

# Combinatoire bijective et algorithmique

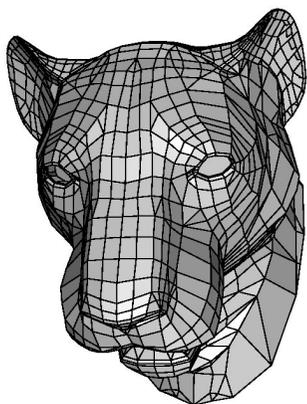
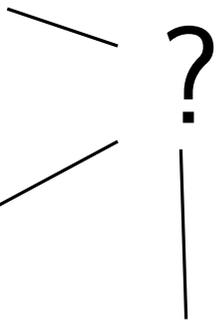
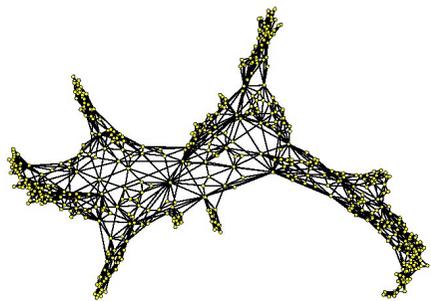
Arbres et cartes combinatoires: de l'énumération  
au codage compact

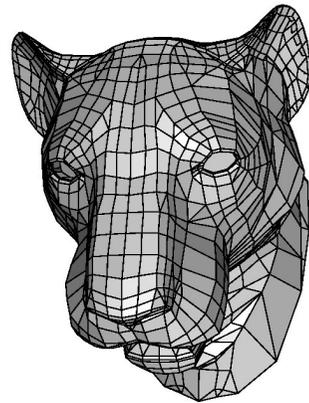
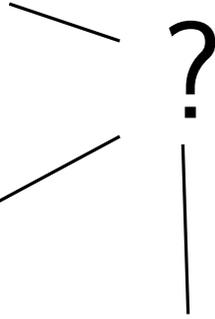
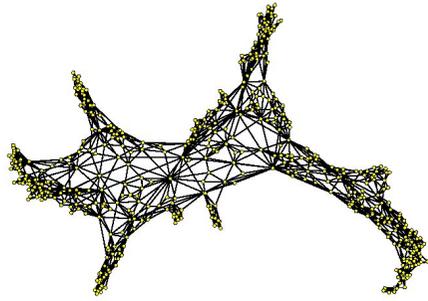
Gilles Schaeffer

CNRS, Laboratoire d'informatique de l'École Polytechnique

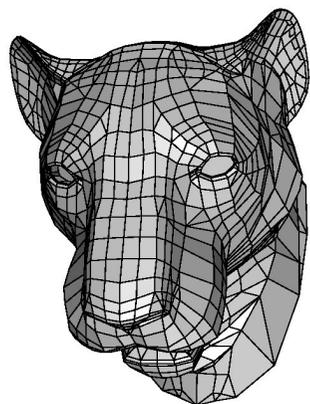
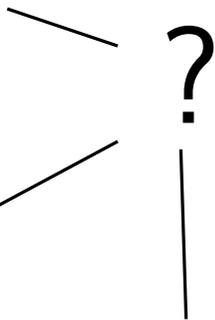
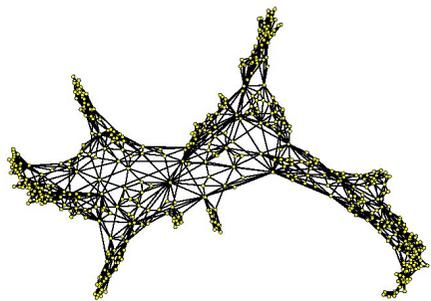
présentation basée sur des travaux de et avec  
L. Castelli Aleardi, O. Devillers, E. Duchi, É. Fusy, D. Poulalhon

Journée NormaSTIC, Caen, 28 mai 2014



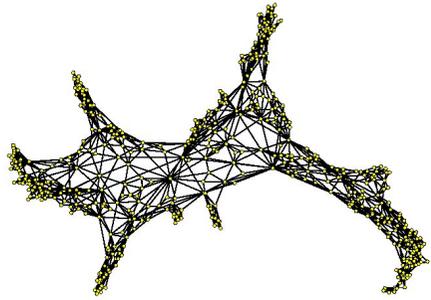


carte géographique



carte géographique

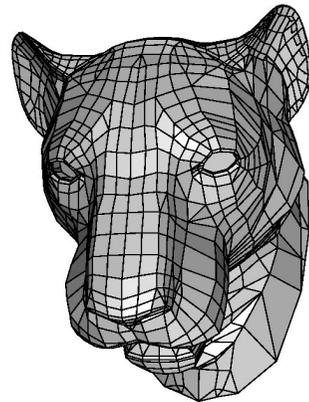
maillage surfacique



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)

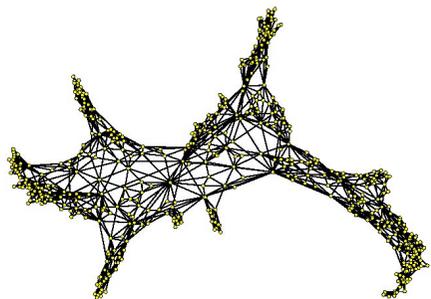


carte géographique



maillage surfacique

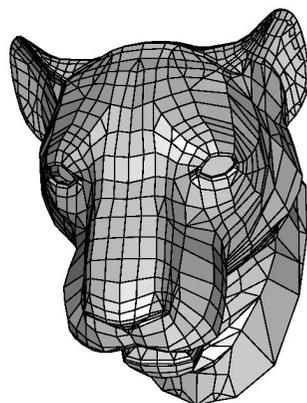
?



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



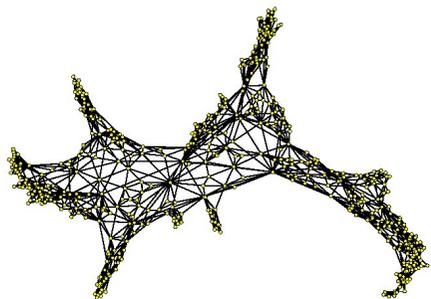
carte géographique



maillage surfacique

des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

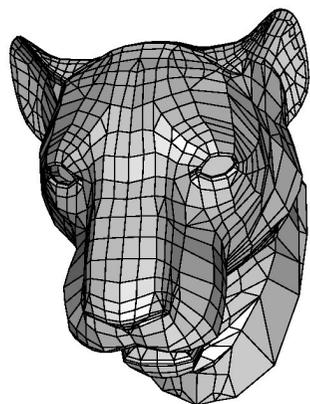
?



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

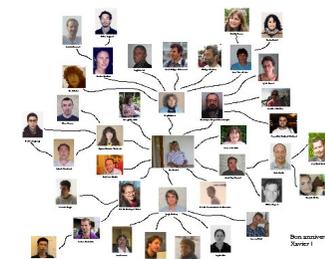
des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

?



arbre en automne

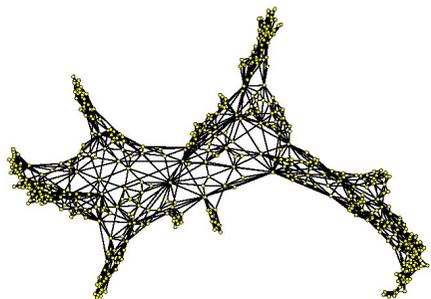
plus facile



arbre généalogique



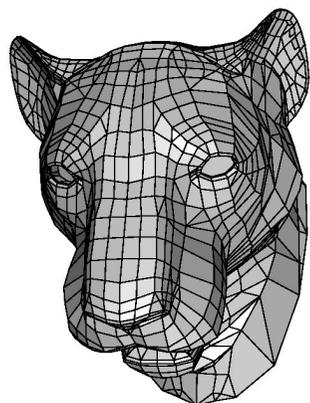
arbre de synthèse



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

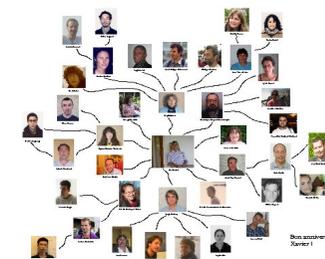
?

?



arbre en automne

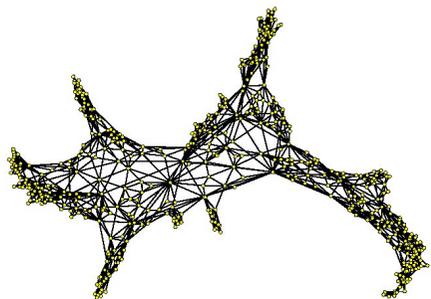
plus facile



arbre généalogique



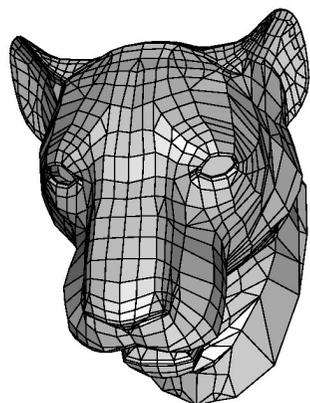
arbre de synthèse



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

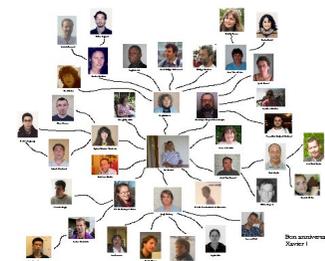
des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

?



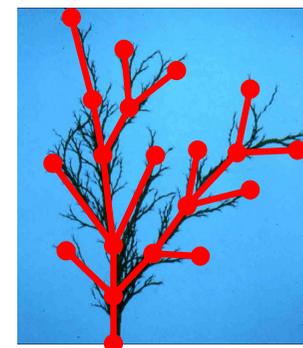
arbre en automne

plus facile

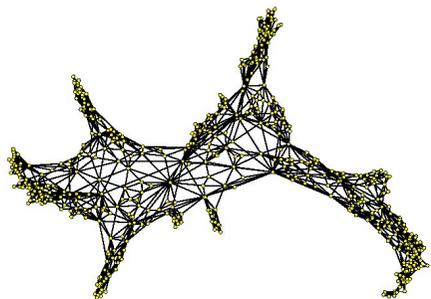


arbre généalogique

?



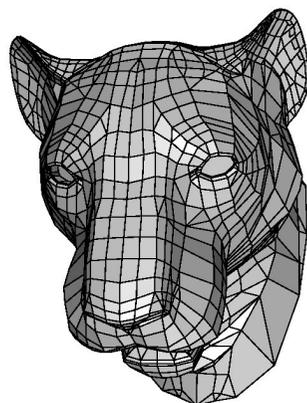
arbre de synthèse



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

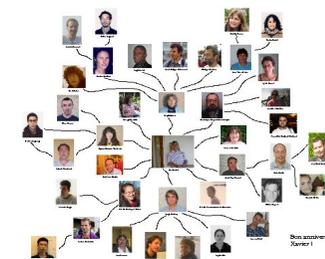
des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

?

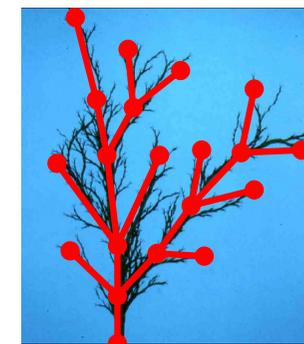
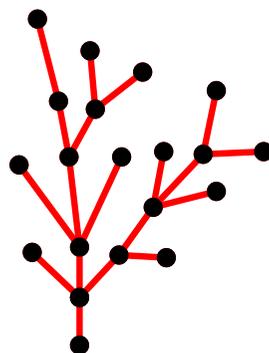


arbre en automne

plus facile



arbre généalogique



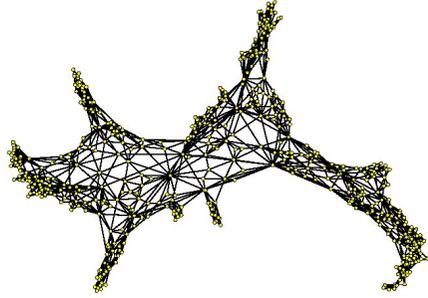
arbre de synthèse

**arbre** combinatoire

=

structure formée de **sommets**  
liés par des **arêtes** formants  
des branches indépendantes

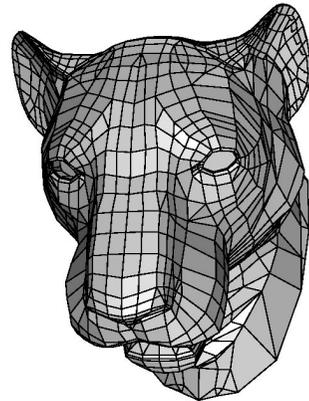
# Objet combinatoire / abstraction discrète



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

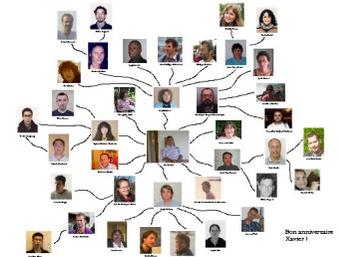
des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

?

plus facile



arbre en automne

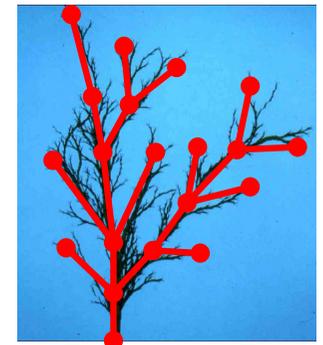
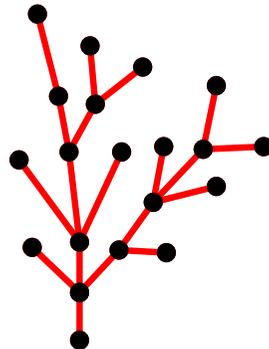


arbre généalogique

**arbre combinatoire**

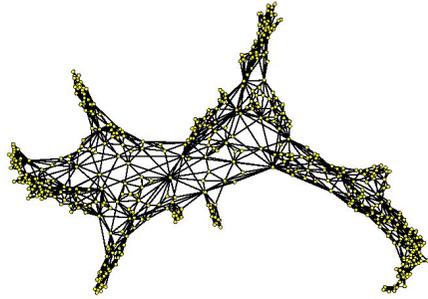
=

structure formée de **sommets**  
liés par des **arêtes** formants  
des branches indépendantes



arbre de synthèse

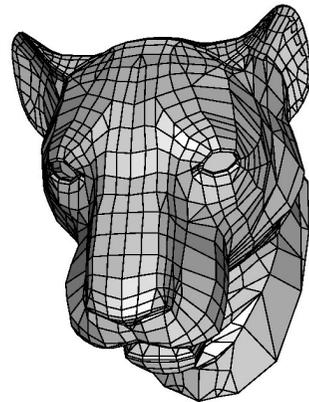
# Objet combinatoire / abstraction discrète



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique

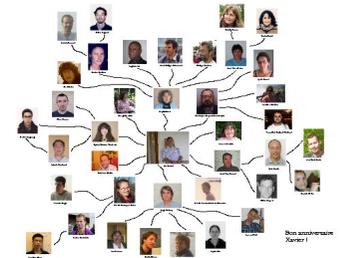
des objets qui décrivent des surfaces...  
mais plus formellement  
comment décrire leur point commun ?

?

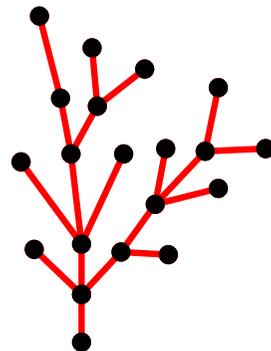
plus facile



arbre en automne



arbre généalogique



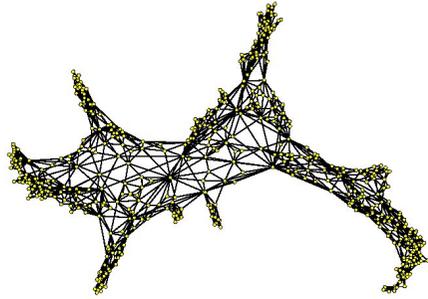
arbre de synthèse

**arbre combinatoire**

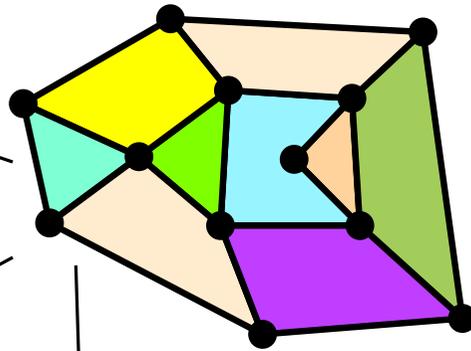
=

structure formée de **sommets**  
liés par des **arêtes** formants  
des branches indépendantes

# Objet combinatoire / abstraction discrète

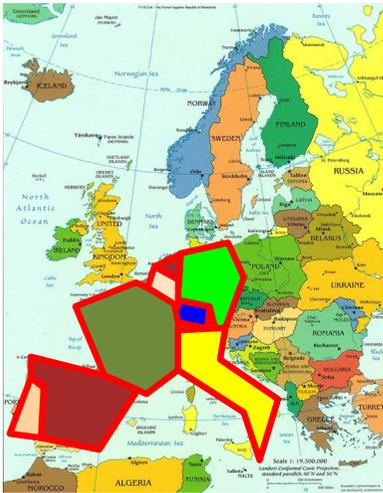


géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)

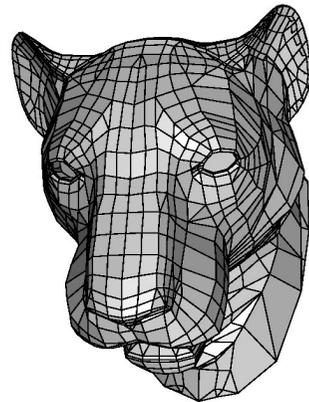


carte combinatoire  
=

structure formée de **sommets**  
et d'**arêtes** définissant des  
**faces** (régions  $\text{spl}^t$  connexes)



carte géographique

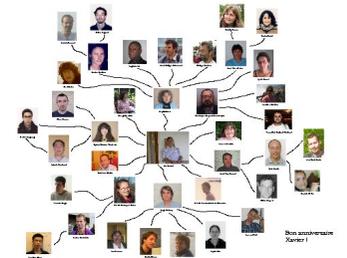


maillage surfacique



arbre en automne

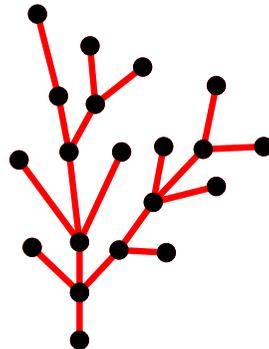
plus facile



arbre généalogique

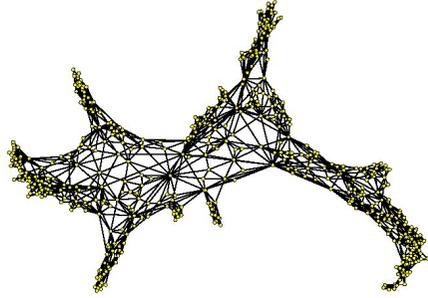
arbre combinatoire  
=

structure formée de **sommets**  
liés par des **arêtes** formants  
des branches indépendantes

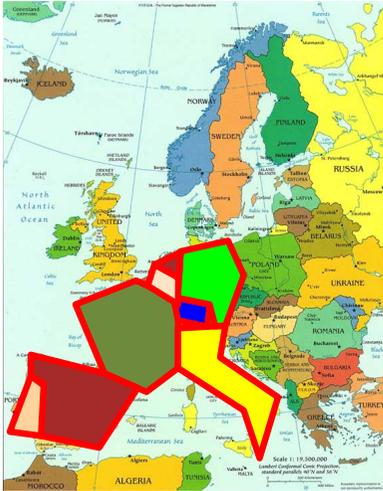
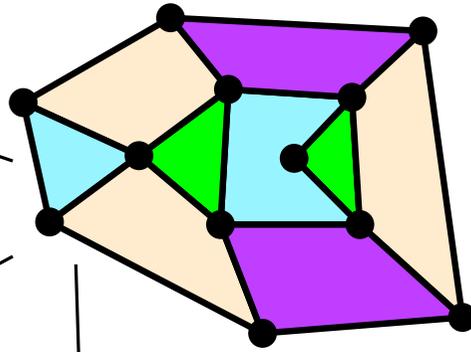


arbre de synthèse

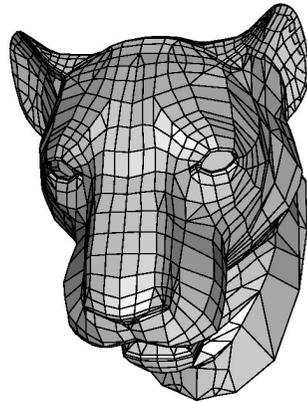
# Des cartes, dans différents contextes



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)

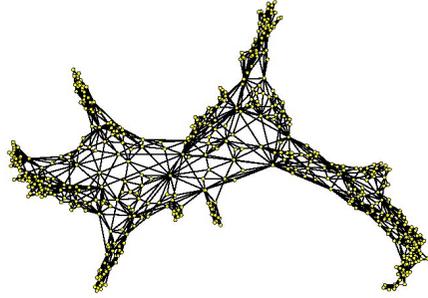


carte géographique

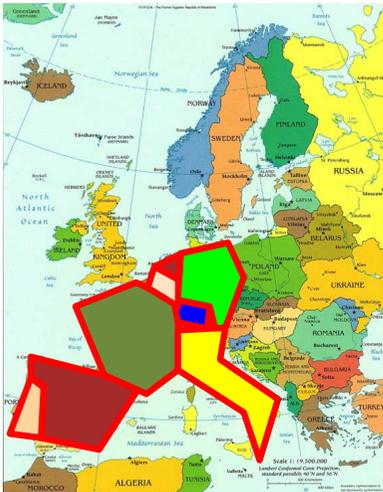
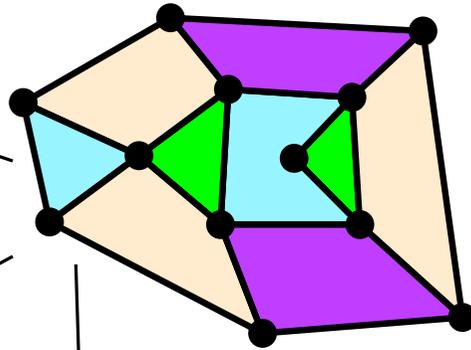


maillage surfacique (CAO)

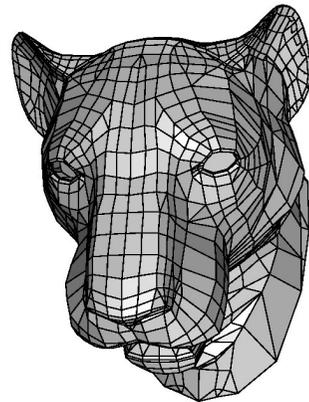
# Des cartes, dans différents contextes



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique

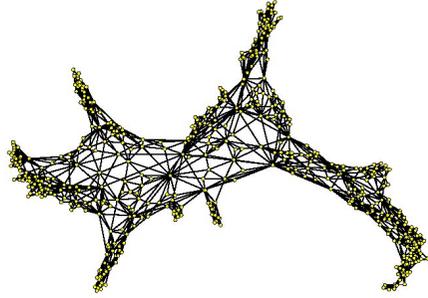


maillage surfacique (CAO)

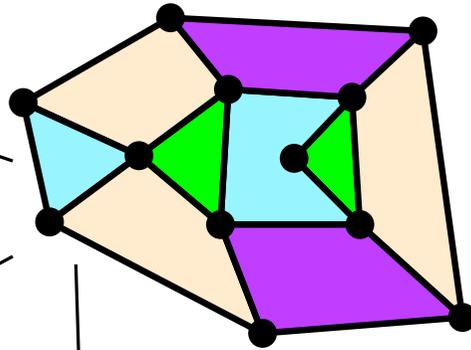
## Théorie des graphes

pour utiliser la planarité,  
travailler sur une carte planaire !  
exemple: théorème des 4 couleurs

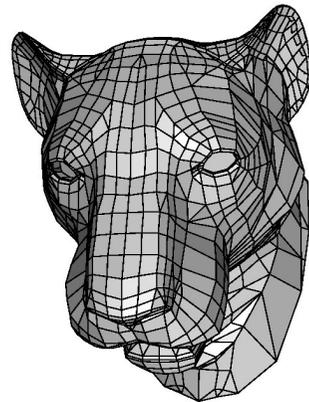
# Des cartes, dans différents contextes



géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique (CAO)

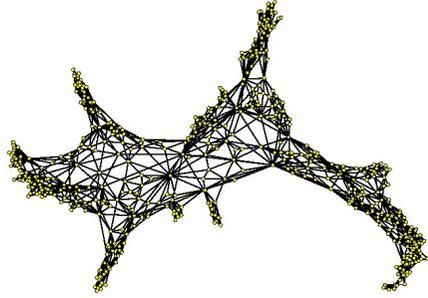
## Géométrie algorithmique

séparation de la combinatoire  
(incidences entre faces, sommets)  
et de la géométrie (coordonnées)  
⇒ structures de données

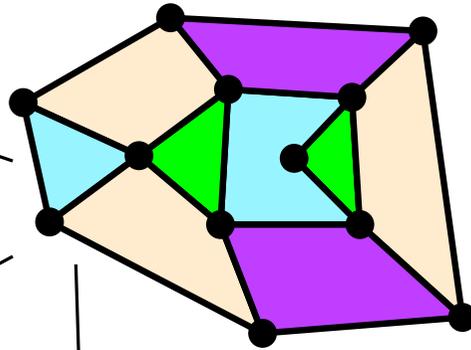
## Théorie des graphes

pour utiliser la planarité,  
travailler sur une carte plane !  
exemple: théorème des 4 couleurs

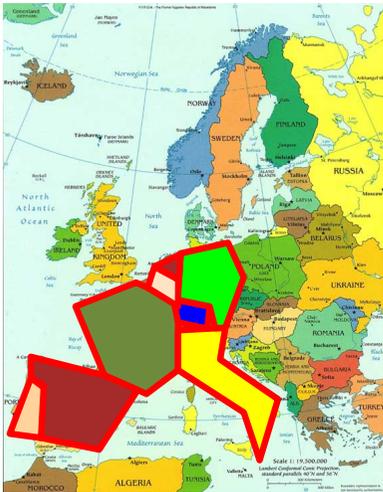
# Des cartes, dans différents contextes



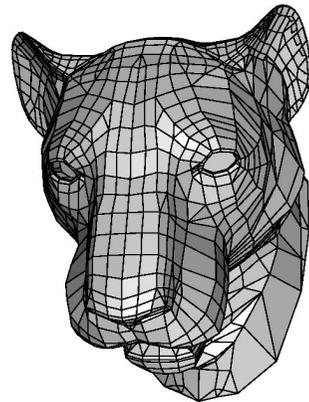
géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



Physique statistique  
un modèle classique de  
surface aléatoire discrétisée



carte géographique



maillage surfacique (CAO)

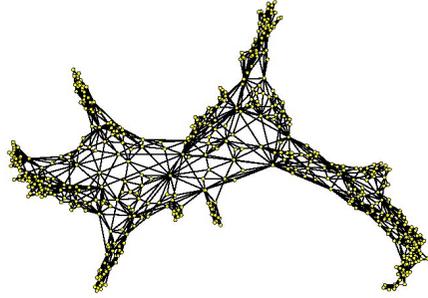
## Géométrie algorithmique

séparation de la combinatoire  
(incidences entre faces, sommets)  
et de la géométrie (coordonnées)  
⇒ structures de données

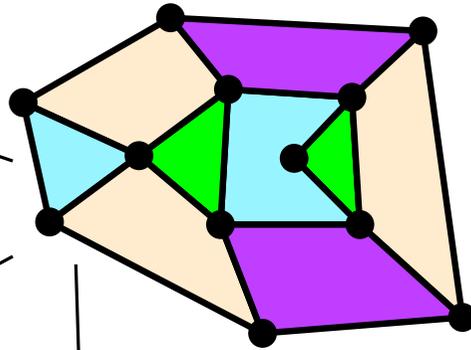
## Théorie des graphes

pour utiliser la planarité,  
travailler sur une carte plane !  
exemple: théorème des 4 couleurs

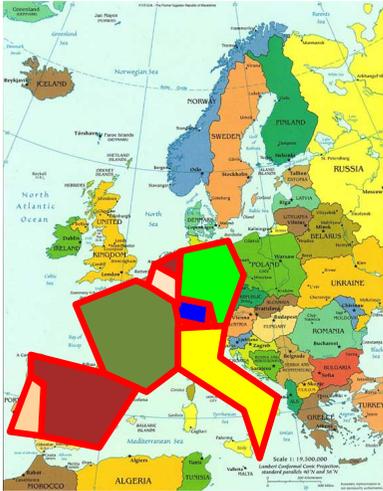
# Des cartes, dans différents contextes



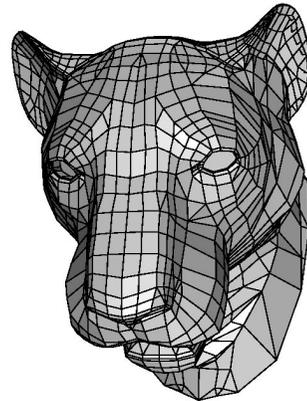
géométrie aléatoire discrète  
(gravité quantique pure)



Physique statistique  
un modèle classique de  
surface aléatoire discrétisée



carte géographique



maillage surfacique (CAO)

Géométrie algorithmique  
séparation de la combinatoire  
(incidences entre faces, sommets)  
et de la géométrie (coordonnées)  
⇒ structures de données

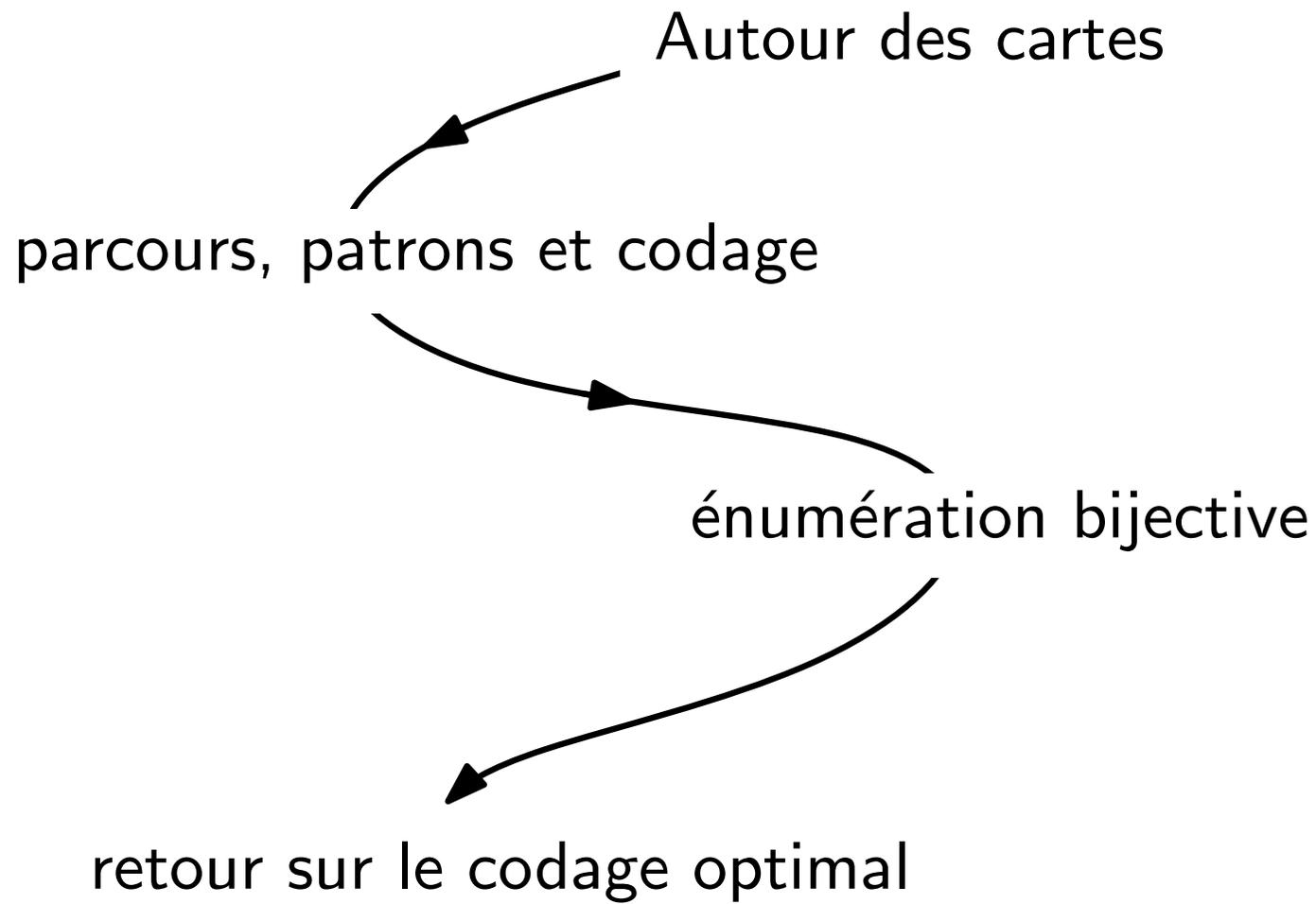
pour remonter plus loin dans le temps...

## Théorie des graphes

pour utiliser la planarité,  
travailler sur une carte plane !  
exemple: théorème des 4 couleurs

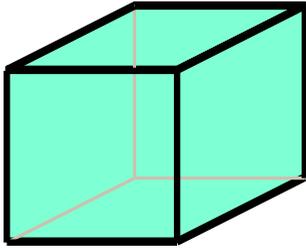
## Topologie des surfaces

Classification des polyèdres



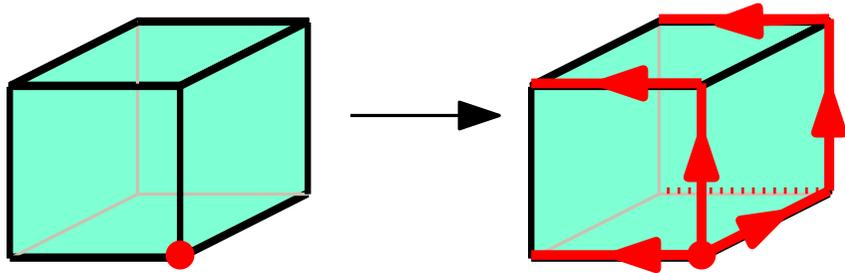
Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

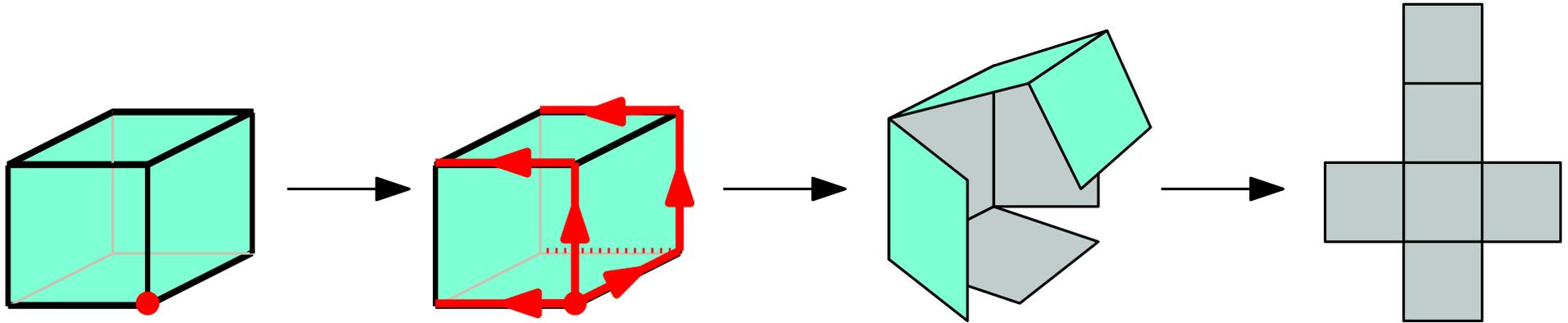
sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...

## Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

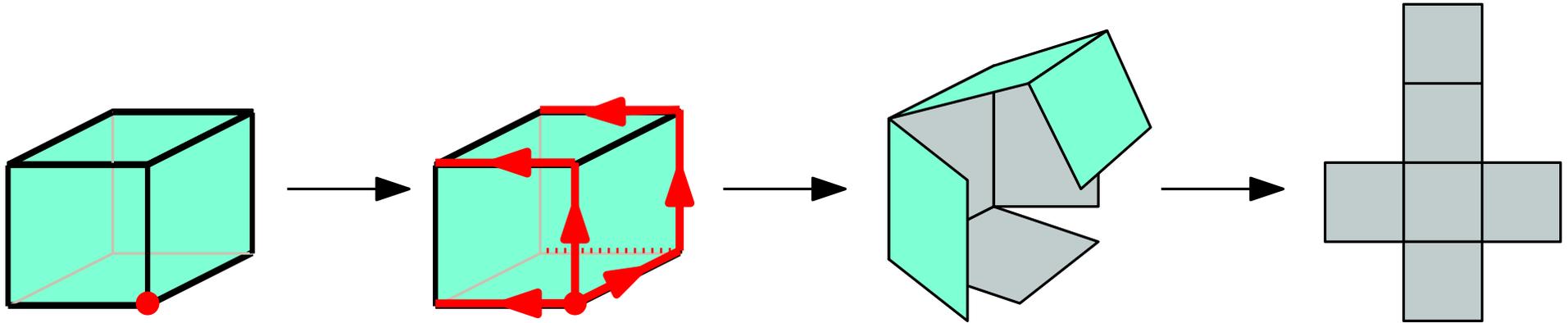
sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...  
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

## Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



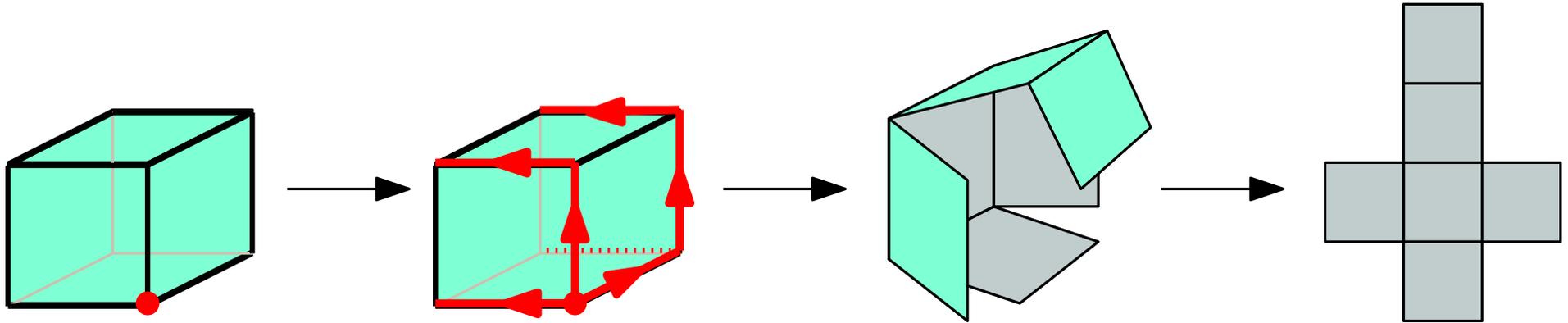
Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...  
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

$s$  sommets  $\Rightarrow s - 1$  arêtes découpées

## Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...  
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

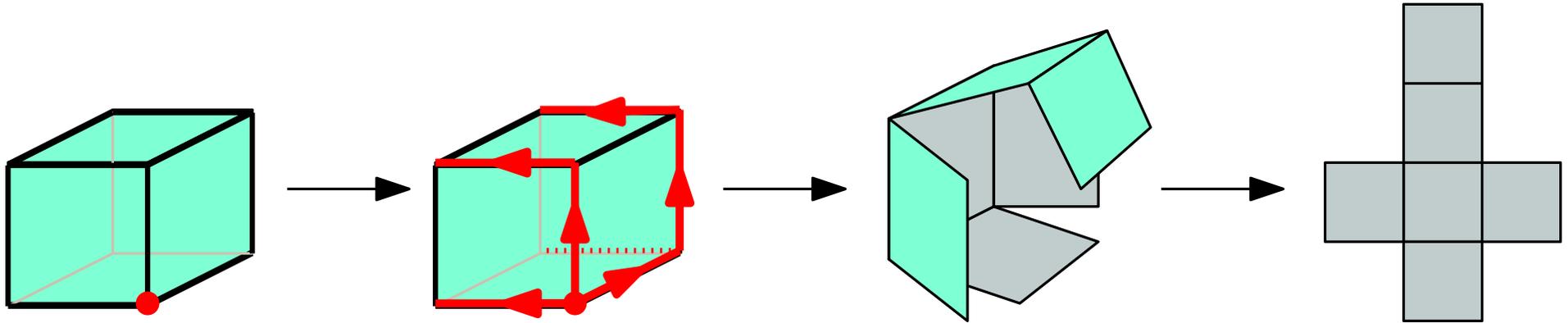
$s$  sommets  $\Rightarrow s - 1$  arêtes découpées

les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

$f$  faces  $\Rightarrow f - 1$  arêtes internes au patron

## Deux choses que vous savez peut-être déjà des cartes...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...  
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

$$s \text{ sommets} \Rightarrow s - 1 \text{ arêtes découpées}$$

les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

$$f \text{ faces} \Rightarrow f - 1 \text{ arêtes internes au patron}$$

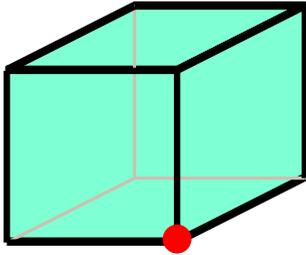
**Thm.** Pour toute carte planaire:  $s + f = a + 2$  (Euler, 1752)

# Algorithmes de parcours et patrons

Parcours d'une carte et découpage de surface

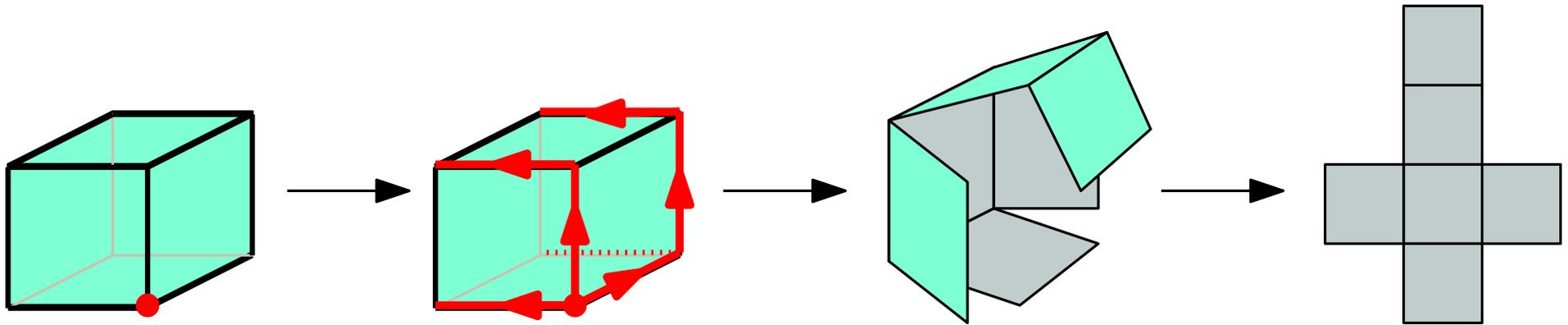
# Algorithmes de parcours et patrons

Parcours d'une carte et découpage de surface



# Algorithmes de parcours et patrons

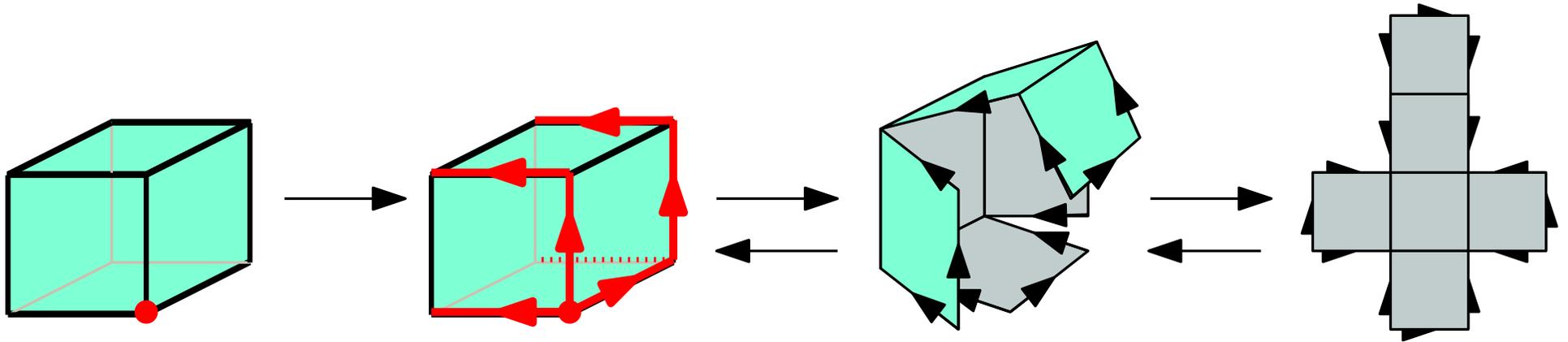
Parcours d'une carte et découpage de surface



Parcours + découpage  $\Rightarrow$  un "patron" de la carte

# Algorithmes de parcours et patrons

Parcours d'une carte et découpage de surface



Parcours + découpage  $\Rightarrow$  un "patron" de la carte

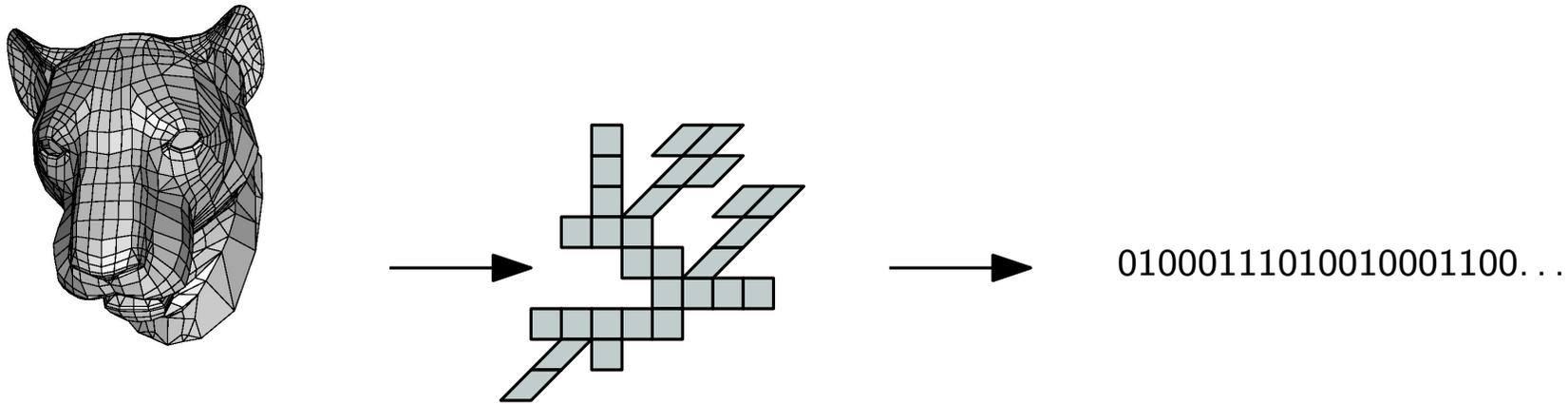
pour reconstruire la surface, il faut et il suffit du patron avec l'orientation des coupures: recoller les côtés tête-bêches et itérer

En d'autres termes, le patron encode la carte de départ.

# Algorithmes de parcours et patrons

Encoder des cartes...

≈ compresser des maillages.



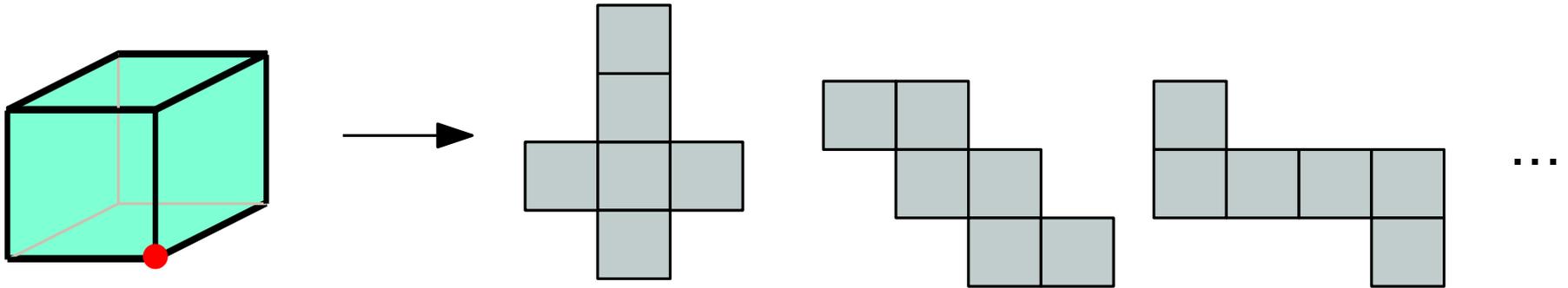
Approche popularisée par les travaux de Rossignac (90's) avec son codeur *Edgebreaker*, qui divise par 10 la taille des représentations utilisées

Idée: patron = arbre de polygones

et les arbres admettent des codes très compacts

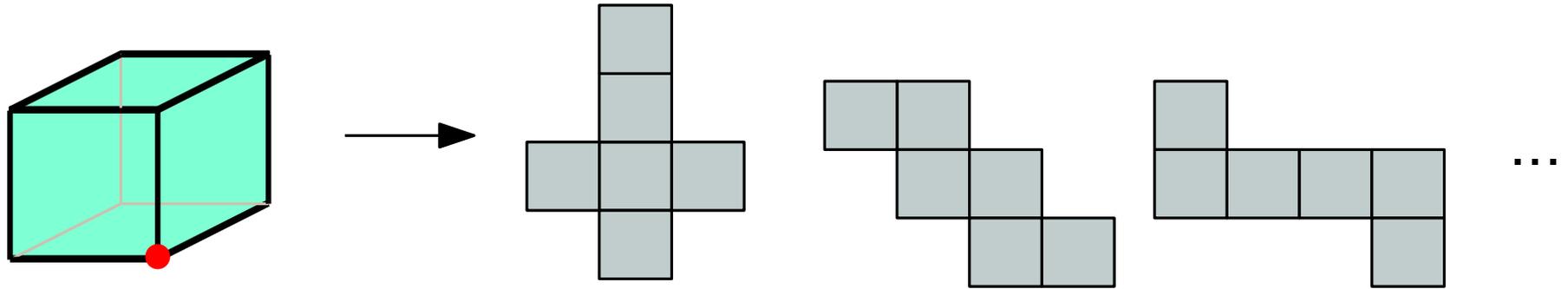
# Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...

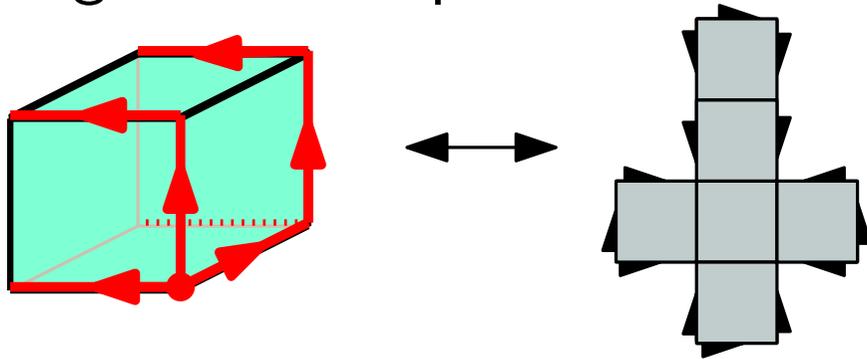


# Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...

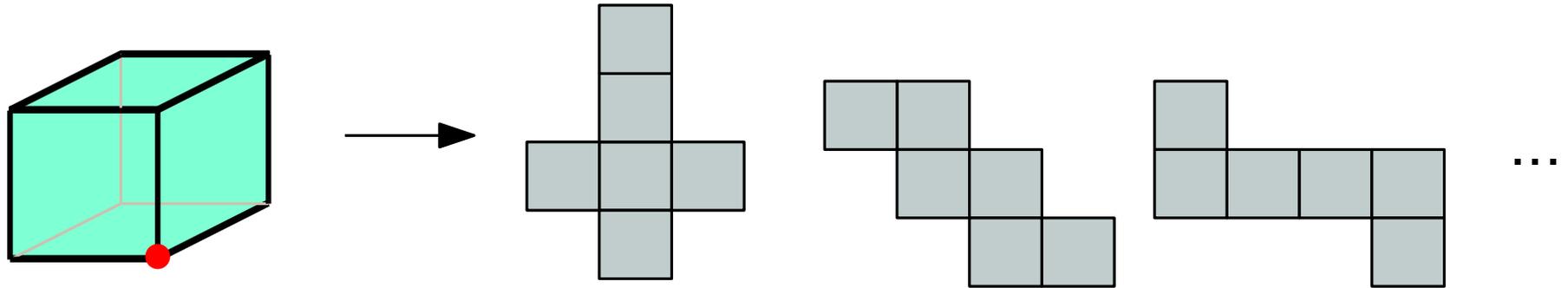


Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte

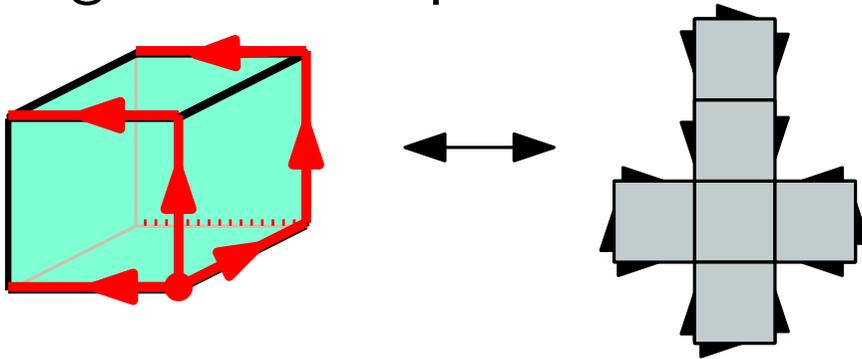


# Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...



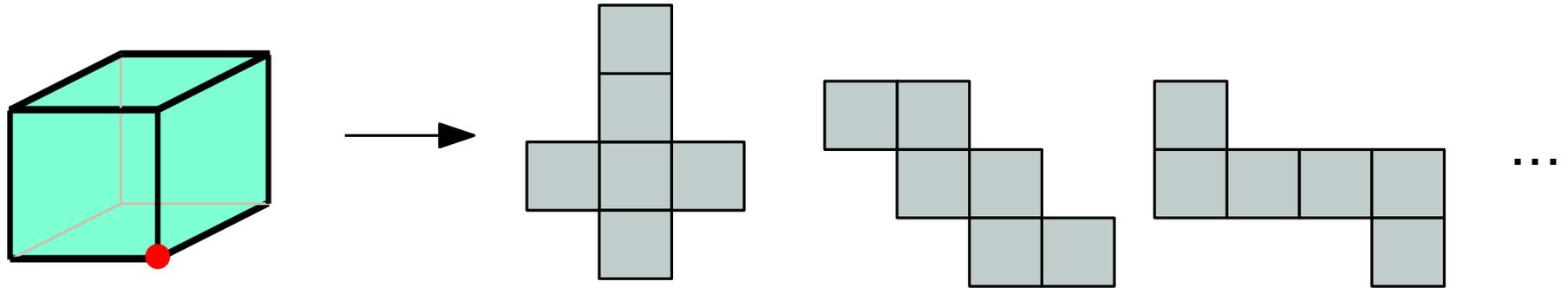
Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte



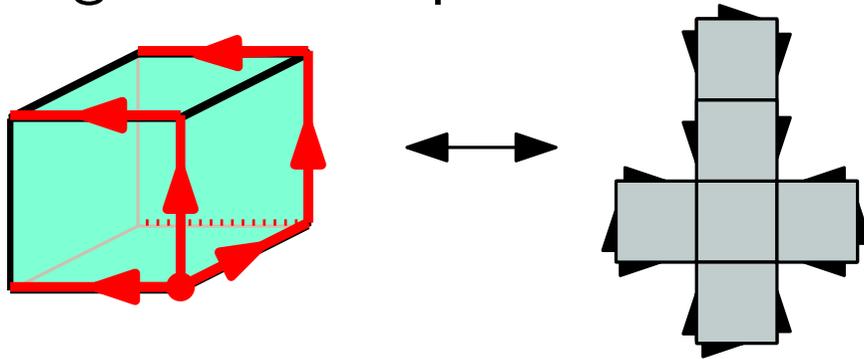
à chaque algorithme de parcours est associé un ensemble de **patrons valides**

# Algorithmes de parcours et patrons

À une carte sont associés plusieurs patrons...



Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte



à chaque algorithme de parcours est associé un ensemble de **patrons valides**

La recherche des parcours donnant les patrons les plus faciles à coder conduit à une course au code le plus compact au début des années 2000...

# Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure  $\mathcal{C}_n$  est  $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$ .

**Lemme.** Tout codage pour les objets de  $\mathcal{C}_n$  utilise au moins un mot de taille  $||\mathcal{C}_n||$ .

Un codage qui utilise asymptotiquement  $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$  bits est dit **asymptotiquement optimal**.

# Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure  $\mathcal{C}_n$  est  $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$ .

**Lemme.** Tout codage pour les objets de  $\mathcal{C}_n$  utilise au moins un mot de taille  $||\mathcal{C}_n||$ .

Un codage qui utilise asymptotiquement  $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$  bits est dit **asymptotiquement optimal**.

On a lié le problème du codage optimal à un problème d'énumération:

*a priori* l'énumération peut donner la borne inférieure...

# Algorithmes de parcours et patrons

L'**entropie** d'une classe de structure  $\mathcal{C}_n$  est  $||\mathcal{C}_n|| = \log_2(1 + |\mathcal{C}_n|)$ .

**Lemme.** Tout codage pour les objets de  $\mathcal{C}_n$  utilise au moins un mot de taille  $||\mathcal{C}_n||$ .

Un codage qui utilise asymptotiquement  $||\mathcal{C}_n|| \cdot (1 + o(1))$  bits est dit **asymptotiquement optimal**.

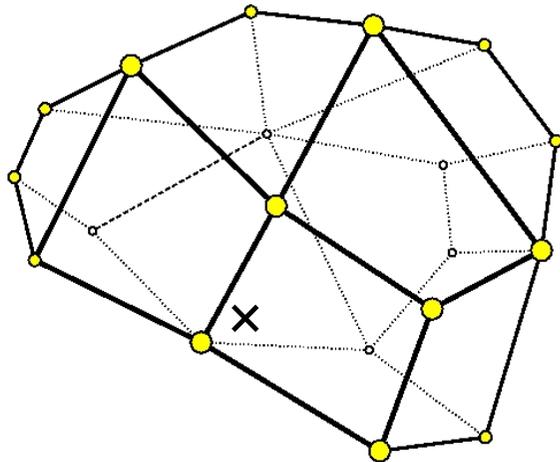
On a lié le problème du codage optimal à un problème d'énumération:

*a priori* l'énumération peut donner la borne inférieure...

# La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$



↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)  
et  $n + 2$  sommets (Euler)  
et un coin marqué

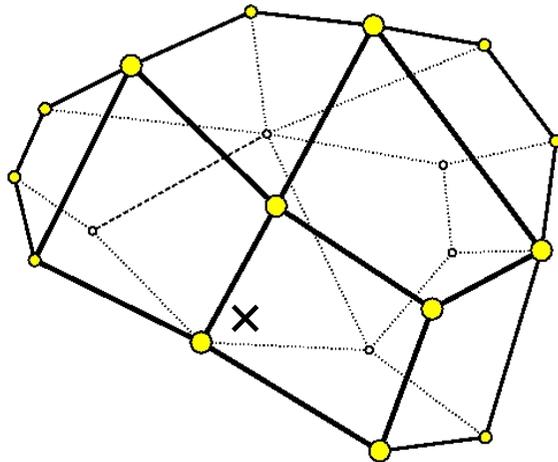
# La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)  
et  $n + 2$  sommets (Euler)  
et un coin marqué



**Énumération bijective:** comprendre cette formule de manière constructive.

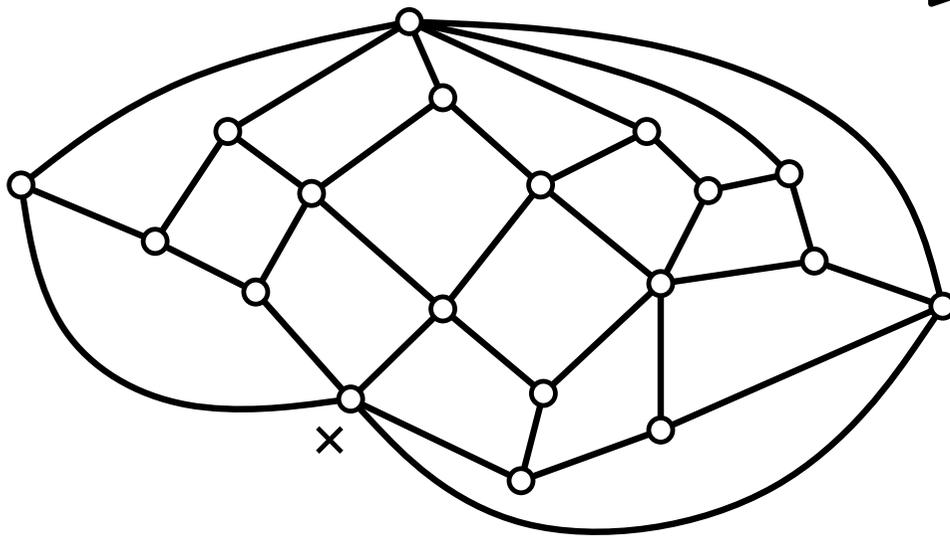
# La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)  
et  $n + 2$  sommets (Euler)  
et un coin marqué



**Énumération bijective:** comprendre cette formule de manière constructive.

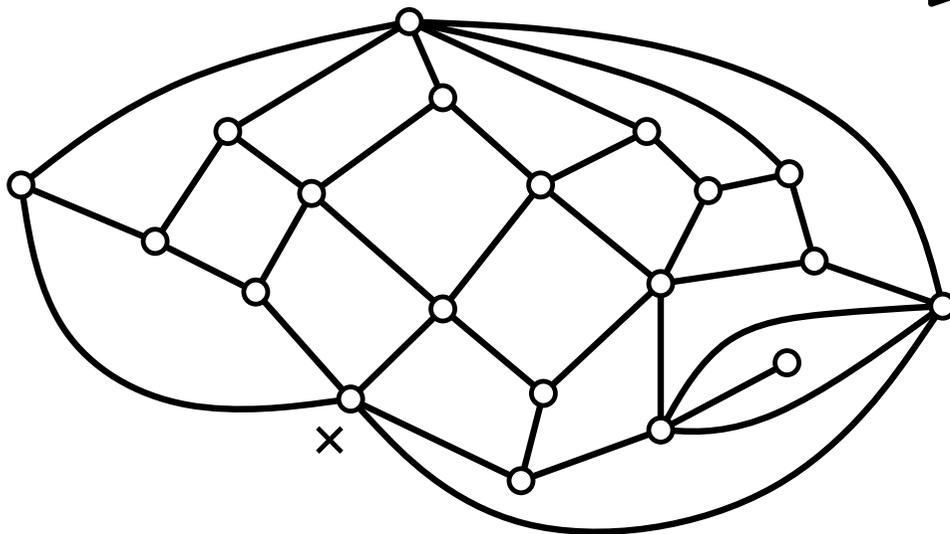
# La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)  
et  $n + 2$  sommets (Euler)  
et un coin marqué



**Énumération bijective:** comprendre cette formule de manière constructive.

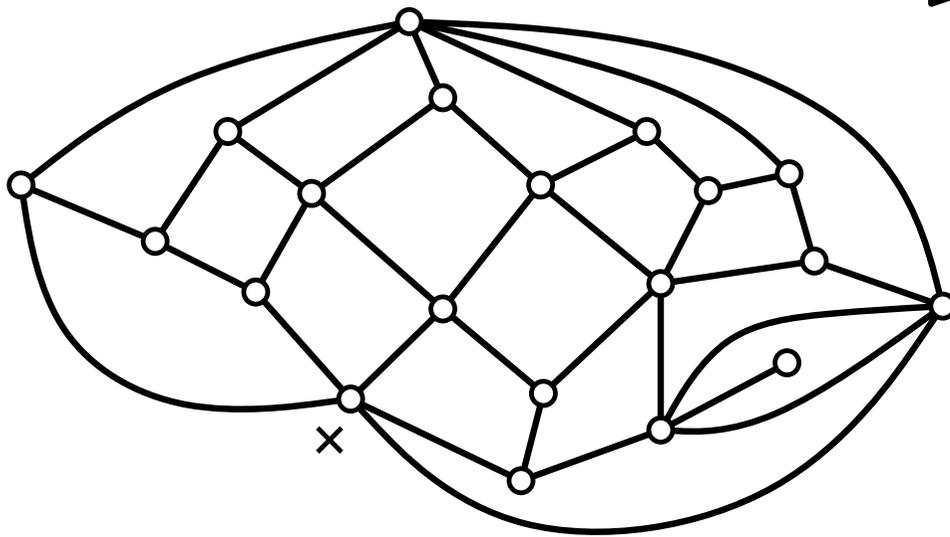
# La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)  
et  $n + 2$  sommets (Euler)  
et un coin marqué



**Énumération bijective:** comprendre cette formule de manière constructive.

$$\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} = \frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

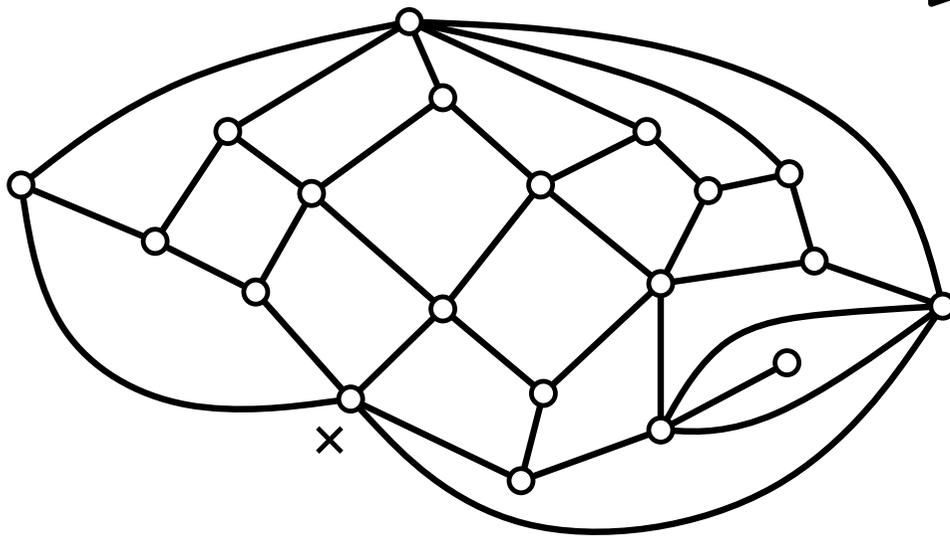
# La formule de Tutte pour compter les cartes

W. T. Tutte (1964) obtient par décomposition/calcul que

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$

↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)  
et  $n + 2$  sommets (Euler)  
et un coin marqué

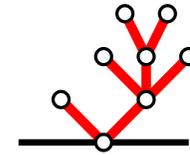


**Énumération bijective:** comprendre cette formule de manière constructive.

$$\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!} = \frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## Le nombre d'arbres plans

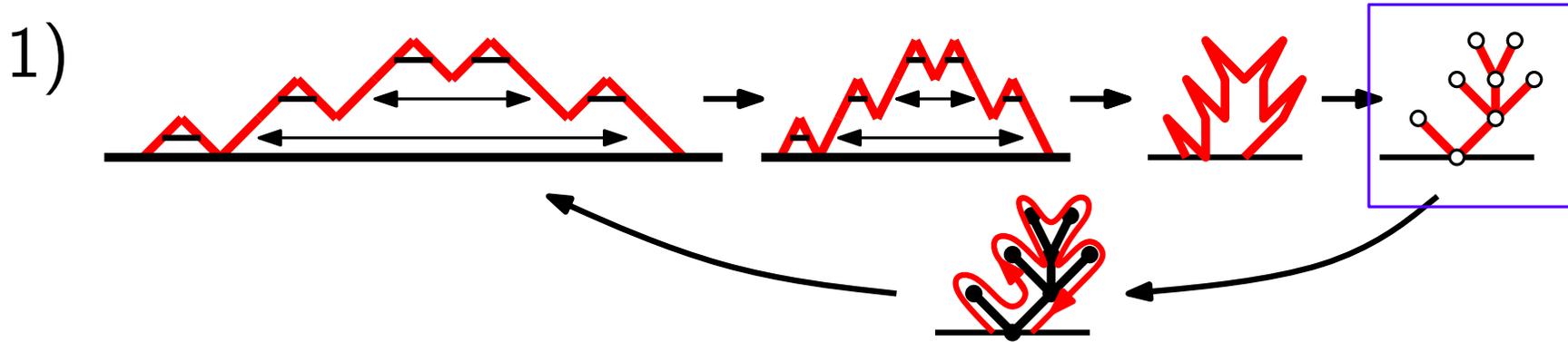
Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$



# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)

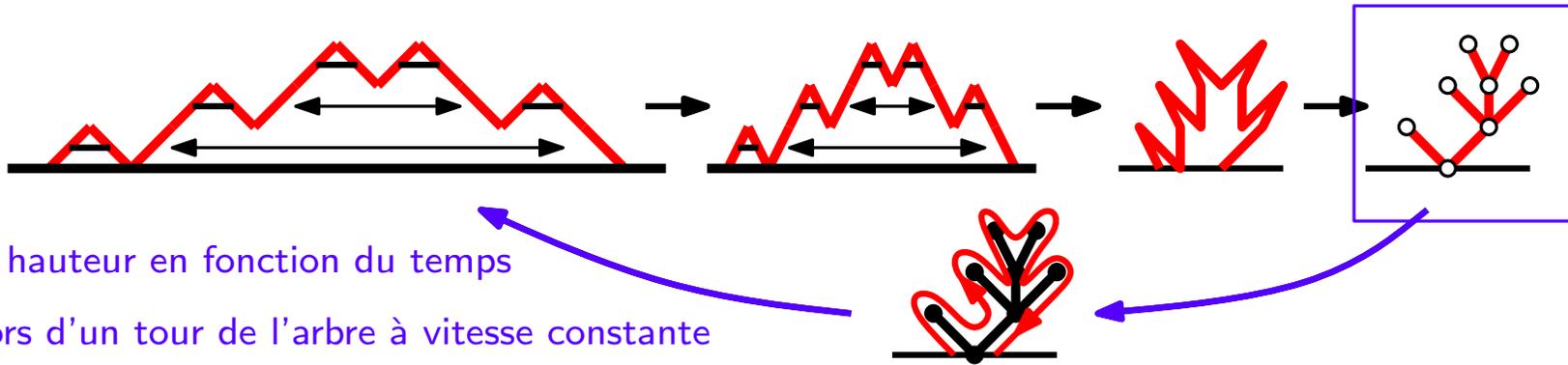


# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)

1)



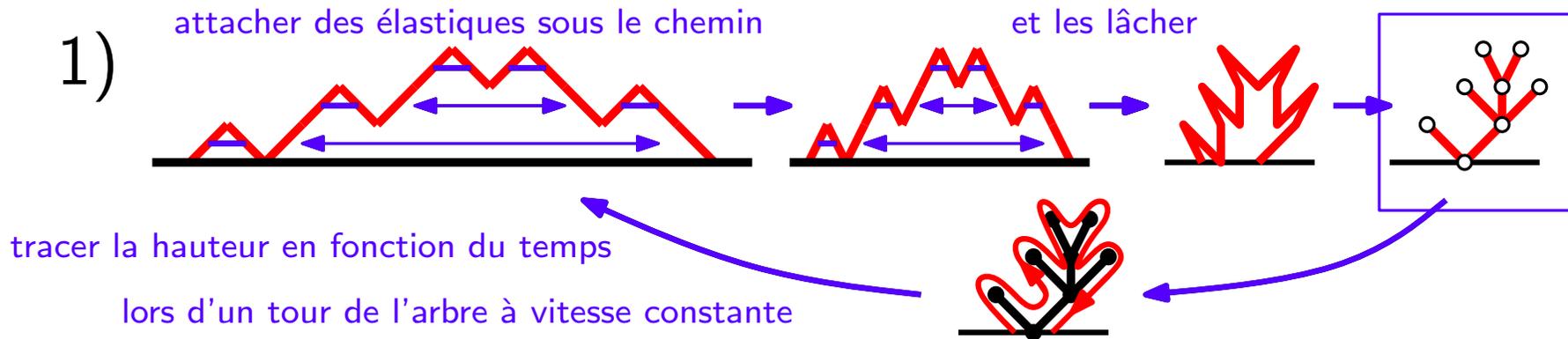
tracer la hauteur en fonction du temps

lors d'un tour de l'arbre à vitesse constante

# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

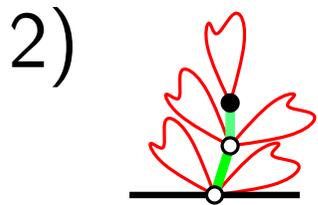
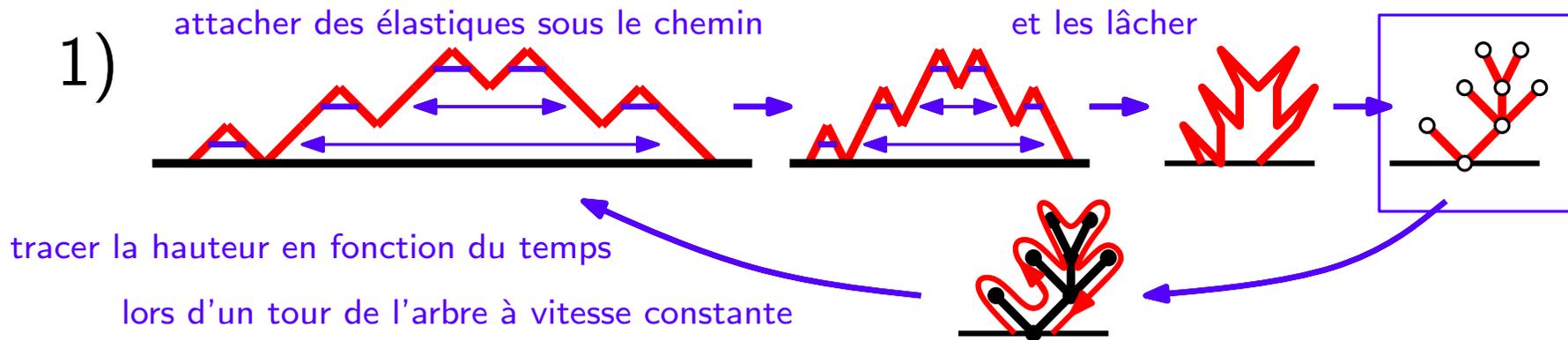
Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)



# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)

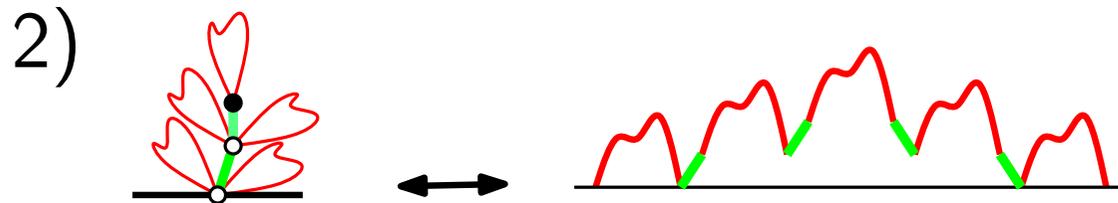
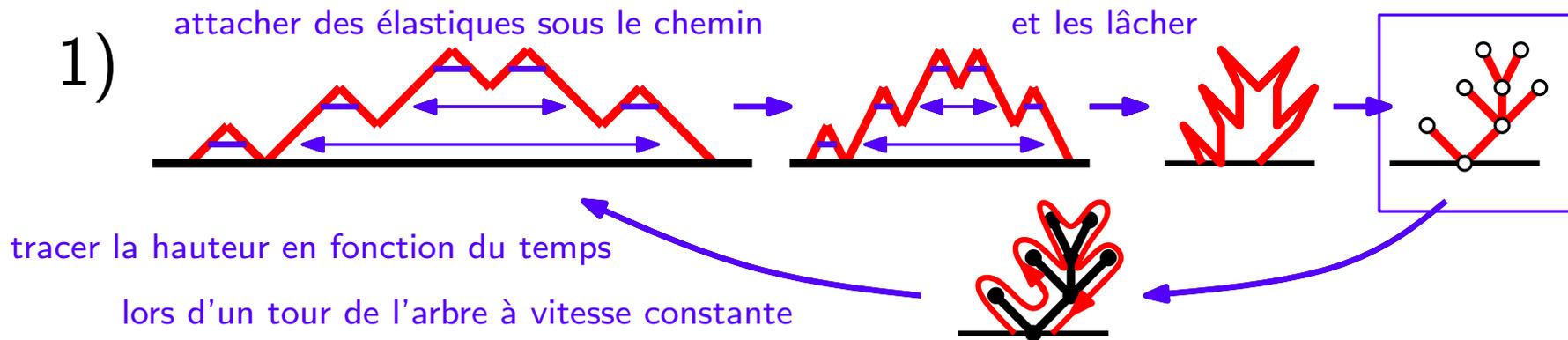


$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{arbre plan avec} \\ \text{sommet marqué} \end{array} \right\} = (n + 1) \cdot C_n$$

# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)

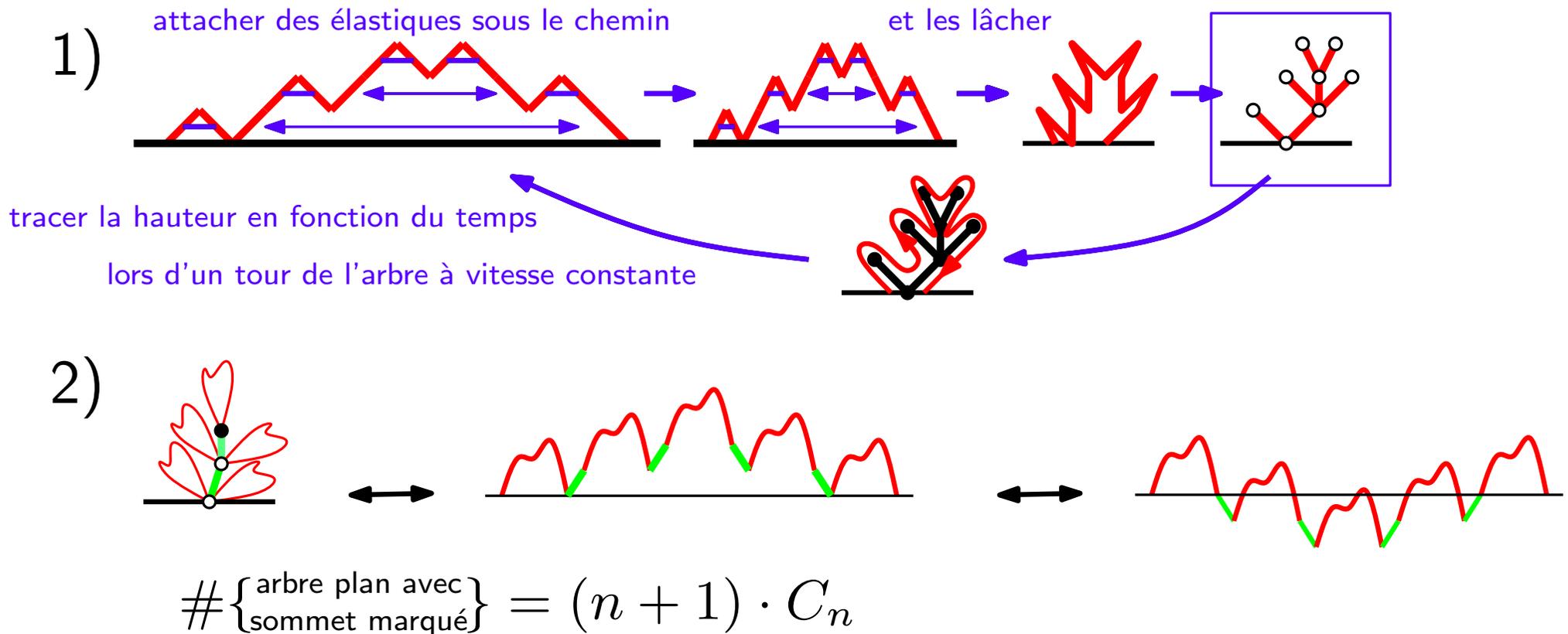


$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{arbre plan avec} \\ \text{sommet marqué} \end{array} \right\} = (n + 1) \cdot C_n$$

# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

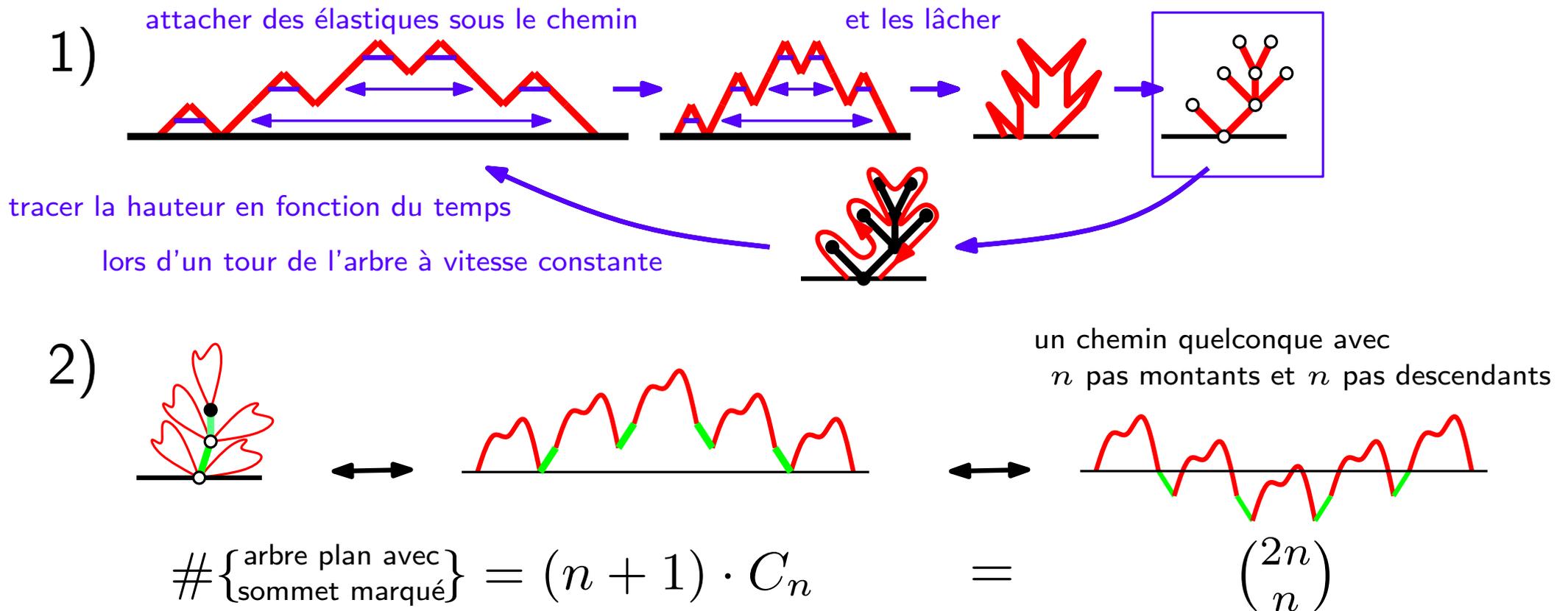
Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)



# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

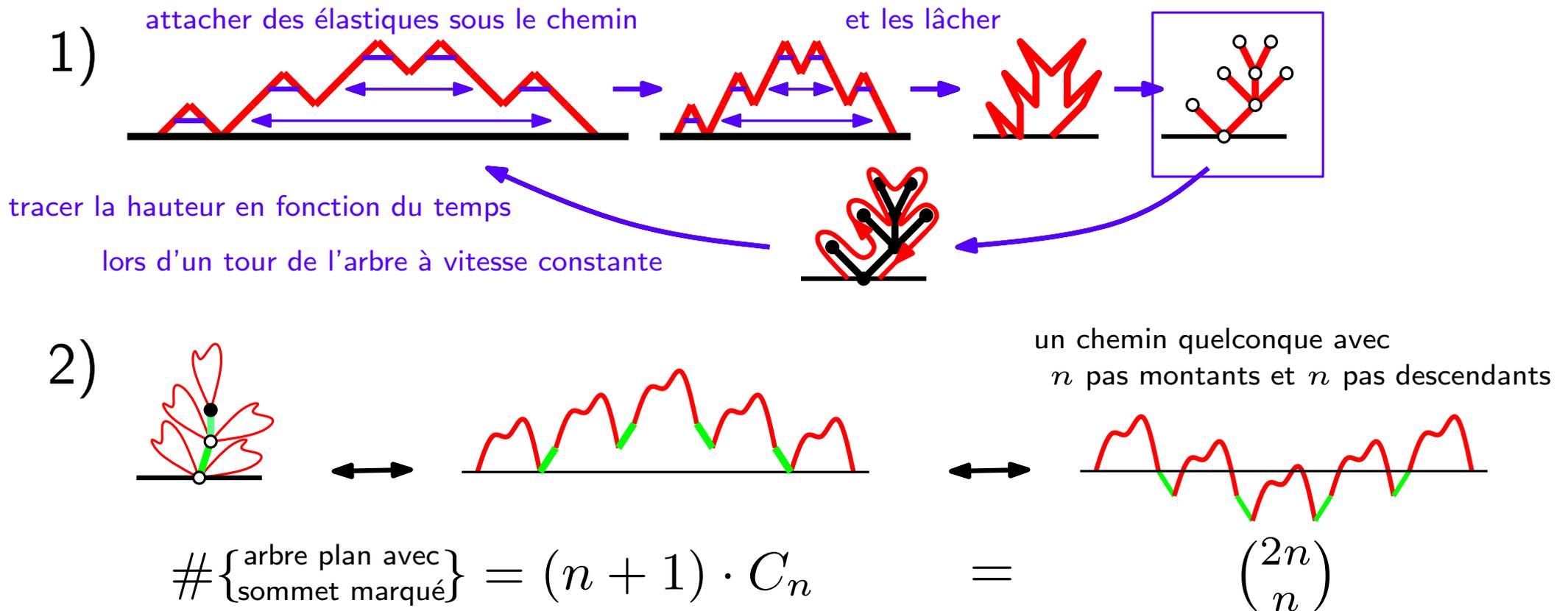
Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)



# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)



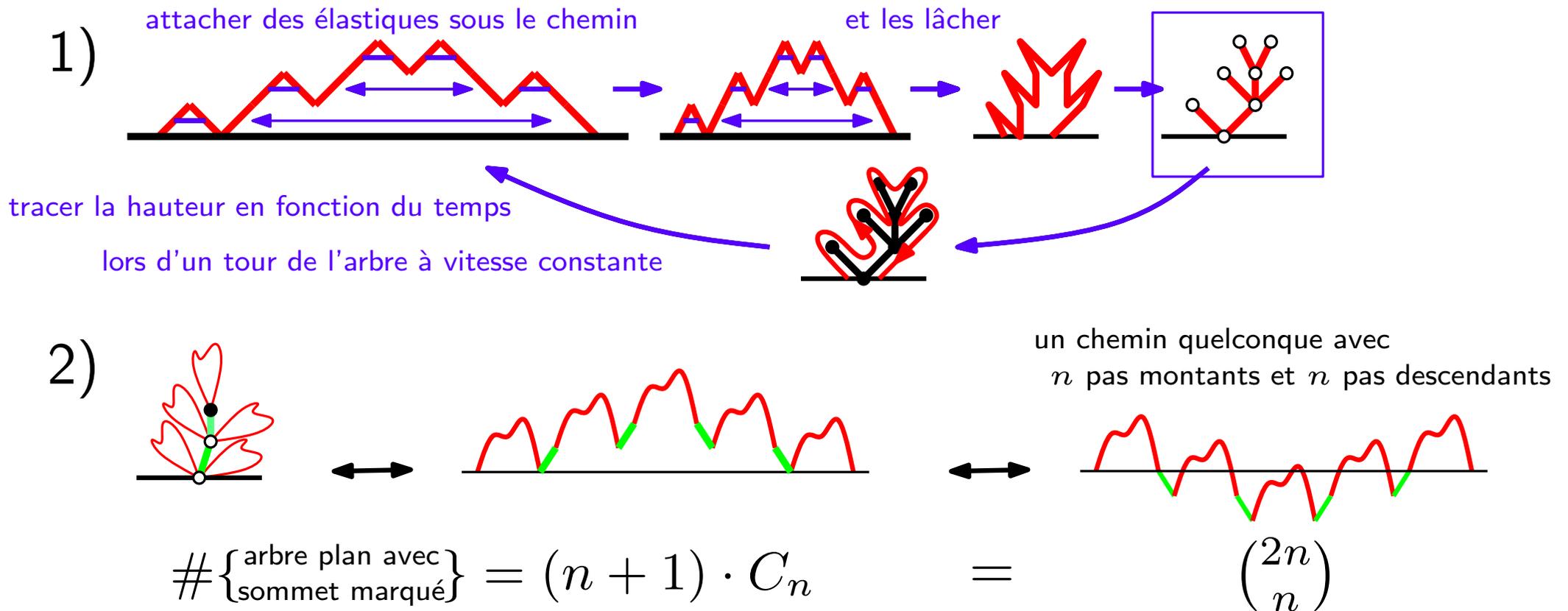
Remarque: Le mot de parenthèse est un code optimal de l'arbre  
Code de  $2n$  bits alors que  $\log_2 \|C_n\| = 2n + o(n)$

# Le nombre d'arbres plans

Le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Preuve par le dessin (©Xavier Viennot)

$$\approx 4^n n^{-3/2}$$

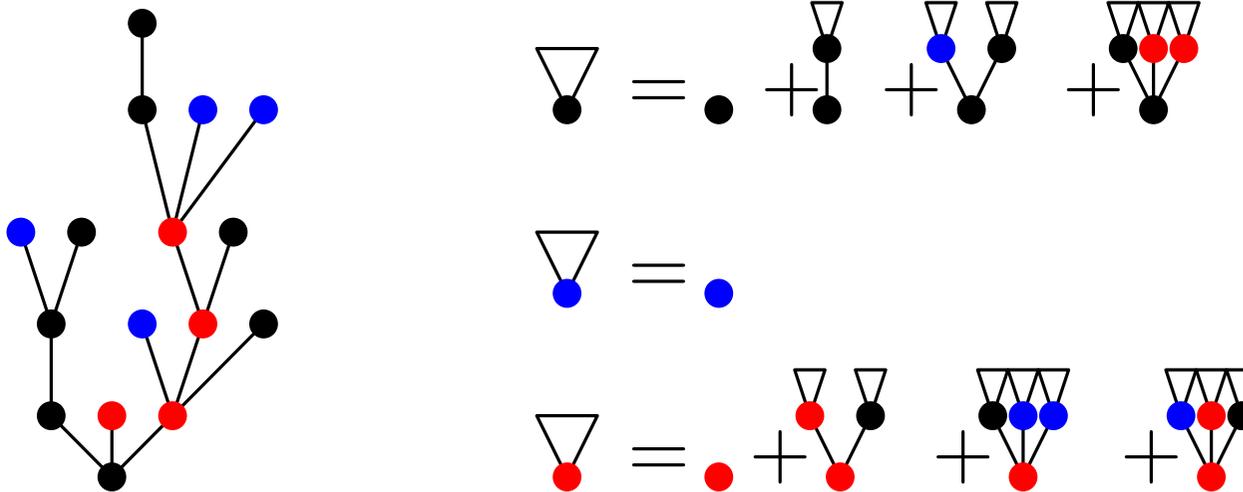


Remarque: Le mot de parenthèse est un code optimal de l'arbre  
Code de  $2n$  bits alors que  $\log_2 \|C_n\| = 2n + o(n)$

# Arbres simples et langages algébriques (context-free)

Le cas des arbres plans doit être vu comme un *toy model* pour la classe d'universalité des familles d'arbres simples.

Les **familles simples d'arbres** sont génériquement associées aux langages algébriques engendrés par des grammaires **context-free** non ambiguës.



La combinatoire analytique, telle que développée notamment par P. Flajolet, permet de comprendre cette notion d'universalité: pas toujours des formules simples, mais une forme asymptotique unifiée  $T_n \approx \rho^n n^{-3/2}$

## Retour sur la formule de Tutte

La formule de Tutte (1964):

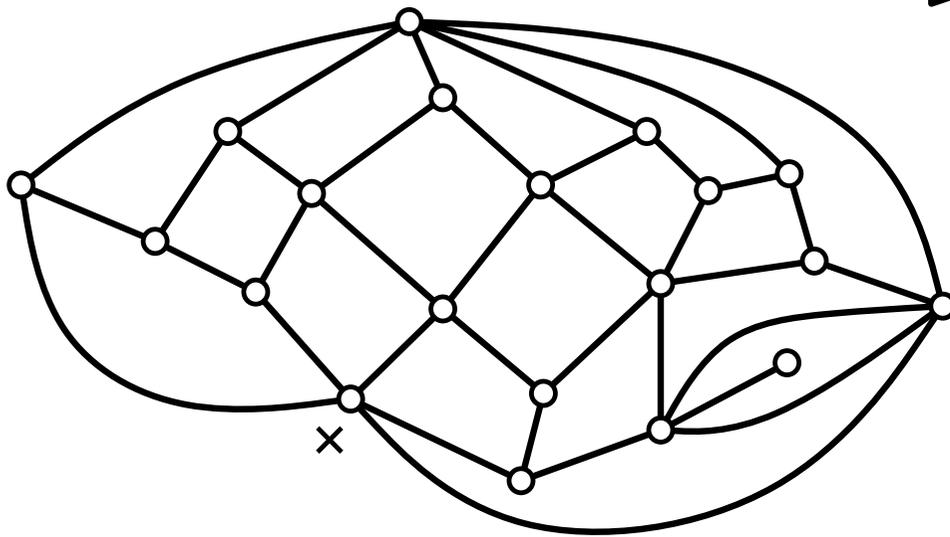
le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)

et  $n + 2$  sommets (Euler)

et un coin marqué



## Retour sur la formule de Tutte

La formule de Tutte (1964):

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$

↳ recollement de  $n$  carrés

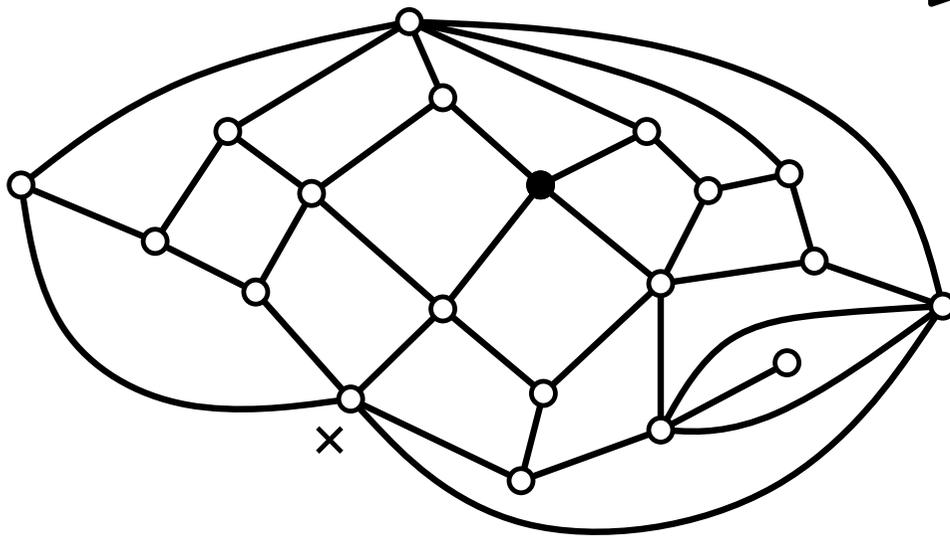
avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)

et  $n + 2$  sommets (Euler)

et un coin marqué

Avec un sommet marqué:

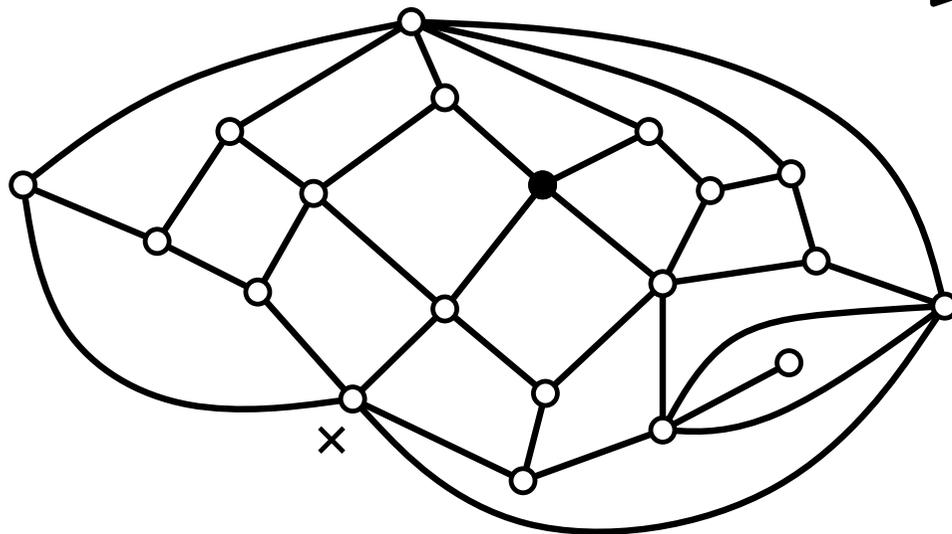
$$(n + 2) \cdot Q_n = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



## Retour sur la formule de Tutte

La formule de Tutte (1964):

le nombre  $Q_n$  de quadrangulations à  $n$  faces est  $\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$



↳ recollement de  $n$  carrés

avec  $2n$  arêtes ( $4n$  côtés)

et  $n + 2$  sommets (Euler)

et un coin marqué

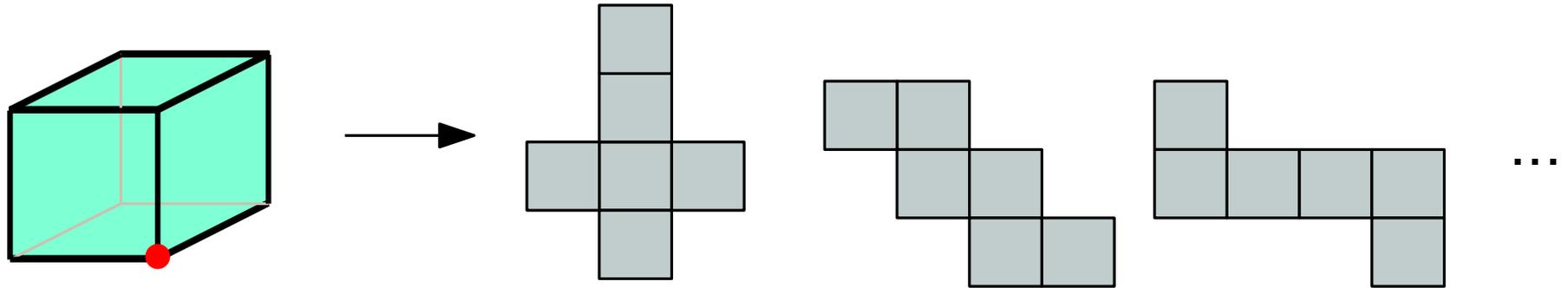
Avec un sommet marqué:

$$(n + 2) \cdot Q_n = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

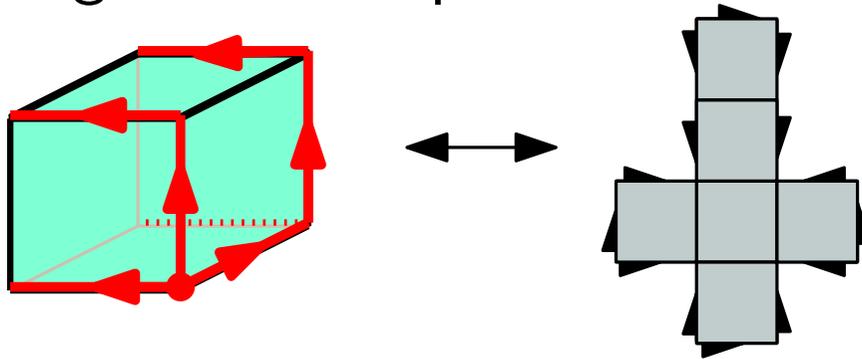
Alors que le nombre  $C_n$  d'arbres plans à  $n$  arêtes est  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

# Les algorithmes de parcours

À une carte sont associés plusieurs patrons...



Mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte

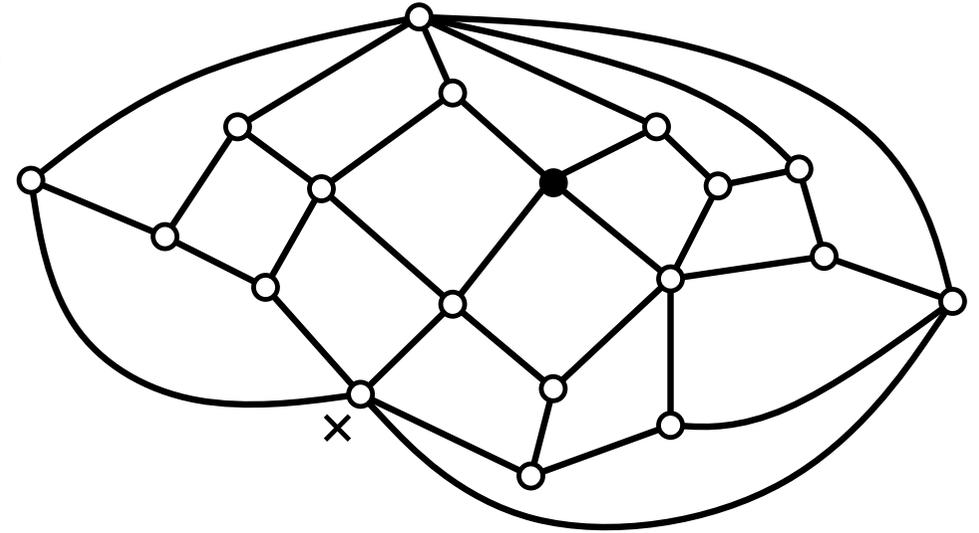


à chaque algorithme de parcours est associé un ensemble de **patrons valides**

La formule de Tutte suggère de chercher un algorithme qui admette un ensemble de patrons valides clairement comptés par  $2 \cdot 3^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

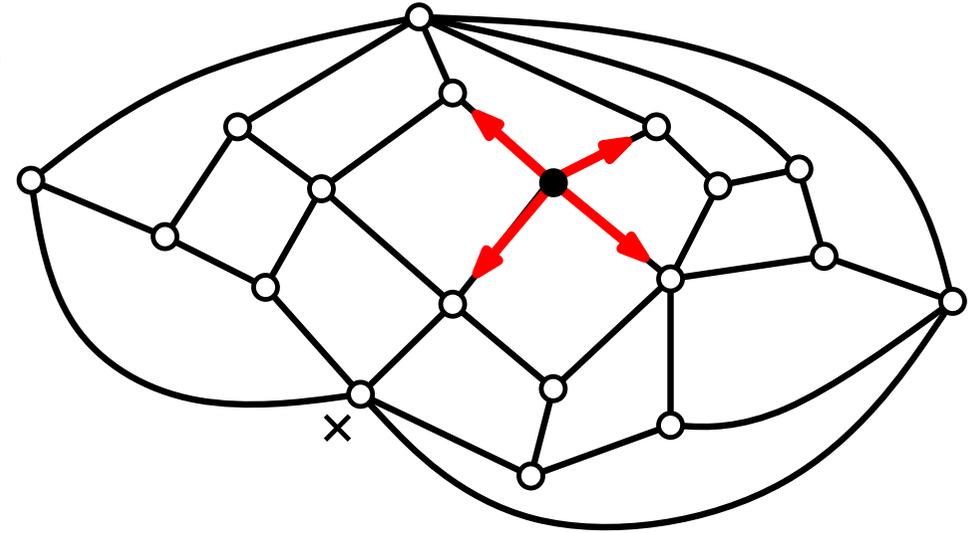
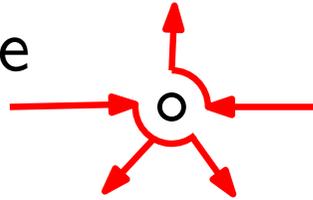
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

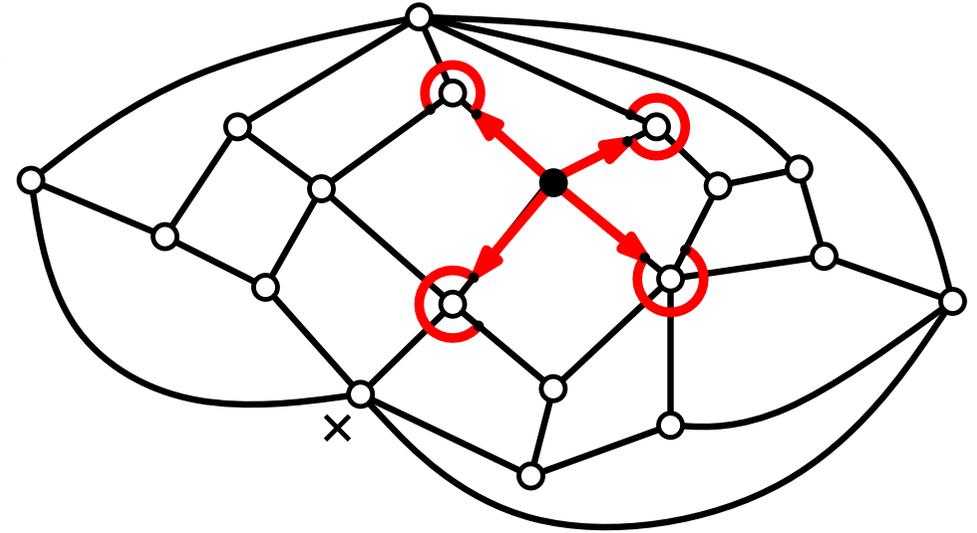
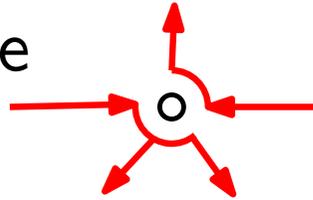
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

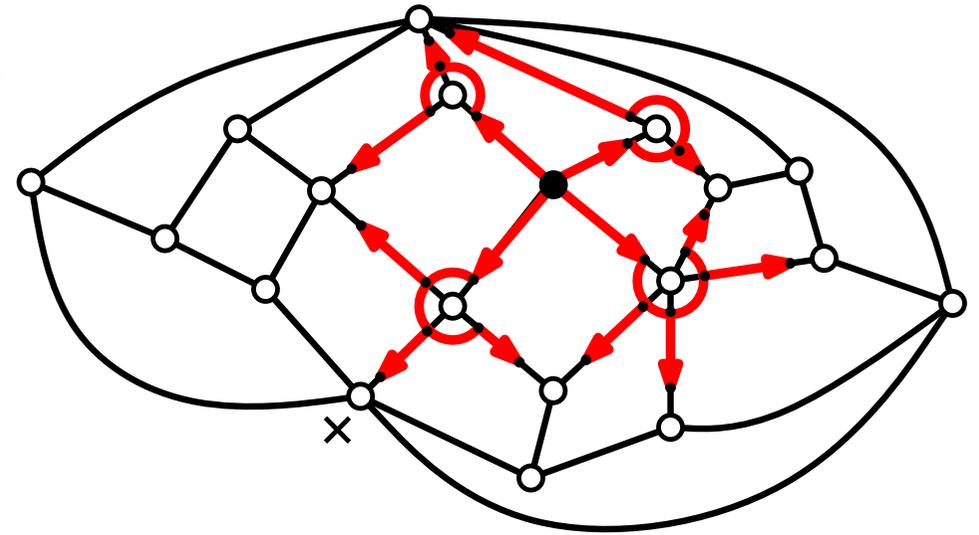
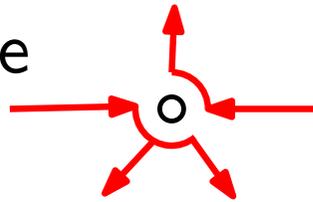
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

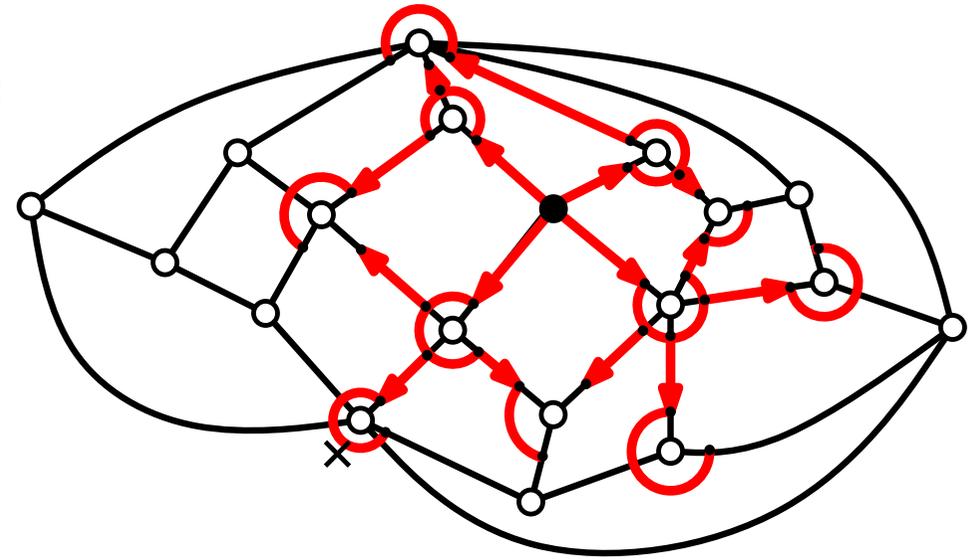
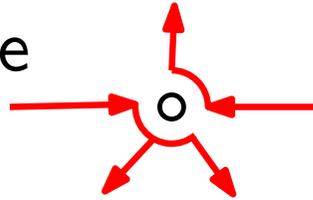
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

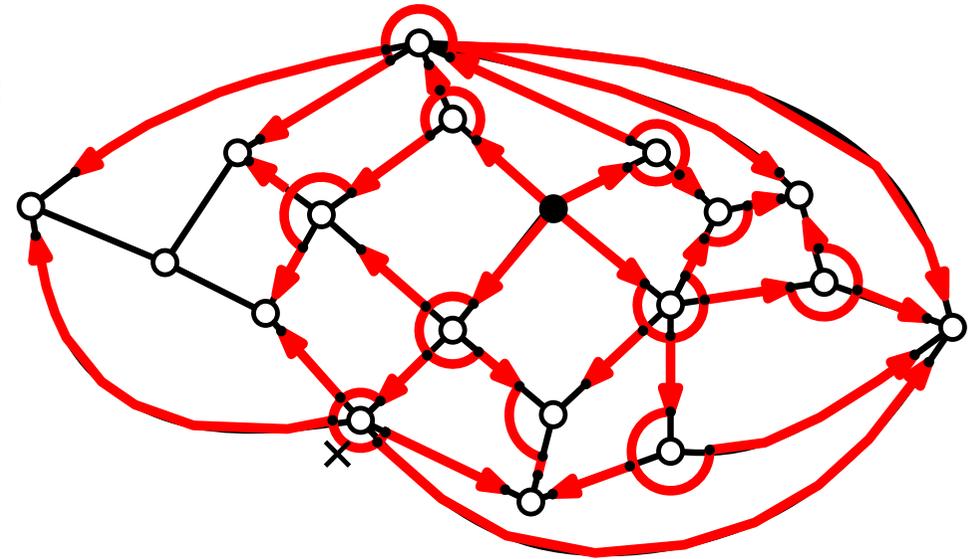
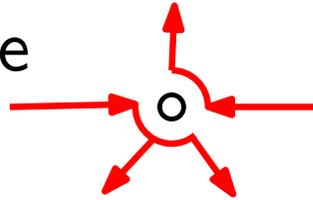
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

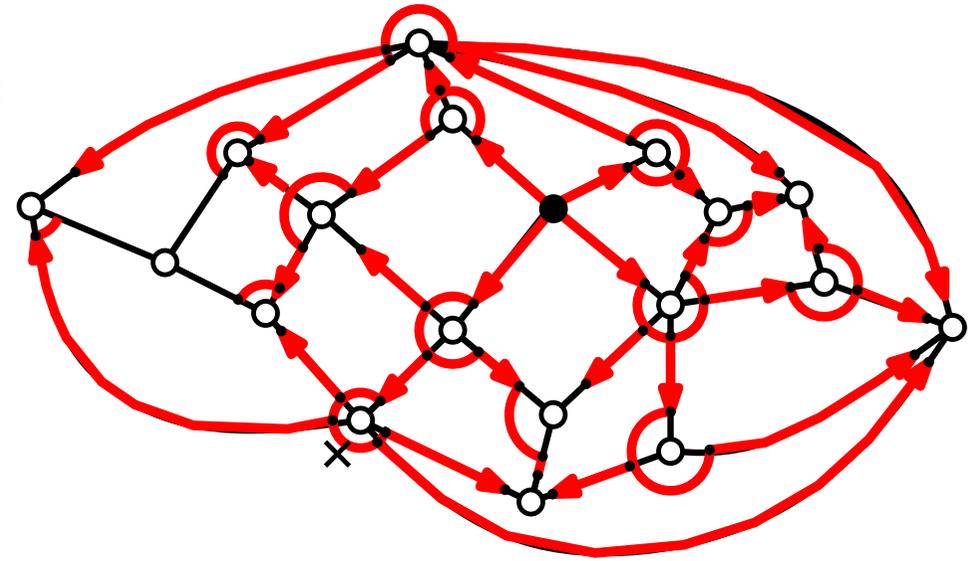
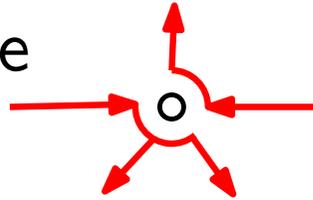
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

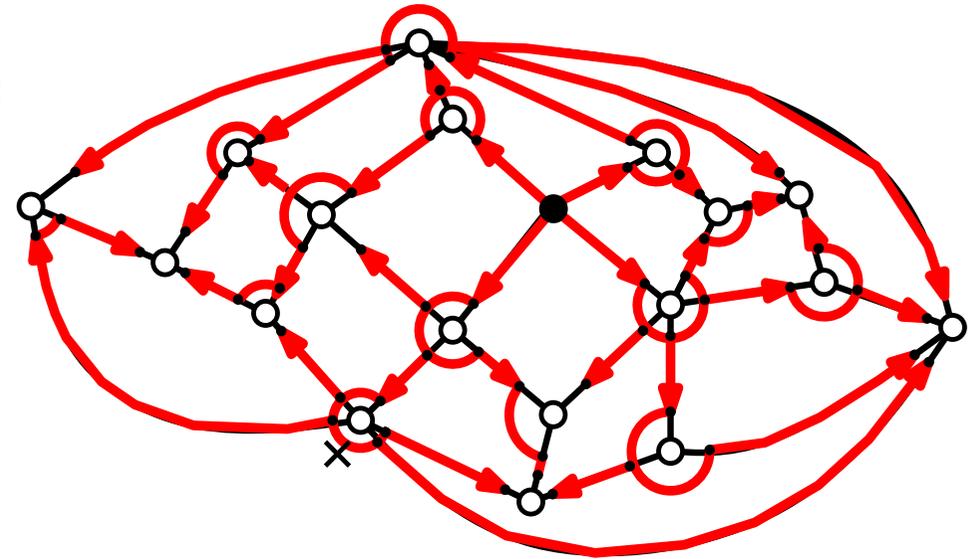
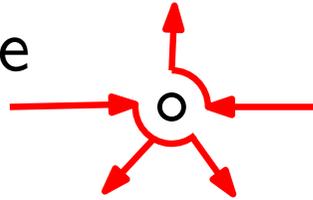
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

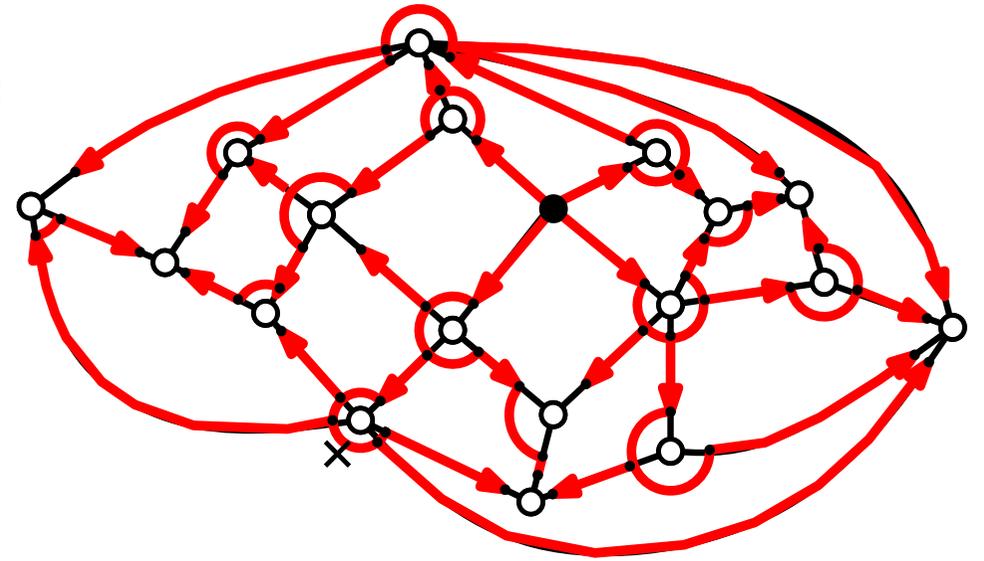
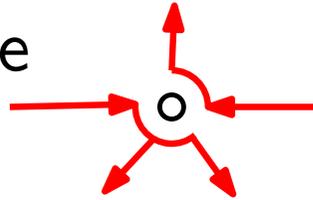
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

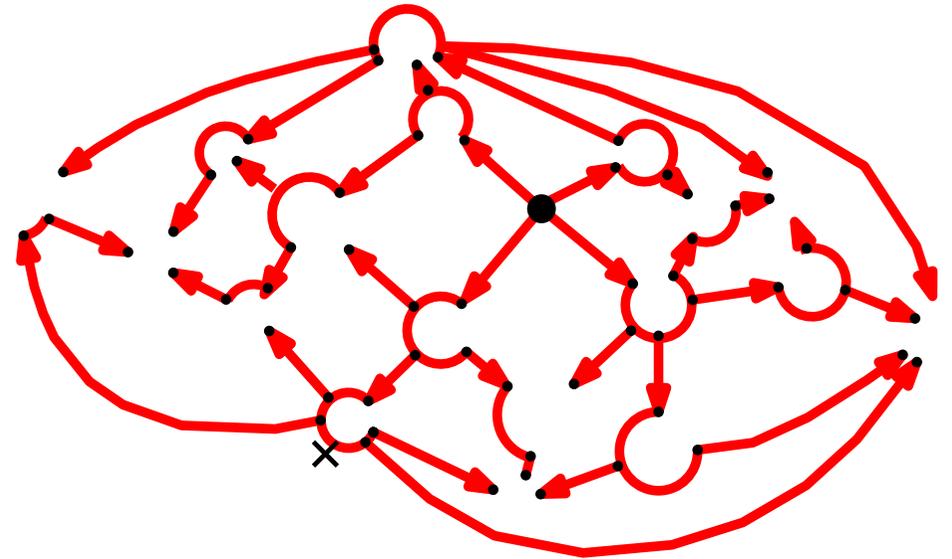
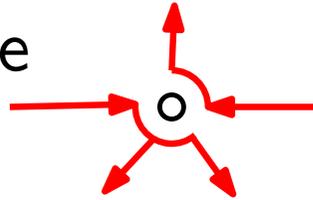
Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

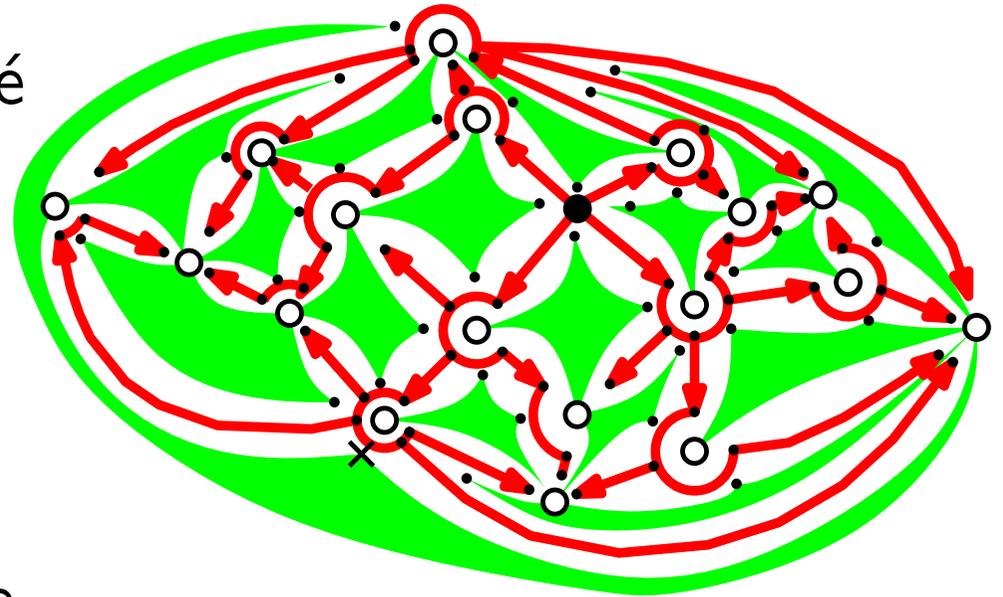
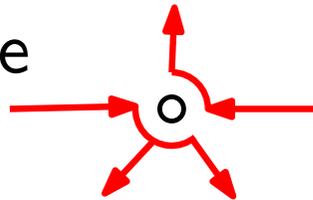


Les chemins rouges forment un arbre.

# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

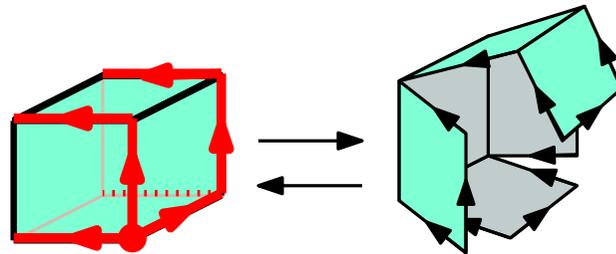
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

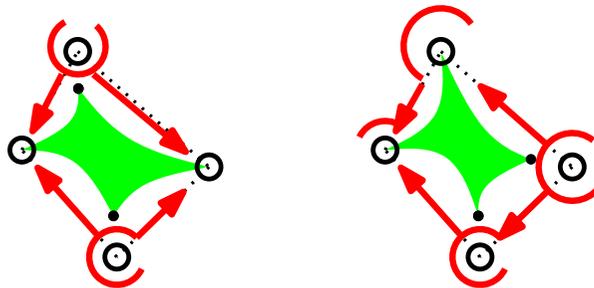


Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



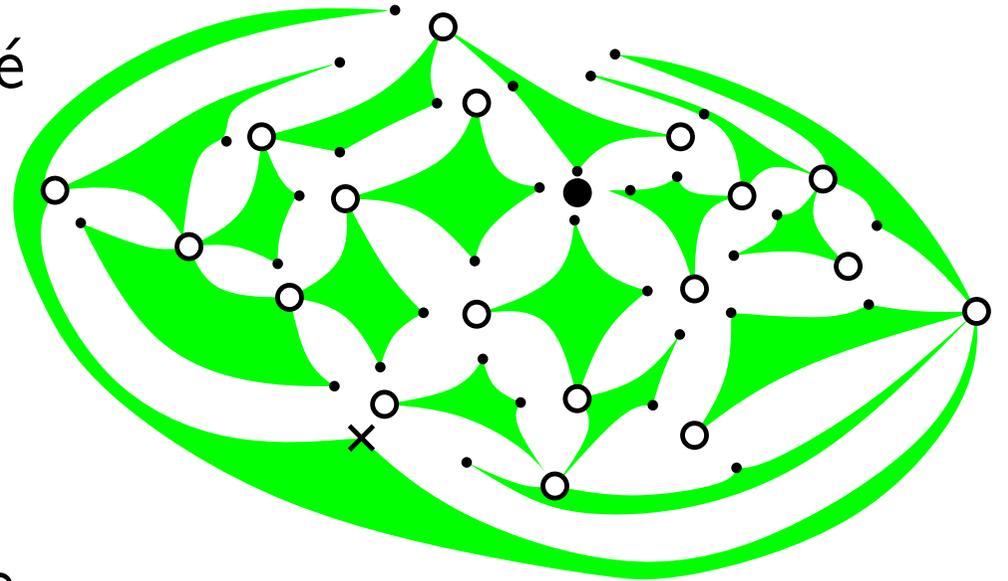
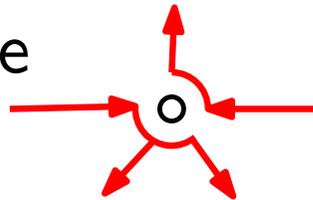
avec 2 types de carrés:



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

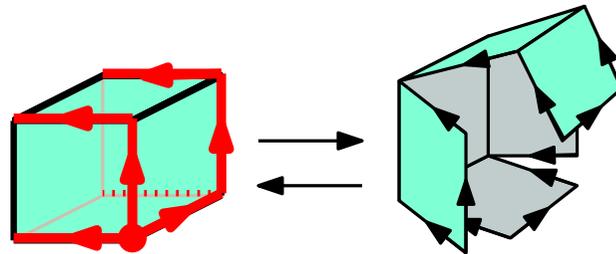
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite

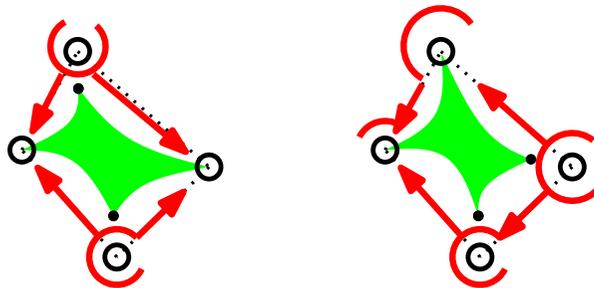


Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



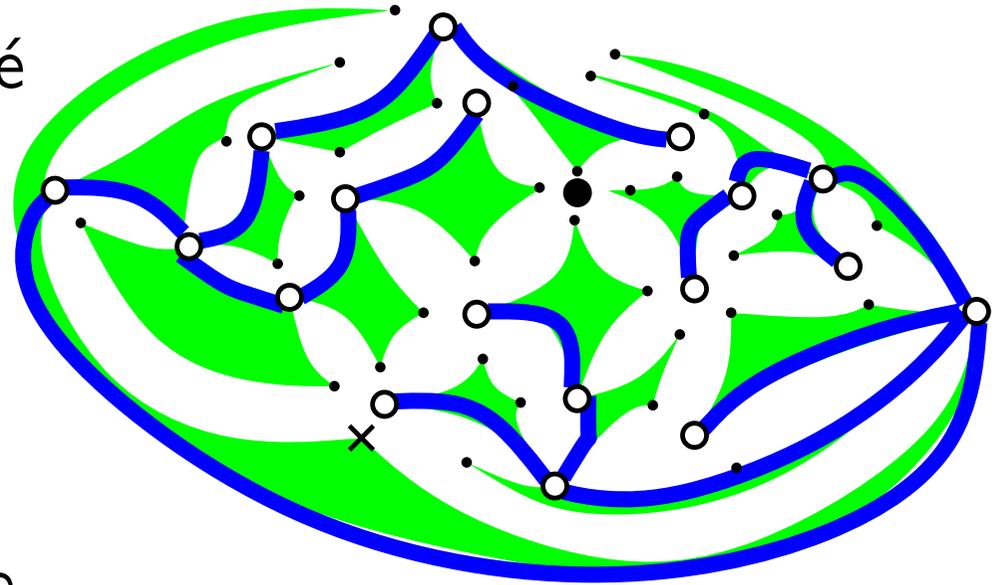
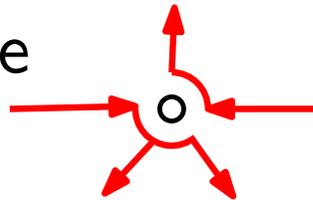
avec 2 types de carrés:



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

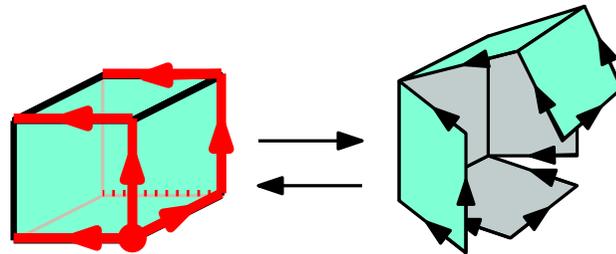
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



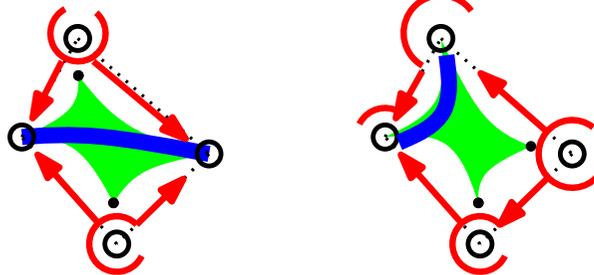
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



avec 2 types de carrés:

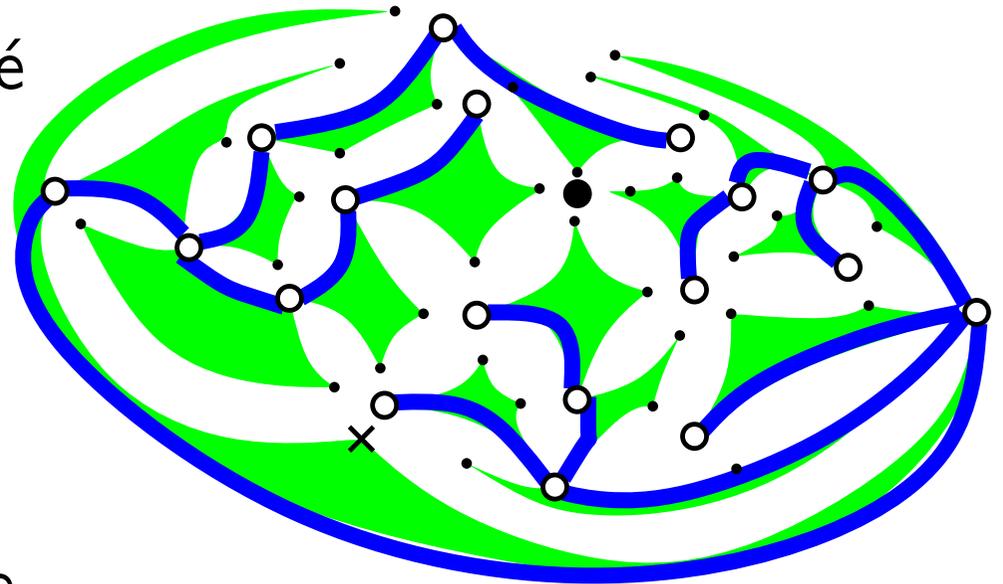
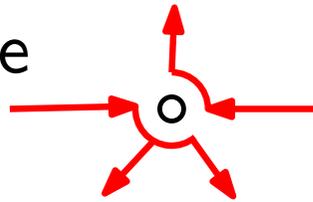
- transverse
- ou latéral



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

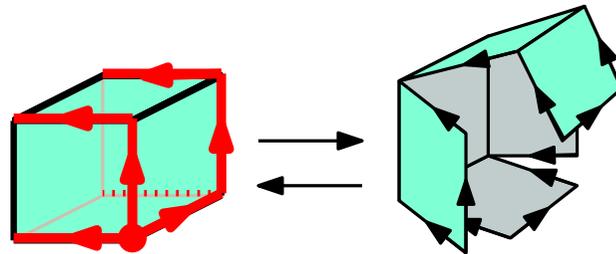
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



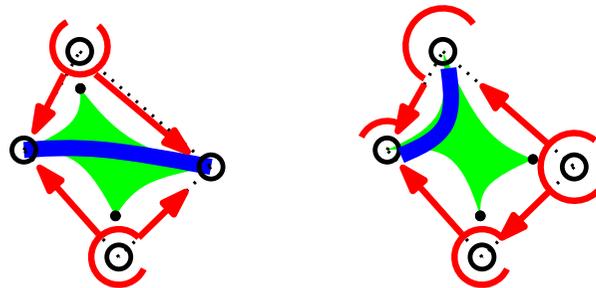
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron

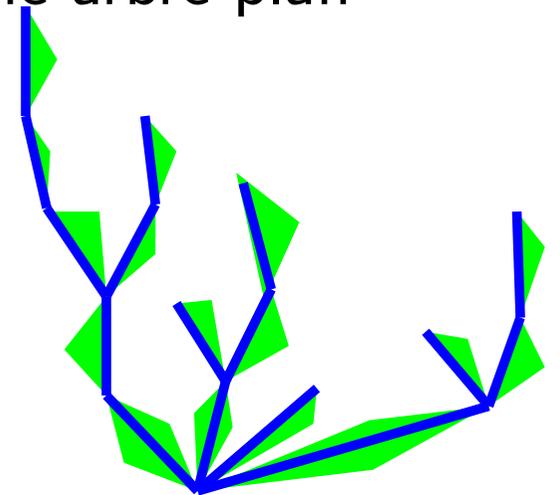


avec 2 types de carrés:

- transverse
- ou latéral



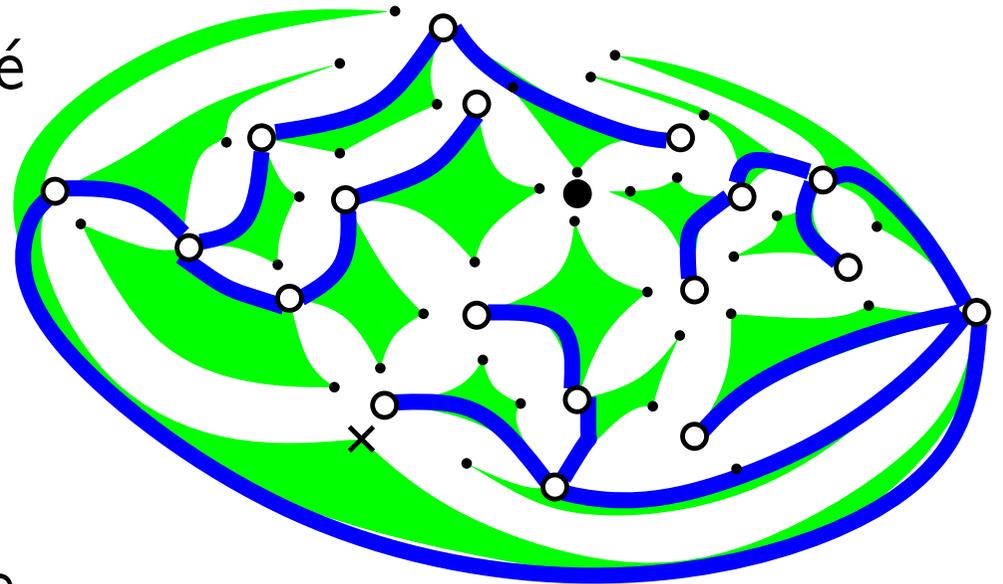
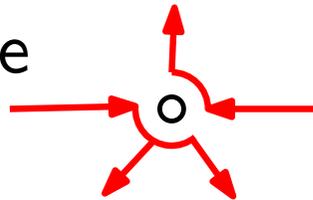
Ce patron se redessine comme arbre plan



# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

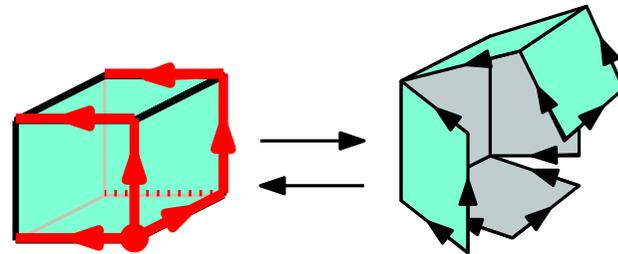
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



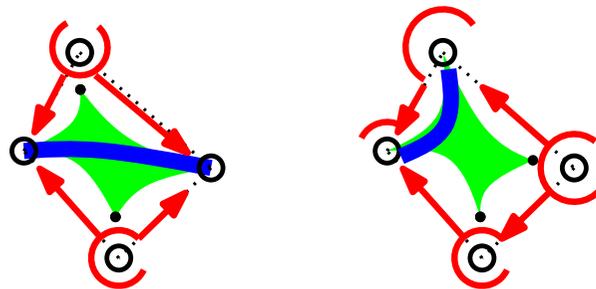
Les chemins rouges forment un arbre.

La découpe le long de cet arbre donne un patron



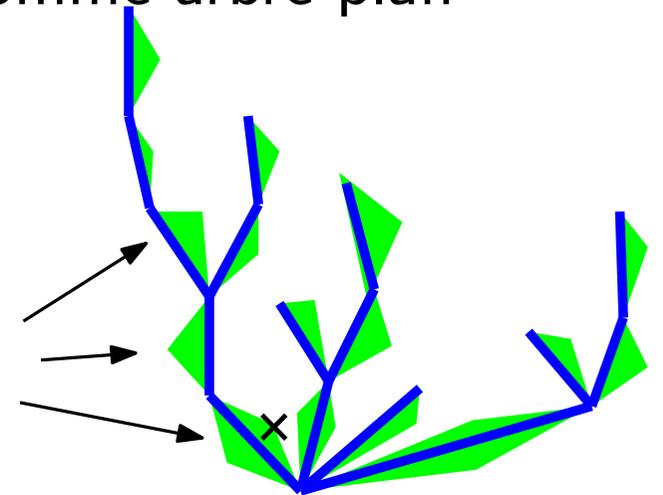
avec 2 types de carrés:

- transverse
- ou latéral



Ce patron se redessine comme arbre plan

3 types d'arêtes

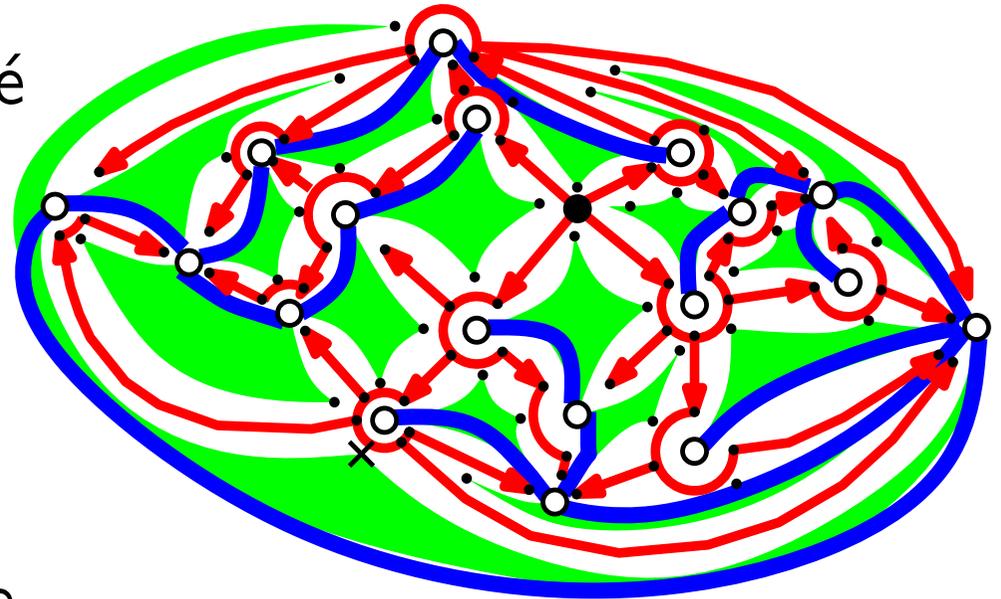
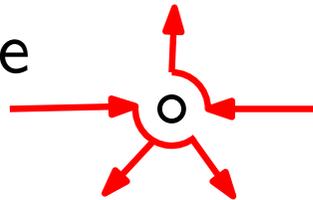


$$\Rightarrow 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

# La construction de Cori-Vauquelin, version graphique

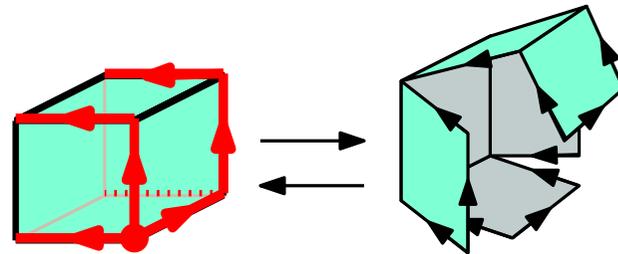
La bijection part d'un sommet pointé et parcourt la carte en largeur

Autour de chaque sommet, l'exploration suit une règle de priorité à droite



Les chemins rouges forment un arbre.

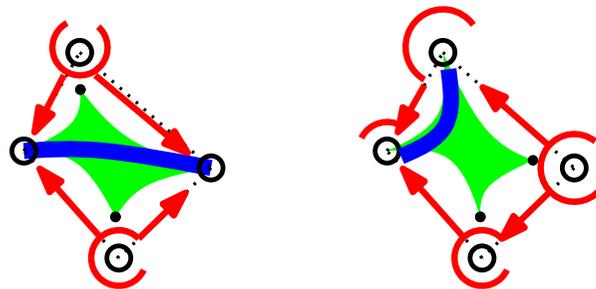
La découpe le long de cet arbre donne un patron



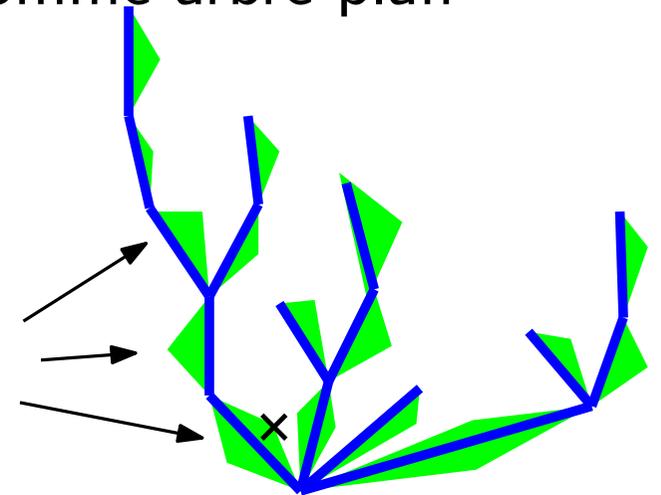
Ce patron se redessine comme arbre plan

avec 2 types de carrés:

- transverse
- ou latéral

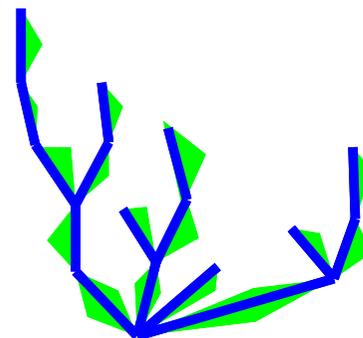
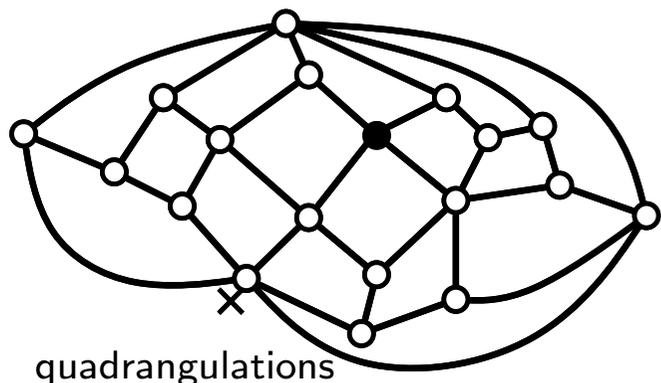


3 types d'arêtes

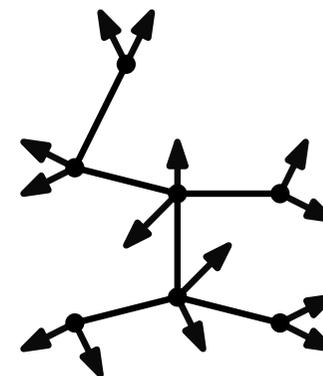
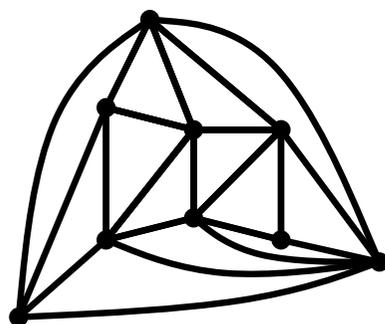


$$\Rightarrow 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

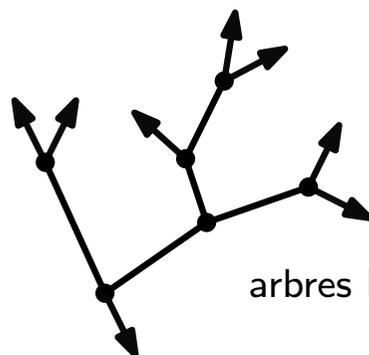
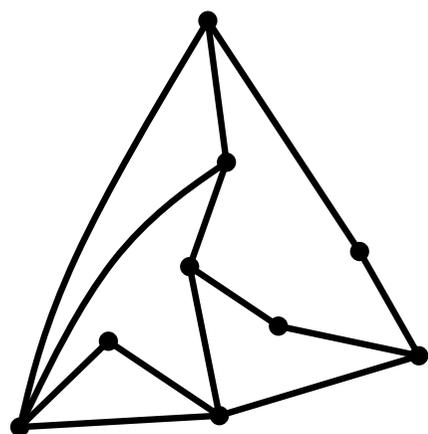
# Une série de toy models de patrons context-free



$$\frac{2}{n+2} \frac{3^n}{n+1} \binom{2n}{n}$$



$$\frac{(4n-2)!}{n!(3n-2)!}$$



$$\frac{6}{n+2} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## et plus récemment une théorie

Le miracle bijectif s'est répété pour une dizaine de familles de cartes:

⇒ des patrons *context-free*, calculable par algorithme de parcours.

Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, Schaeffer 1997, Marcus, Bousquet-Mélou, Poulalhon, Bouttier, di Francesco, Gitter, Fusy, Bernardi, Miermont, Albenque, Ambjørn, Budd, ...

## et plus récemment une théorie

Le miracle bijectif s'est répété pour une dizaine de familles de cartes:  
⇒ des patrons *context-free*, calculable par algorithme de parcours.

Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, Schaeffer 1997, Marcus, Bousquet-Mélou, Poulalhon, Bouttier, di Francesco, Gitter, Fusy, Bernardi, Miermont, Albenque, Ambjørn, Budd, ...

et commencent à s'organiser en théorie générale des liens entre algorithmes de parcours et patrons context-free via la notion d'orientations minimales

Bernardi-Fusy 2014, Albenque-Poulalhon 2014

## et plus récemment une théorie

Le miracle bijectif s'est répété pour une dizaine de familles de cartes:  
⇒ des patrons *context-free*, calculable par algorithme de parcours.

Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, Schaeffer 1997, Marcus, Bousquet-Mélou, Poulalhon, Bouttier, di Francesco, Guitter, Fusy, Bernardi, Miermont, Albenque, Ambjørn, Budd, ...

et commencent à s'organiser en théorie générale des liens entre algorithmes de parcours et patrons context-free via la notion d'orientations minimales

Bernardi-Fusy 2014, Albenque-Poulalon 2014

Récemment cette approche a été étendue à d'autres types d'objets bidimensionnels, les **revêtements ramifiés**, pour lesquels il faut remplacer les arbres plans par des arbres de Cayley.

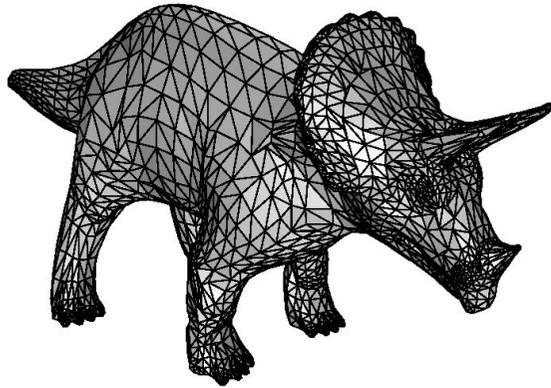
$$\#\{\text{arbres de Cayley}(n)\} = n^{n-2}$$

$$\#\{\text{revêtements}(n)\} = n^{n-3}(2n-2)!$$

Duchi-Poulalhon-S. 2014

# Retour sur l'application à la compression de maillages

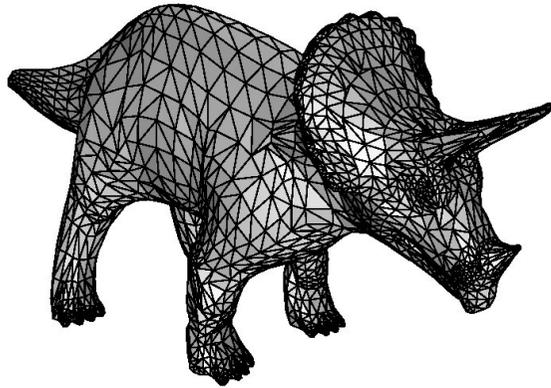
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

# Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

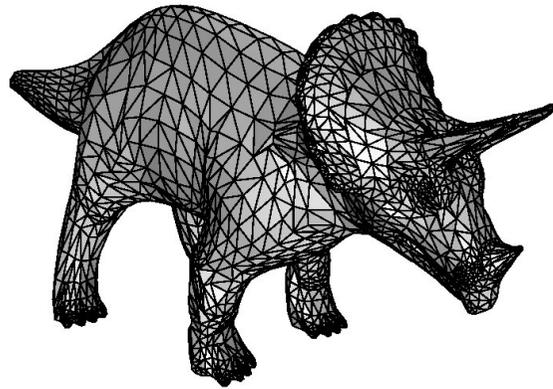
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

carte (224 bits/arêtes)

# Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

coordonnées (32 bits/arêtes)

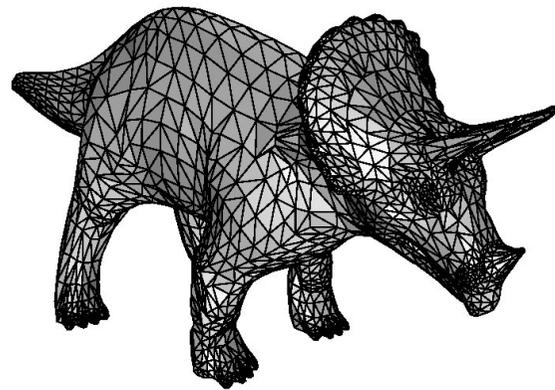
combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

# Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

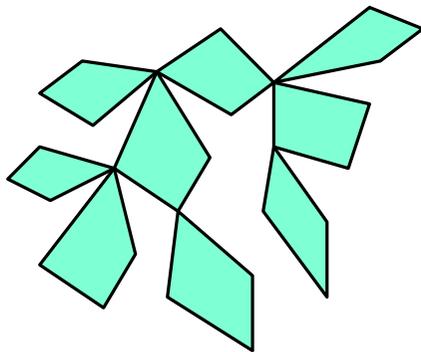
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

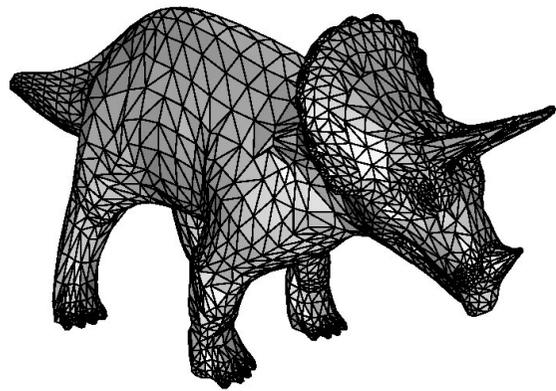
parcours  
et découpage



patron canonique

# Retour sur l'application à la compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



géométrie

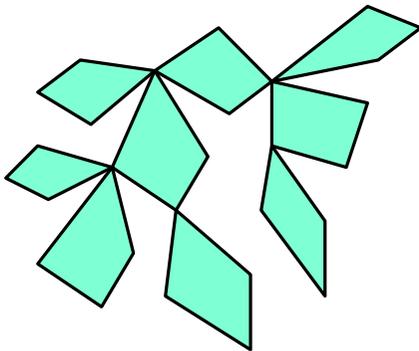
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

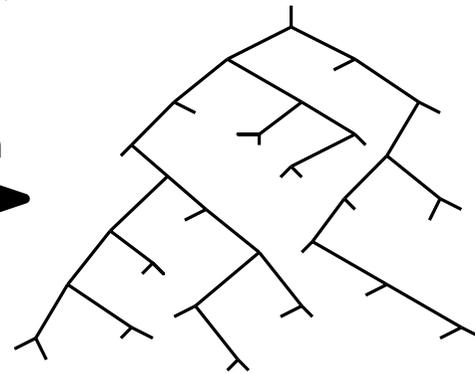
maillage polygonal



parcours  
et découpage

simplification

≈ 1-to-1

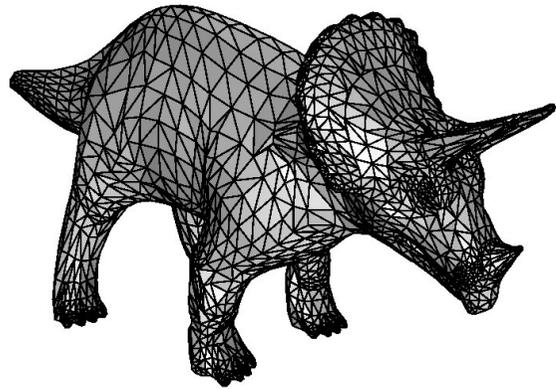


patron canonique

arbre binaire quelconque

# Retour sur l'application à la compression de maillages

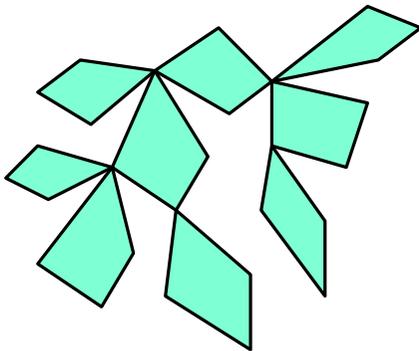
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



géométrie → coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire → Compresser ! (Rossignac et al. 90's)  
carte (224 bits/arêtes)

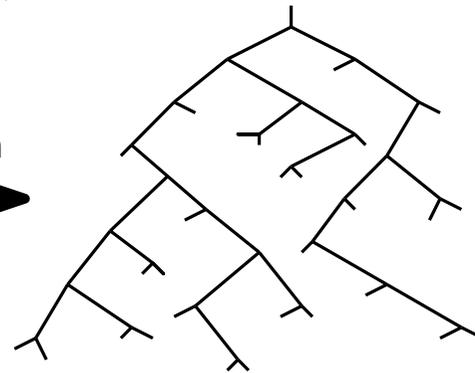
maillage polygonal



patron canonique

parcours  
et découpage

simplification  
≈ 1-to-1



arbre binaire quelconque

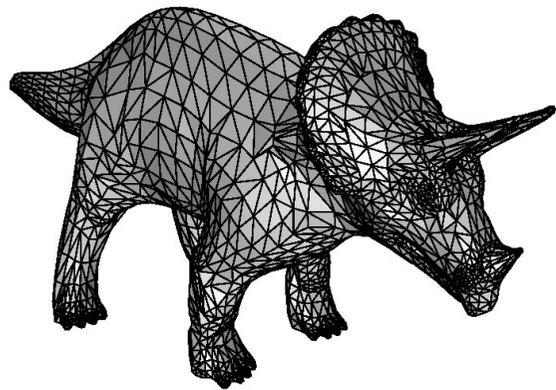
code prefixe  
≈ 1-to-1

```
1110100101100011001111
1000100101001000011110
0010101001001011000110
1100100101001010010100
001001001010001000000
```

code optimal  
de la carte  
2 bits/arêtes

# Retour sur l'application à la compression de maillages

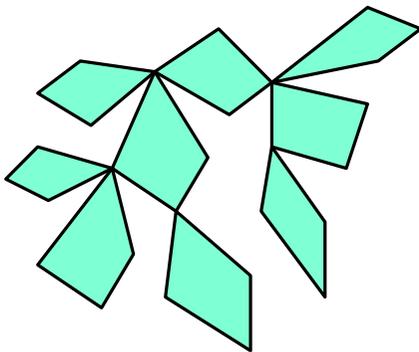
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



géométrie → coordonnées (32 bits/arêtes)

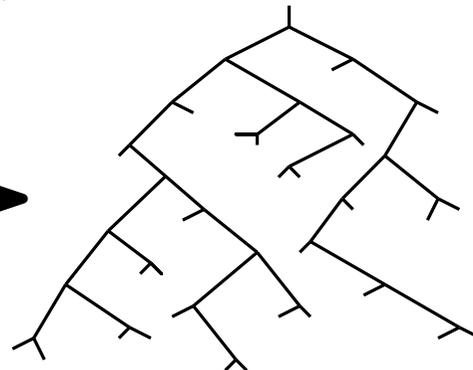
combinatoire → **Compresser ! (Rossignac et al. 90's)**  
carte (224 bits/arêtes)

maillage polygonal



parcours  
et découpage

simplification  
≈ 1-to-1



code préfixe  
≈ 1-to-1

```
1110100101100011001111
1000100101001000011110
0010101001001011000110
1100100101001010010100
001001001010001000000
```

patron canonique

arbre binaire quelconque

code optimal  
de la carte  
2 bits/arêtes

structures de données compactes

# Conclusion

Conclusion

arbres

cartes

**arbres**

**formes fondamentales**

**cartes**

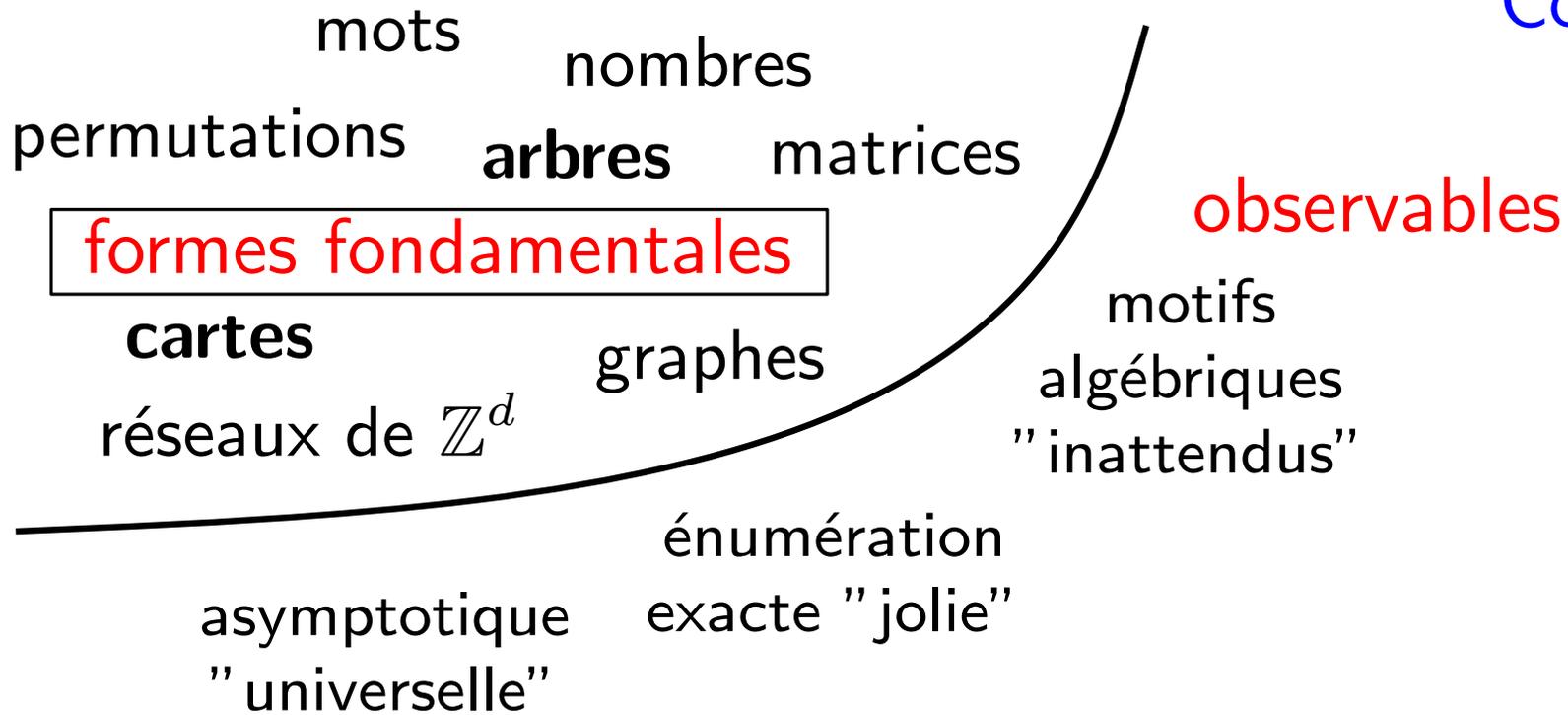
# Conclusion

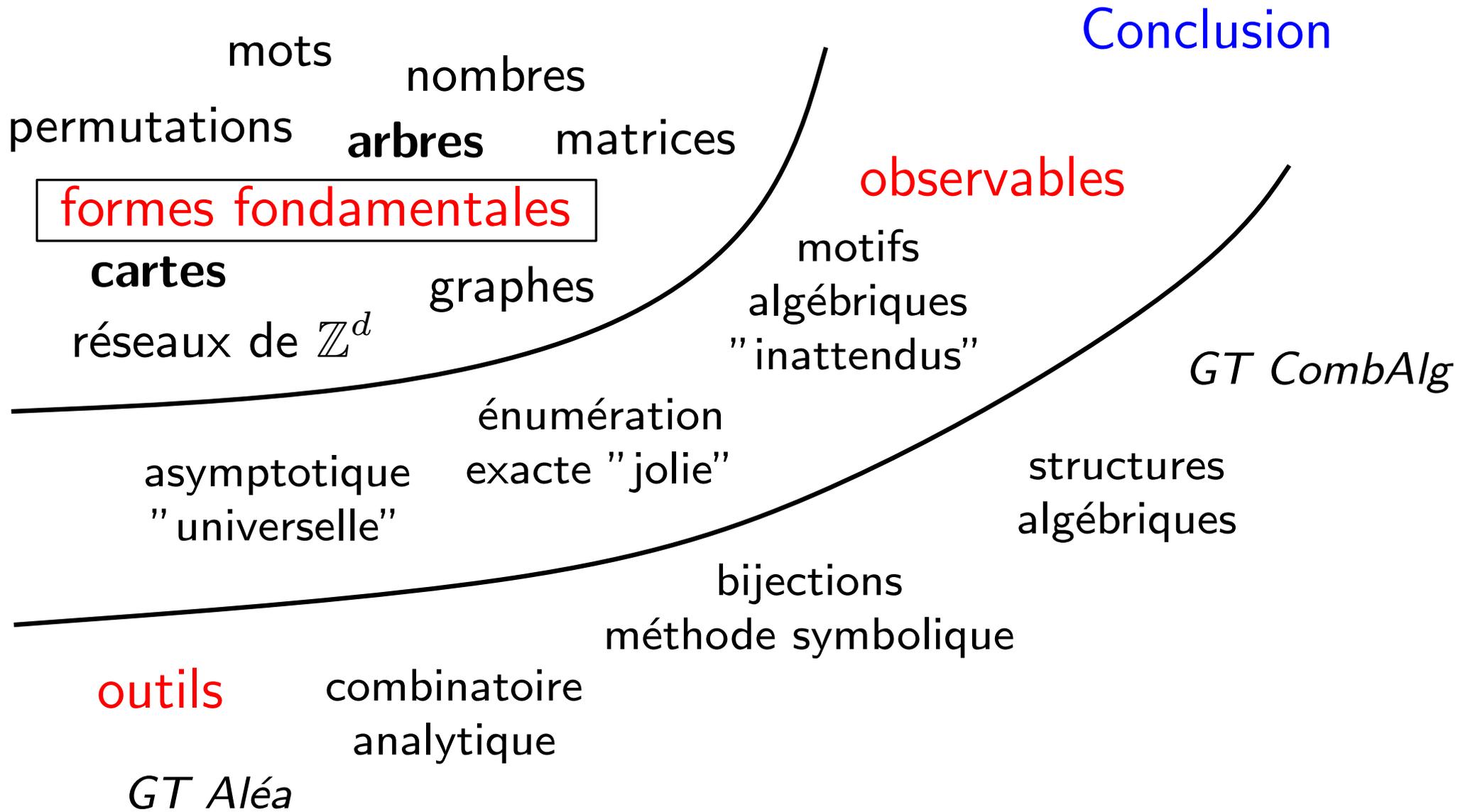
mots      nombres  
permutations    **arbres**    matrices

**formes fondamentales**

**cartes**      graphes  
réseaux de  $\mathbb{Z}^d$

# Conclusion





Conclusion

mots nombres  
permutations arbres matrices

formes fondamentales

observables

cartes

motifs  
algébriques  
"inattendus"

réseaux de  $\mathbb{Z}^d$

graphes

GT CombAlg

énumération

asymptotique  
"universelle"

exacte "jolie"

structures  
algébriques

bijections  
méthode symbolique

outils

combinatoire  
analytique

*physique mathématique*

GT Aléa

conception d'algorithmes,  
de structures de données

analyse en moyenne  
d'algorithmes

applications

*probabilités discrètes  
physique statistique*

Merci de votre attention !