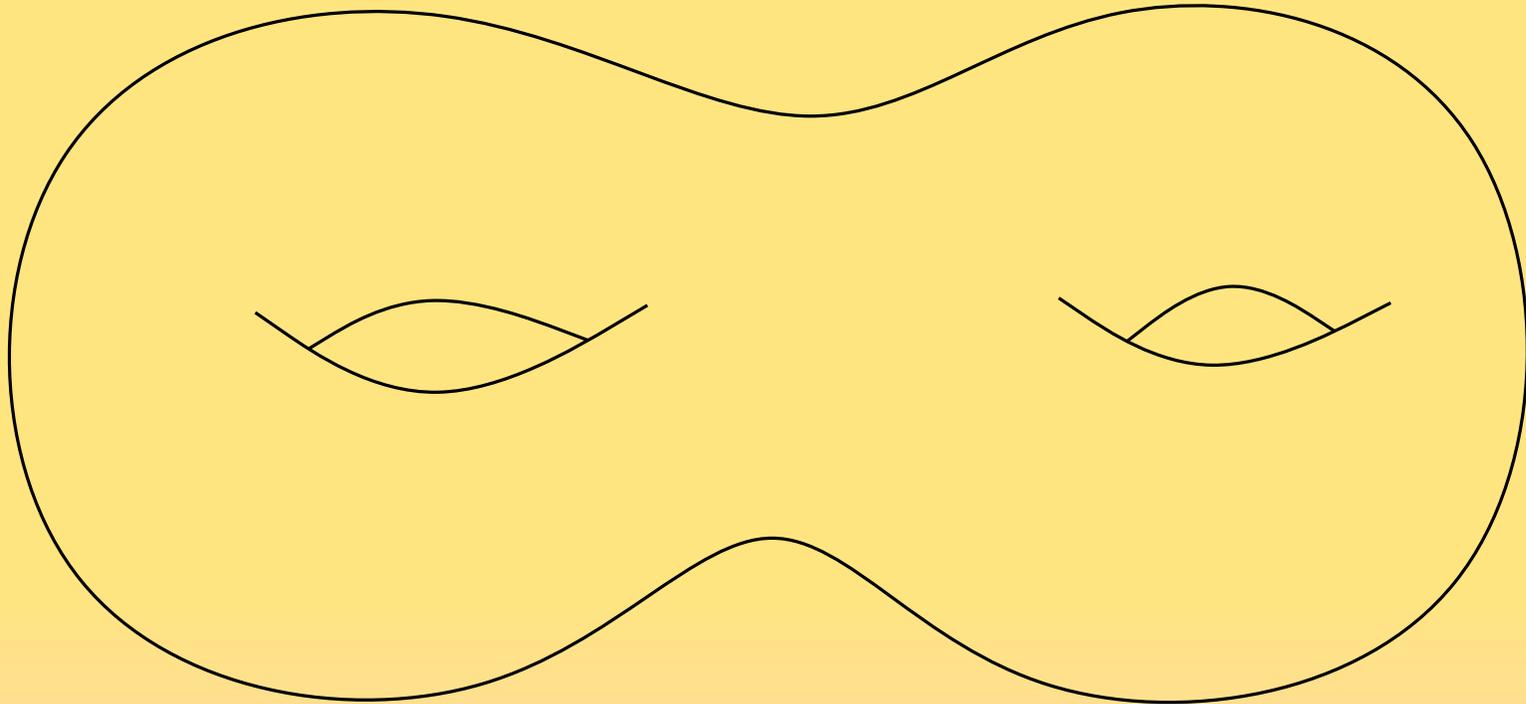
Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...

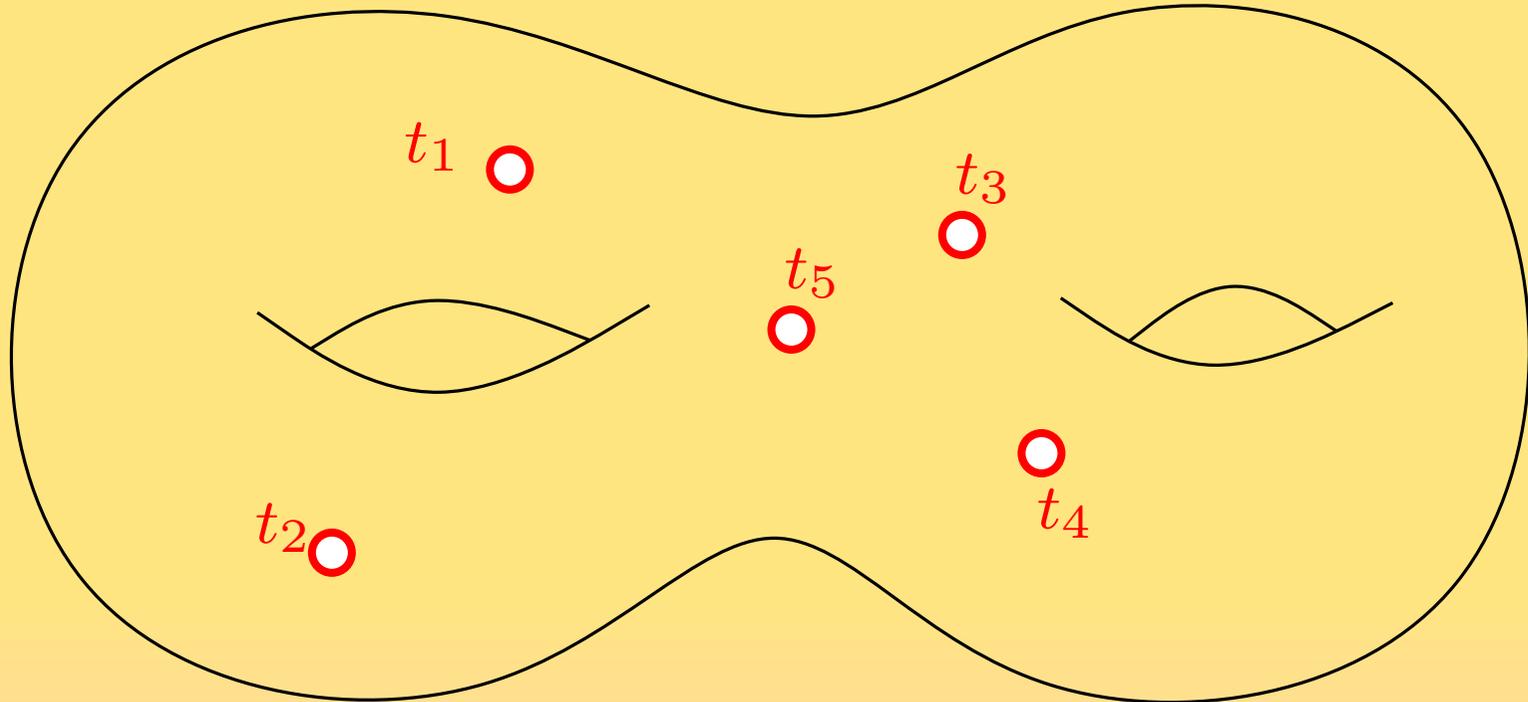


une quadrangulation de genre  $g$

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



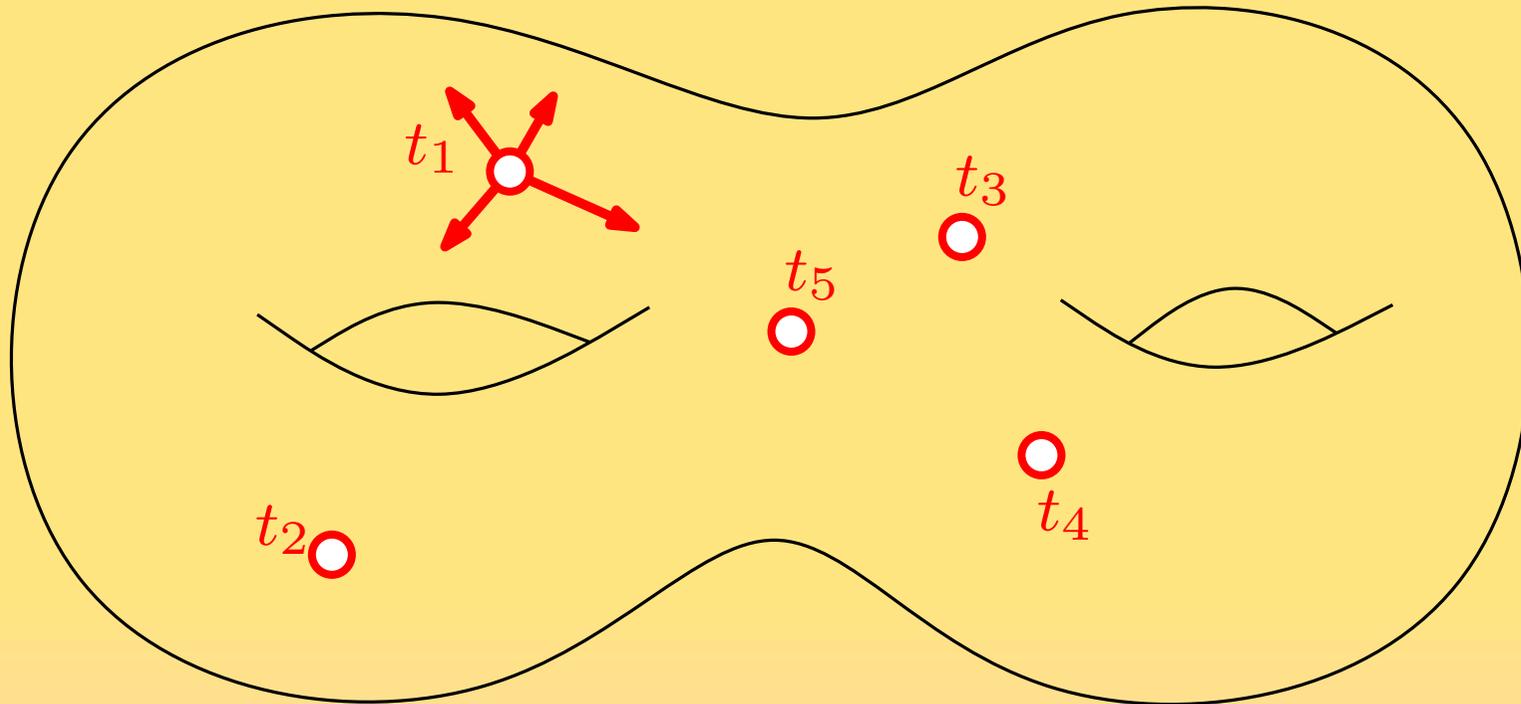
une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



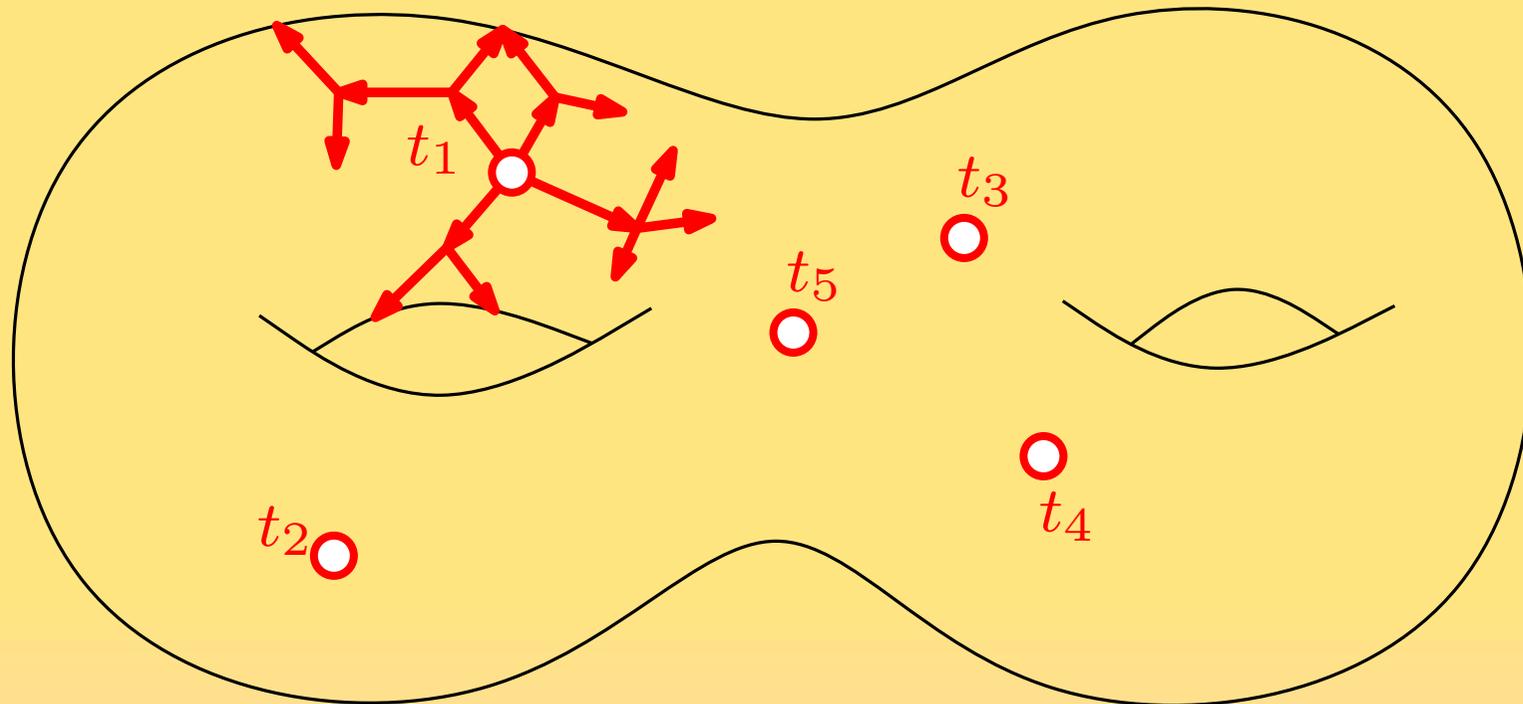
une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



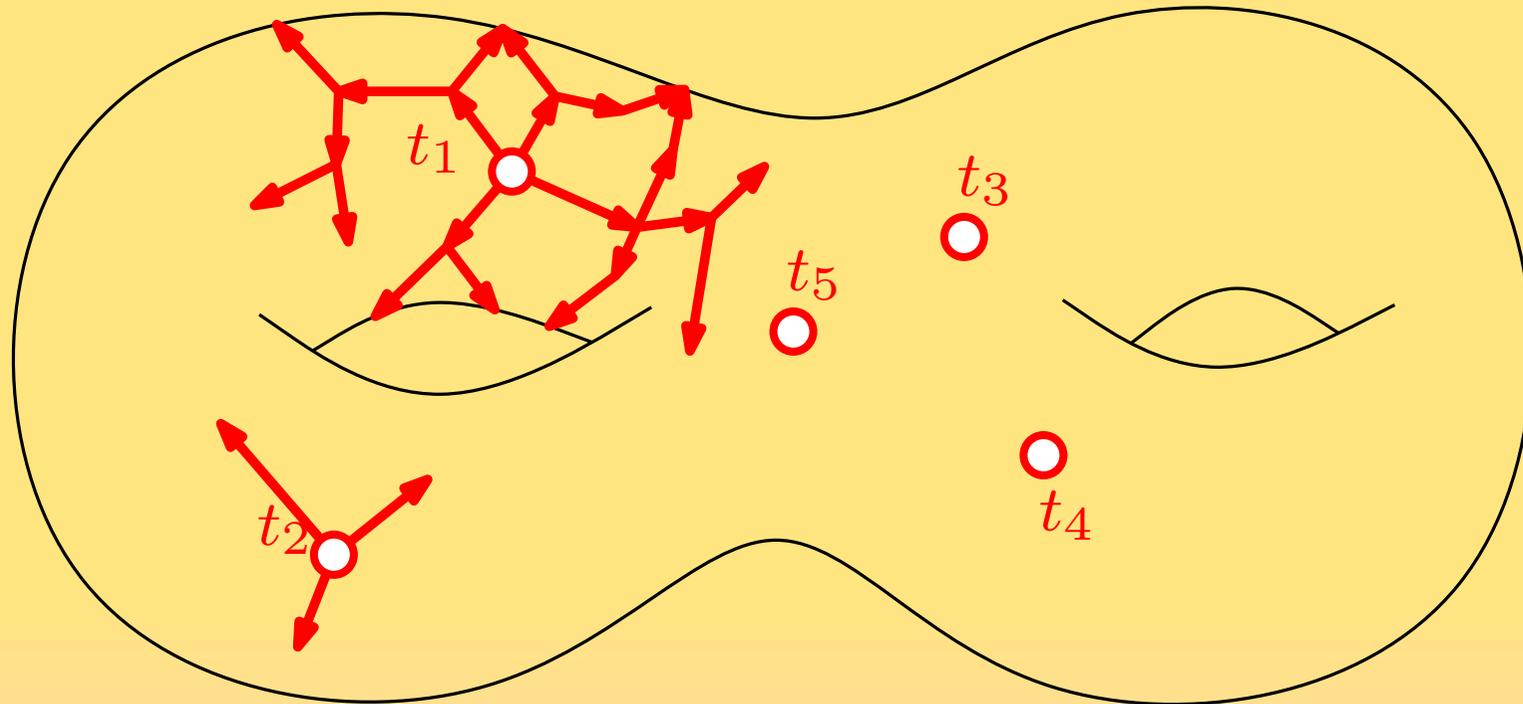
une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



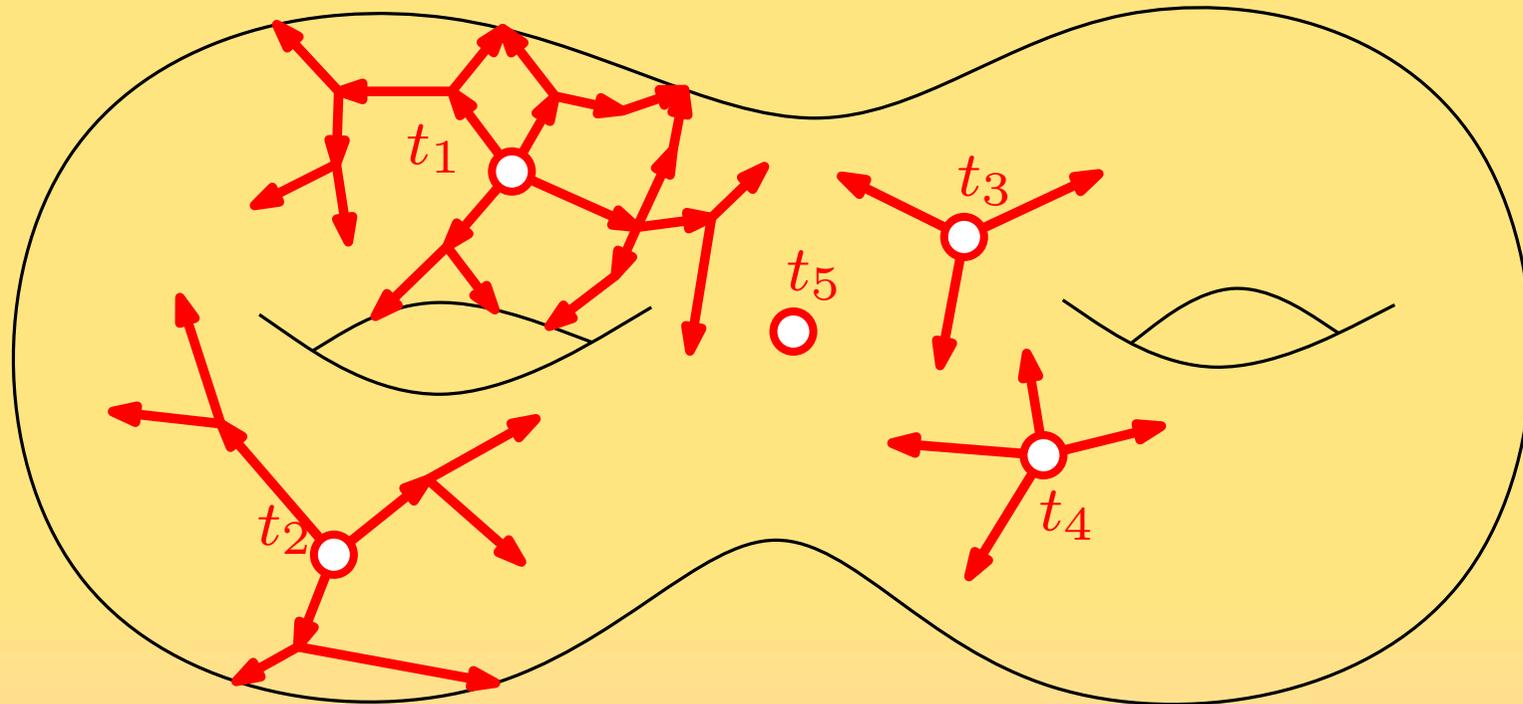
une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



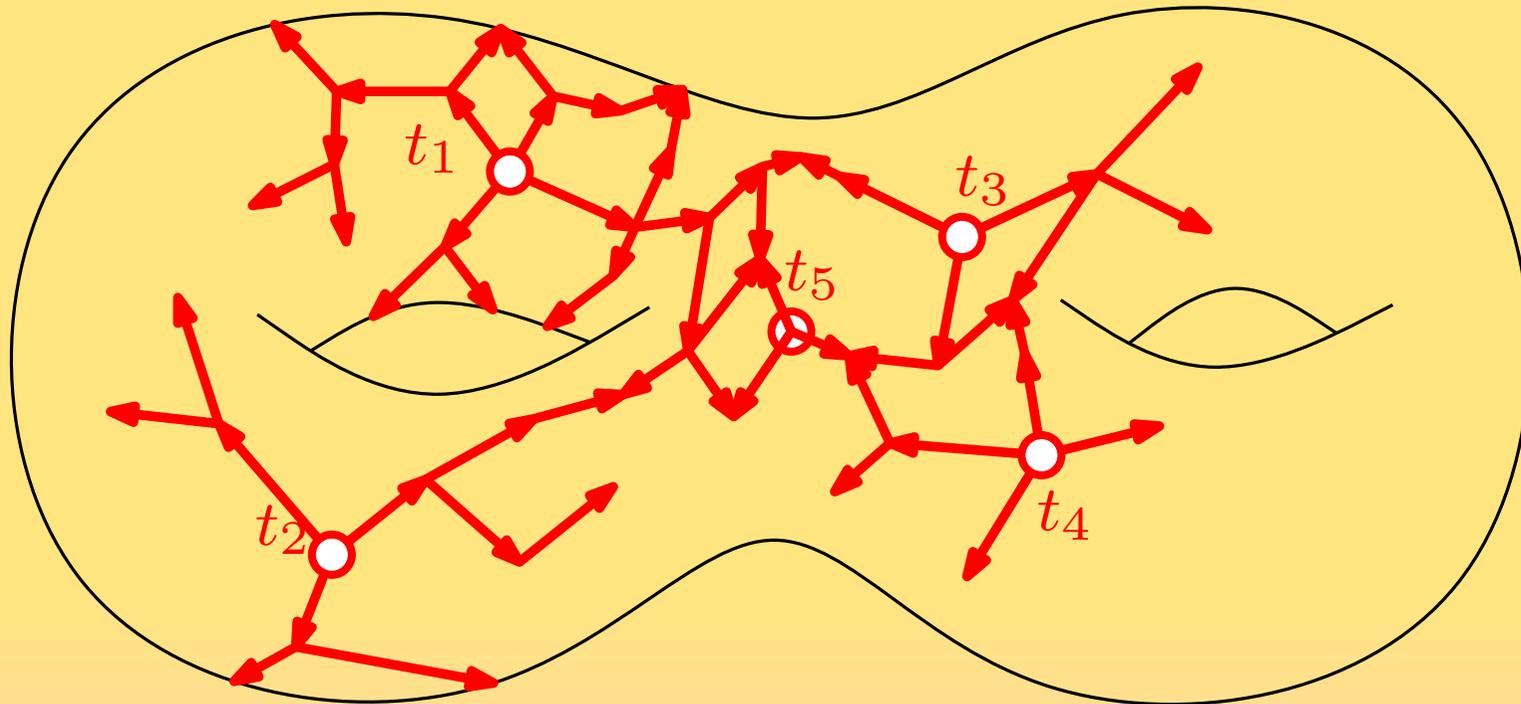
une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$

## Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



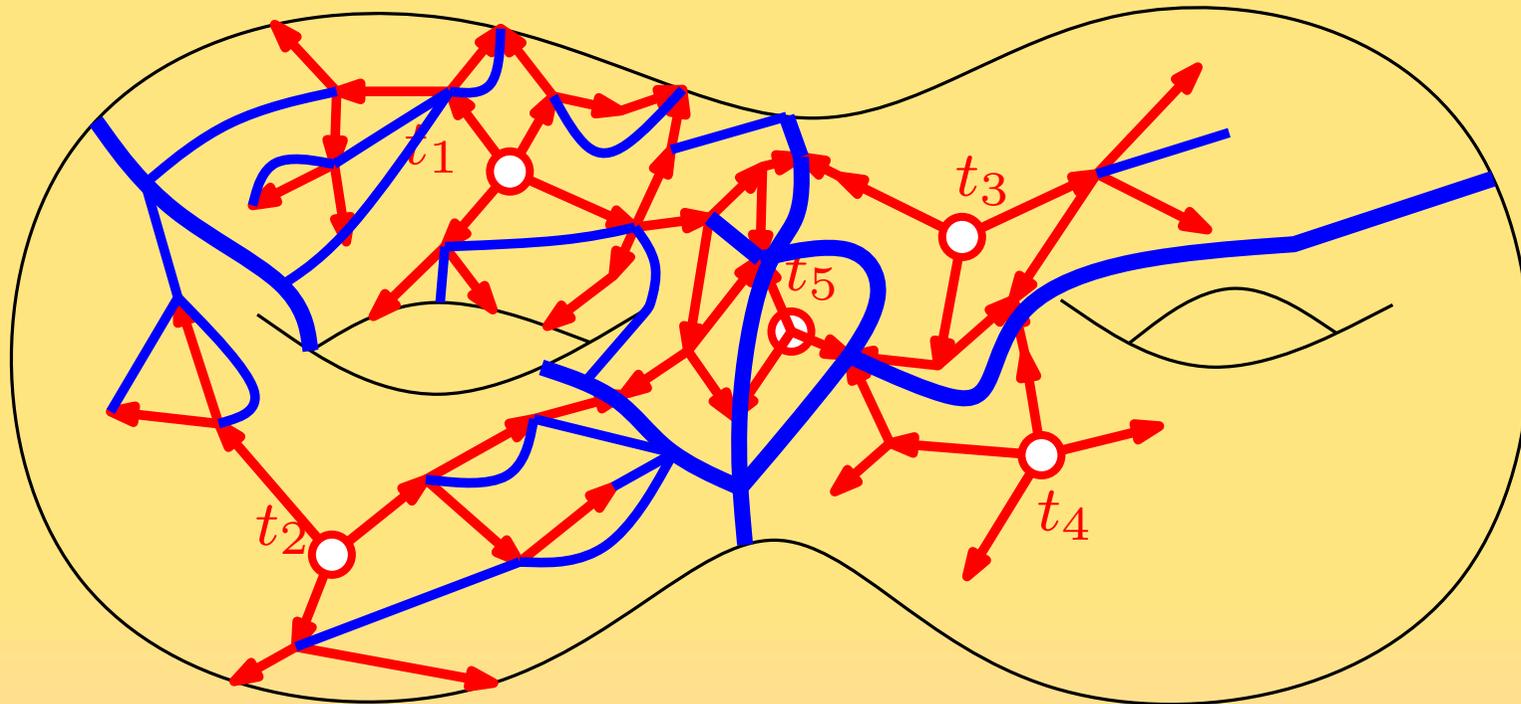
une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$

# Ronds-points et retards de Miermont

Voir le parcours en largeur comme l'écoulement d'un fluide...

Ce point de vue a permis à Miermont de proposer une généralisation à plusieurs sources...



une quadrangulation de genre  $g$

avec  $k$  sources avec retards  $t_i$



bijection

Une cartes bien étiquetée de genre  $g$  avec  $k$  faces

Augmenter la connexité: les cartes 2-connexes.

On a généralisé en genre supérieur, avec plusieurs sources...

## Augmenter la connexité: les cartes 2-connexes.

On a généralisé en genre supérieur, avec plusieurs sources...

Quid des autres familles de cartes ?

Extensions aux arbres très bien étiquetés pour les hypercartes (Arquès)  
puis aux mobiles pour les cartes biparties avec distrib degrés (BDFG)

## Augmenter la connexité: les cartes 2-connexes.

On a généralisé en genre supérieur, avec plusieurs sources...

Quid des autres familles de cartes ?

Extensions aux arbres très bien étiquetés pour les hypercartes (Arquès)  
puis aux mobiles pour les cartes biparties avec distrib degrés (BDFG)

Cartes 2-connexes, 3-connexes, triangulations... ?

## Augmenter la connexité: les cartes 2-connexes.

On a généralisé en genre supérieur, avec plusieurs sources...

Quid des autres familles de cartes ?

Extensions aux arbres très bien étiquetés pour les hypercartes (Arquès)  
puis aux mobiles pour les cartes biparties avec distrib degrés (BDFG)

Cartes 2-connexes, 3-connexes, triangulations... ?

Caractérisation de Dulucq et Penaud pour la biconnexité:  
chaque sous-arbre contient une étiquette plus petite que sa racine

## Augmenter la connexité: les cartes 2-connexes.

On a généralisé en genre supérieur, avec plusieurs sources...

Quid des autres familles de cartes ?

Extensions aux arbres très bien étiquetés pour les hypercartes (Arquès)  
puis aux mobiles pour les cartes biparties avec distrib degrés (BDFG)

Cartes 2-connexes, 3-connexes, triangulations... ?

Caractérisation de Dulucq et Penaud pour la biconnexité:  
chaque sous-arbre contient une étiquette plus petite que sa racine  
mais ça ne marche pas bien pour l'énumération.

## Augmenter la connexité: les cartes 2-connexes.

On a généralisé en genre supérieur, avec plusieurs sources...

Quid des autres familles de cartes ?

Extensions aux arbres très bien étiquetés pour les hypercartes (Arquès)  
puis aux mobiles pour les cartes biparties avec distrib degrés (BDFG)

Cartes 2-connexes, 3-connexes, triangulations... ?

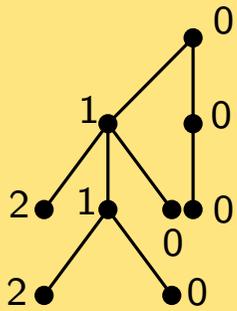
Caractérisation de Dulucq et Penaud pour la biconnexité:  
chaque sous-arbre contient une étiquette plus petite que sa racine  
mais ça ne marche pas bien pour l'énumération.

il faut une nouvelle idée...

# Les arbres ternaires gauches (Del Lungo, Del Ristoro, Penaud)

(Out of the blue again!) La bonne restriction sur les étiquettes est:

- au plus une branche  $+1$ , une branche  $0$ , une branche  $-1$
- $\Rightarrow$  encoder par un arbre ternaire, qui penche à gauche...

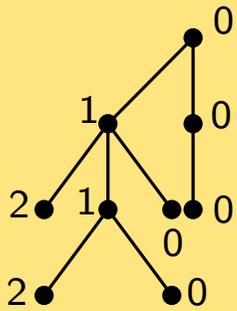


arbre ternaire gauche  
plongé canoniquement

# Les arbres ternaires gauches (Del Lungo, Del Ristoro, Penaud)

(Out of the blue again!) La bonne restriction sur les étiquettes est:

- au plus une branche +1, une branche 0, une branche -1
- $\Rightarrow$  encoder par un arbre ternaire, qui penche à gauche...



arbre ternaire gauche  
plongé canoniquement

Le nombre d'arbres ternaires gauches est

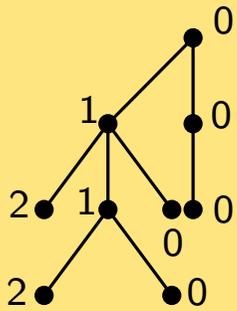
$$\frac{4}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

comme le nombre de cartes 2-c à  $n$  arêtes.

# Les arbres ternaires gauches (Del Lungo, Del Ristoro, Penaud)

(Out of the blue again!) La bonne restriction sur les étiquettes est:

- au plus une branche  $+1$ , une branche  $0$ , une branche  $-1$
- $\Rightarrow$  encoder par un arbre ternaire, qui penche à gauche...



arbre ternaire gauche  
plongé canoniquement

Le nombre d'arbres ternaires gauches est

$$\frac{4}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

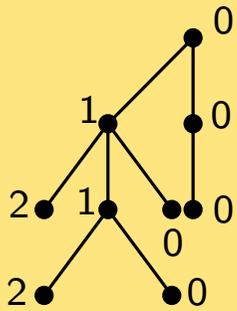
comme le nombre de cartes 2-c à  $n$  arêtes.

Bijections récursives indépendantes de DLDRP et Jacquard-S.  
entre ces arbres et les cartes non-séparables.

# Les arbres ternaires gauches (Del Lungo, Del Ristoro, Penaud)

(Out of the blue again!) La bonne restriction sur les étiquettes est:

- au plus une branche +1, une branche 0, une branche -1
- $\Rightarrow$  encoder par un arbre ternaire, qui penche à gauche...



arbre ternaire gauche  
plongé canoniquement

Le nombre d'arbres ternaires gauches est

$$\frac{4}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

comme le nombre de cartes 2-c à  $n$  arêtes.

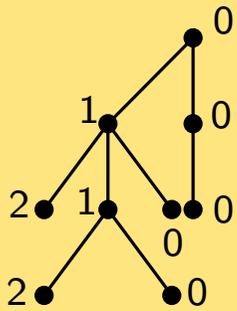
Bijections récursives indépendantes de DLDRP et Jacquard-S.  
entre ces arbres et les cartes non-séparables.

Compter ces arbres directement ?

# Les arbres ternaires gauches (Del Lungo, Del Ristoro, Penaud)

(Out of the blue again!) La bonne restriction sur les étiquettes est:

- au plus une branche +1, une branche 0, une branche -1
- $\Rightarrow$  encoder par un arbre ternaire, qui penche à gauche...



arbre ternaire gauche  
plongé canoniquement

Le nombre d'arbres ternaires gauches est

$$\frac{4}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

comme le nombre de cartes 2-c à  $n$  arêtes.

Bijections récursives indépendantes de DLDRP et Jacquard-S.  
entre ces arbres et les cartes non-séparables.

Compter ces arbres directement ?

$\Rightarrow$  travaux récents de BDGF, MBM, Janson, Kuba et lien avec ISE 1d.

$\Rightarrow$  J.-S.'94 : retournement d'une branche... *a posteriori* une conjugaison

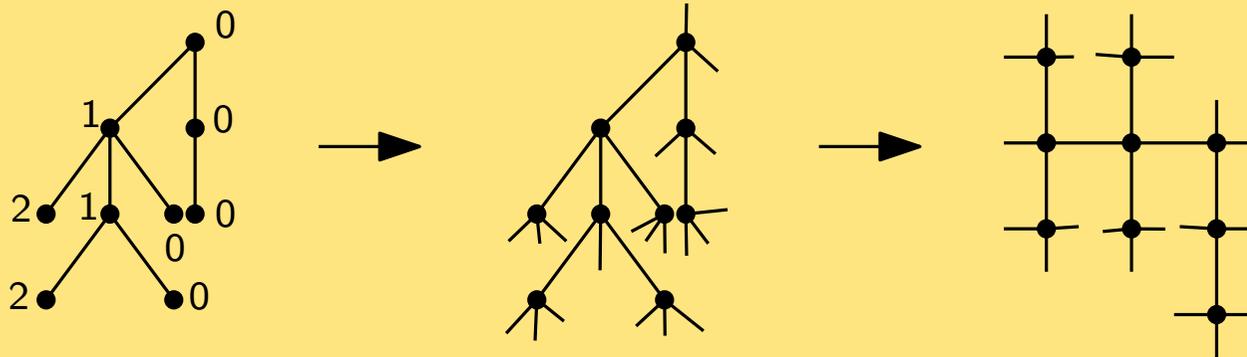
Plongements canoniques: 1d ou 2d ?

## Plongements canoniques: 1d ou 2d ?

Plongement 2d canonique: les étiquettes décrivent la variation d'angle lorsqu'on tourne autour de l'arbre plongé sur la grille

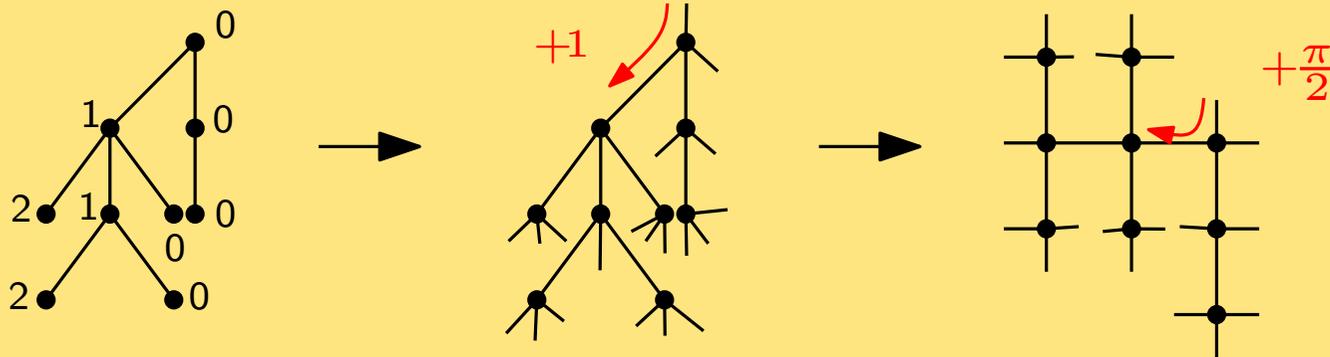
# Plongements canoniques: 1d ou 2d ?

Plongement 2d canonique: les étiquettes décrivent la variation d'angle lorsqu'on tourne autour de l'arbre plongé sur la grille



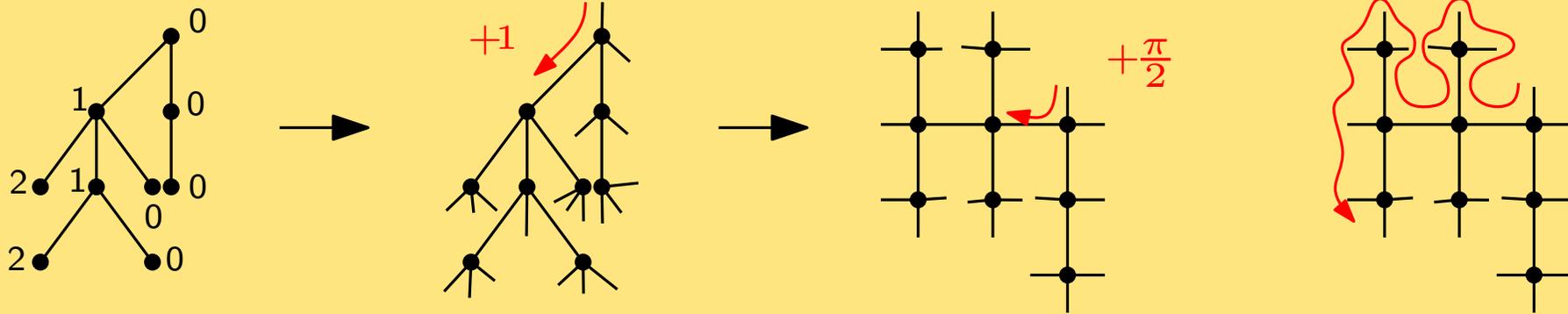
# Plongements canoniques: 1d ou 2d ?

Plongement 2d canonique: les étiquettes décrivent la variation d'angle lorsqu'on tourne autour de l'arbre plongé sur la grille



# Plongements canoniques: 1d ou 2d ?

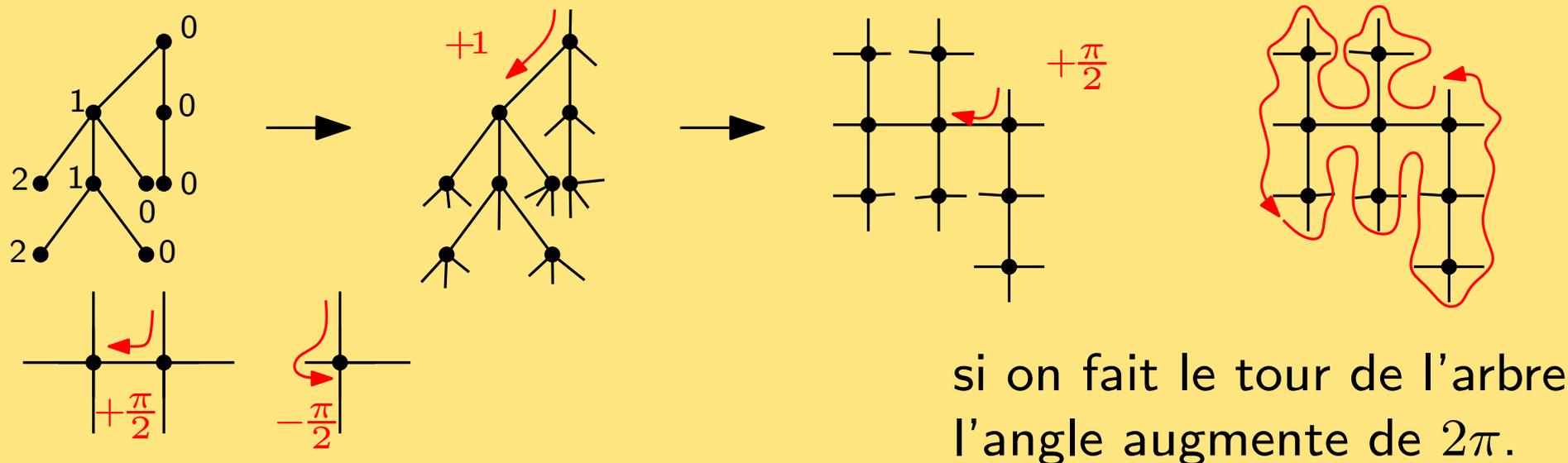
Plongement 2d canonique: les étiquettes décrivent la variation d'angle lorsqu'on tourne autour de l'arbre plongé sur la grille



si on fait le tour de l'arbre

## Plongements canoniques: 1d ou 2d ?

Plongement 2d canonique: les étiquettes décrivent la variation d'angle lorsqu'on tourne autour de l'arbre plongé sur la grille



Représenter la variation d'angle par un chemin de Dyck.

Lemme cyclique  $\Rightarrow$  4 feuilles telles que l'angle reste toujours positif !

$$\#\{\text{arbres ternaires gauches}\} = \frac{4}{2n+2} \#\{\text{arbres ternaires}\}$$

On a retrouvé ma conjugaison d'arbres !

La même approche s'applique pour les arbres binaires du début...

les travaux de Tutte c'est bien...

les travaux de Tutte c'est bien...

mais avant ça, Hurwitz comptait déjà des cartes...

les travaux de Tutte c'est bien...

mais avant ça, Hurwitz comptait déjà des cartes...

**Théorème** (Hurwitz, 1894)

les travaux de Tutte c'est bien...

mais avant ça, Hurwitz comptait déjà des cartes...

**Théorème** (Hurwitz, 1894)

le nombre de cartes étiquetées planaires ayant  $f$  faces, dont  $d_i$  sont d'ordre  $i$  est

$$n^{f-3} (n + f - 2)! \prod_{i \geq 1} \left[ \frac{i^i}{(i-1)!} \right]^{d_i}$$

les travaux de Tutte c'est bien...

mais avant ça, Hurwitz comptait déjà des cartes...

**Théorème** (Hurwitz, 1894)

le nombre de cartes étiquetées planaires ayant  $f$  faces, dont  $d_i$  sont d'ordre  $i$  est

$$n^{f-3} (n + f - 2)! \prod_{i \geq 1} \left[ \frac{i^i}{(i-1)!} \right]^{d_i}$$

Qu'est ce qu'une carte étiquetée...?

les travaux de Tutte c'est bien...

mais avant ça, Hurwitz comptait déjà des cartes...

**Théorème** (Hurwitz, 1894)

le nombre de cartes étiquetées planaires ayant  $f$  faces, dont  $d_i$  sont d'ordre  $i$  est

$$n^{f-3} (n + f - 2)! \prod_{i \geq 1} \left[ \frac{i^i}{(i-1)!} \right]^{d_i}$$

Qu'est ce qu'une carte étiquetée...?

lorsque  $f = 1$  ce sont des arbres **de Cayley** !

les travaux de Tutte c'est bien...

mais avant ça, Hurwitz comptait déjà des cartes...

**Théorème** (Hurwitz, 1894)

le nombre de cartes étiquetées planaires ayant  $f$  faces, dont  $d_i$  sont d'ordre  $i$  est

$$n^{f-3} (n + f - 2)! \prod_{i \geq 1} \left[ \frac{i^i}{(i-1)!} \right]^{d_i}$$

Qu'est ce qu'une carte étiquetée...?

lorsque  $f = 1$  ce sont des arbres **de Cayley** !

Inventer une bijection entre ces cartes

et des forêts d'arbres de Cayley....