

Arbres couvrants canoniques,
des géométries aléatoires
à la compression de maillages

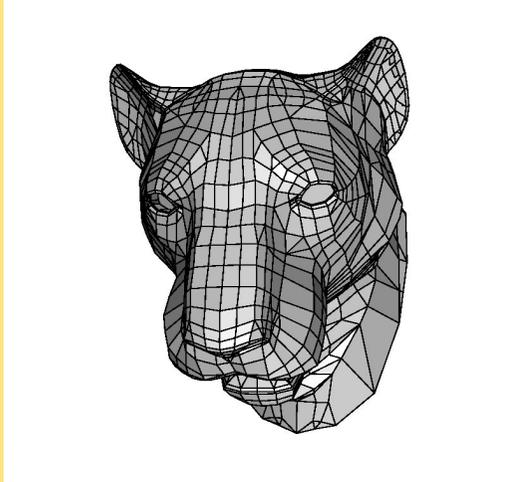
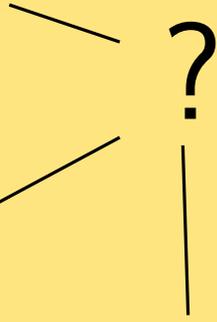
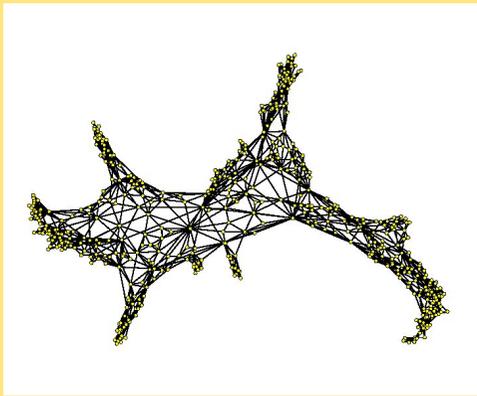
Gilles Schaeffer

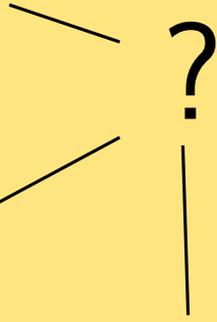
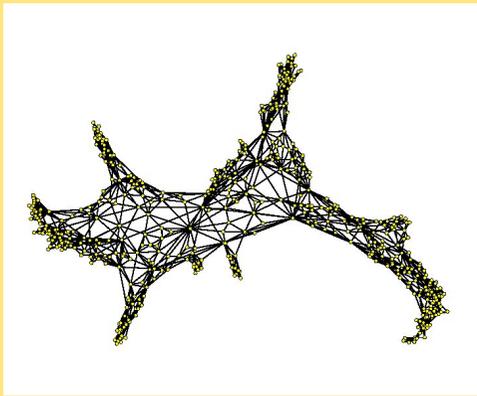
CNRS / Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

Algorithmes de parcours,
des géométries aléatoires
à la compression de maillages

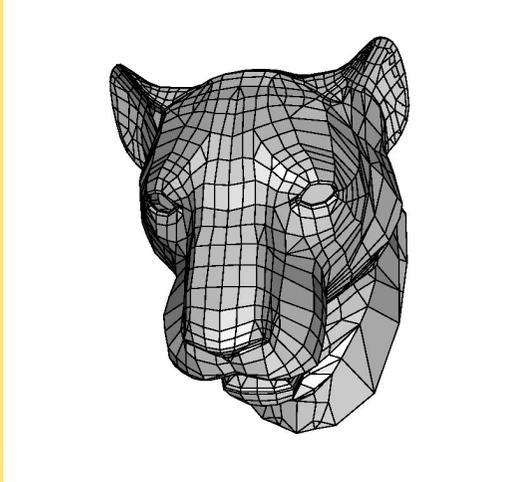
Gilles Schaeffer

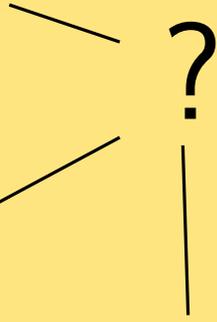
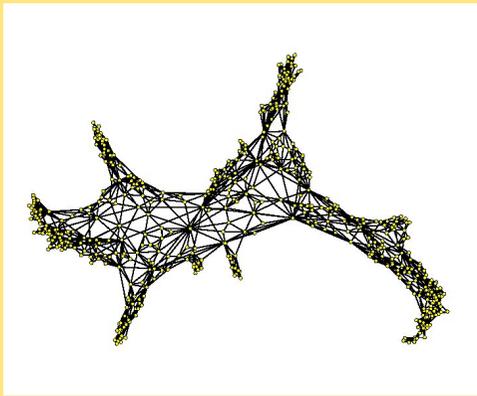
CNRS / Ecole Polytechnique, Palaiseau, France



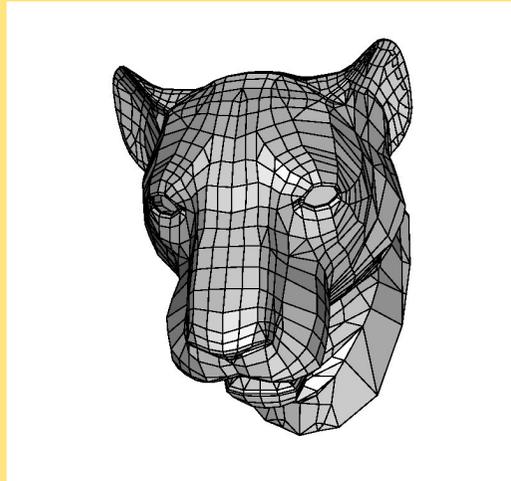


carte géographique

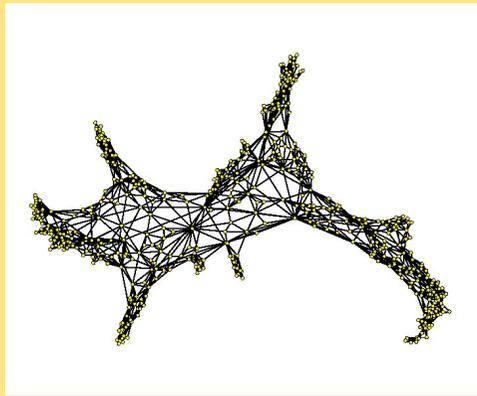




carte géographique



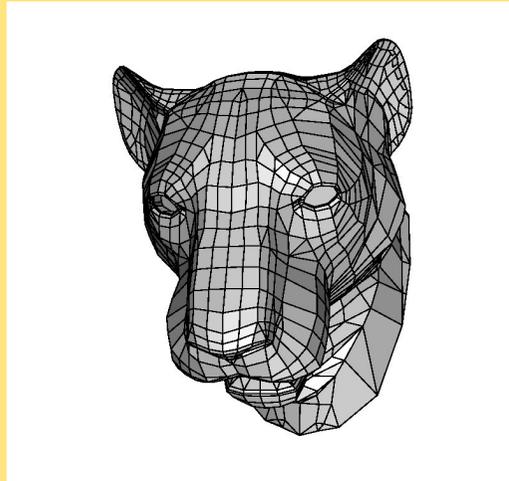
maillage surfacique (CAO)



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

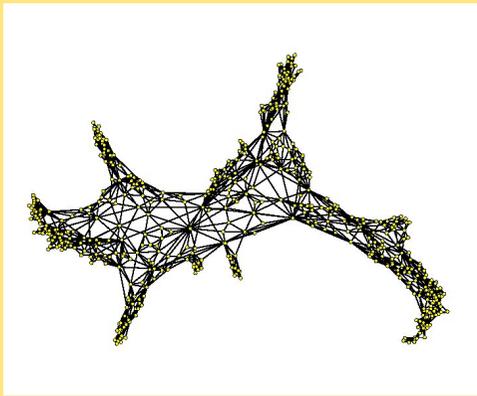


carte géographique



maillage surfacique (CAO)

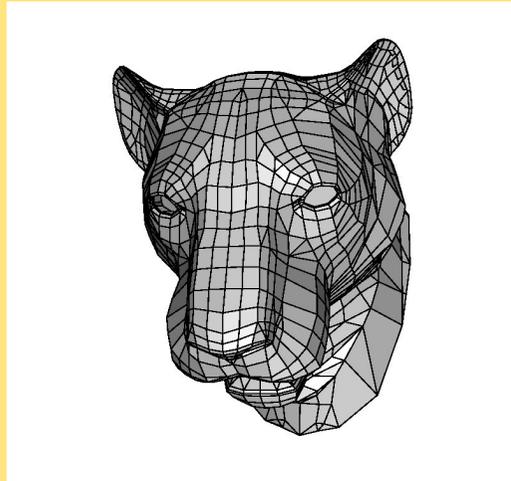
?



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



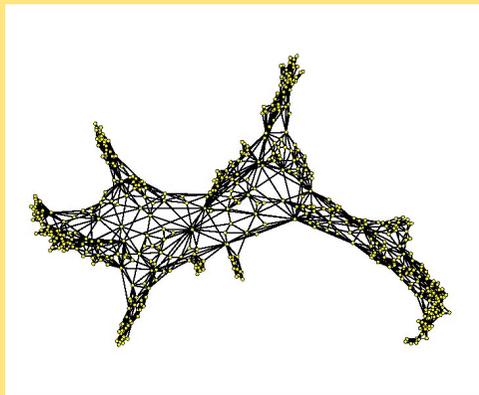
carte géographique



maillage surfacique (CAO)

des objets qui vivent sur une surface...

?



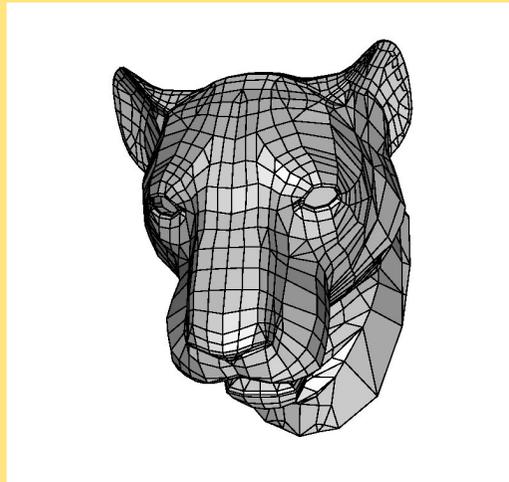
géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

des objets qui vivent sur une surface...

?



carte géographique

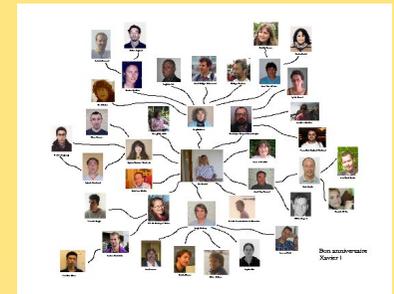


maillage surfacique (CAO)



arbre d'automne

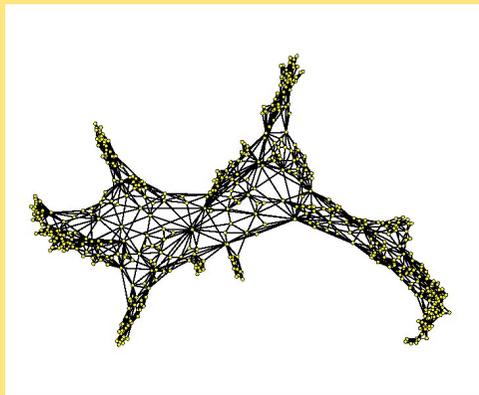
un autre exemple



arbre généalogique



arbre de synthèse



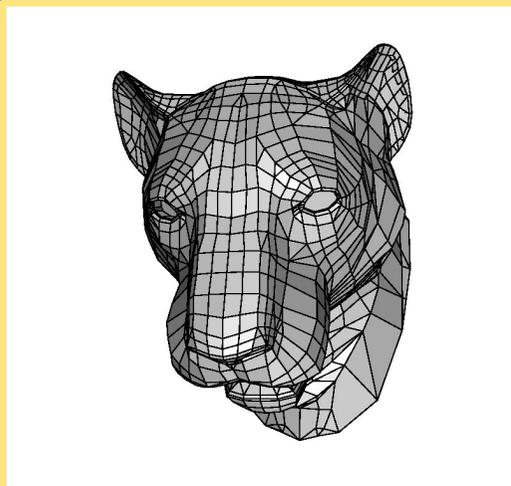
géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

des objets qui vivent sur une surface...

?



carte géographique

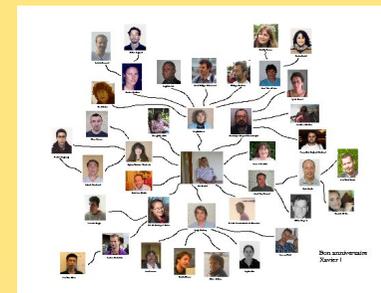


maillage surfacique (CAO)



arbre d'automne

un autre exemple

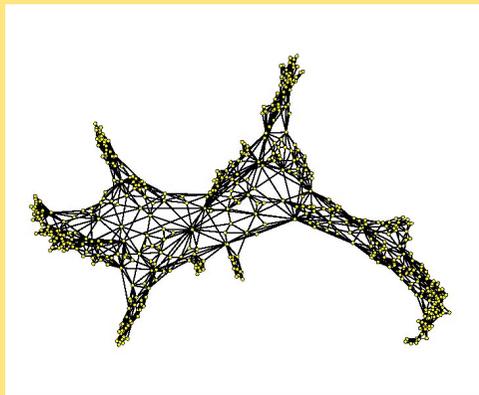


arbre généalogique

?



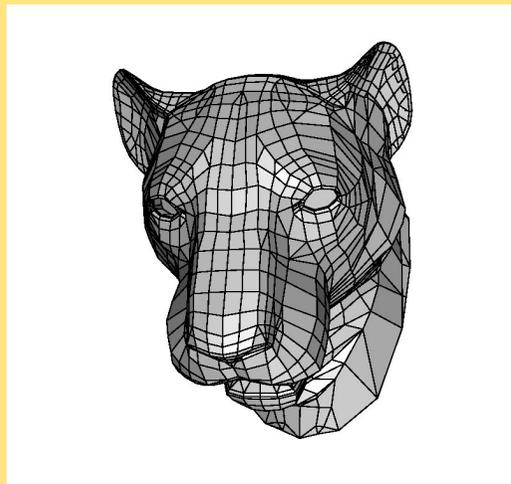
arbre de synthèse



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



maillage surfacique (CAO)

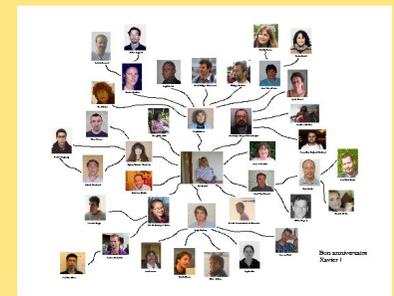
des objets qui vivent sur une surface...

?

un autre exemple

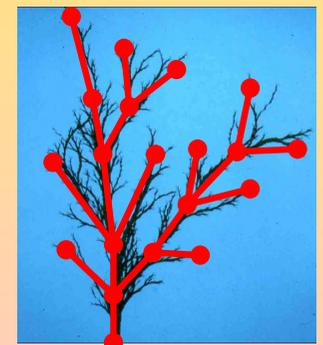


arbre d'automne

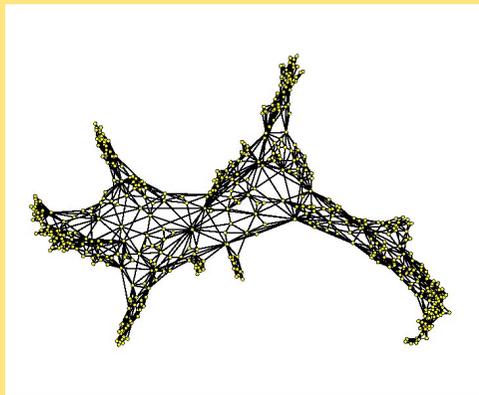


arbre généalogique

?



arbre de synthèse

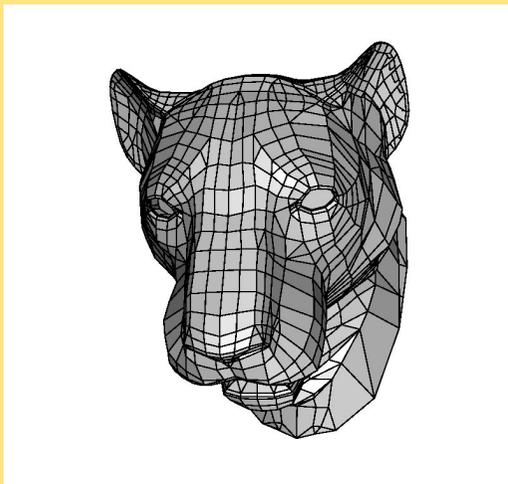


géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

des objets qui vivent sur une surface...



carte géographique

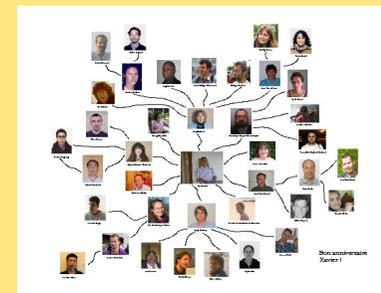


maillage surfacique (CAO)

un autre exemple



arbre d'automne

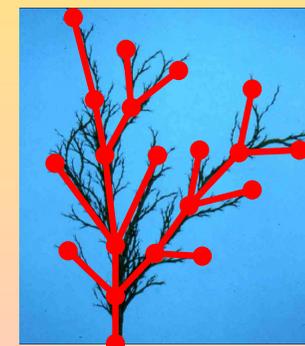
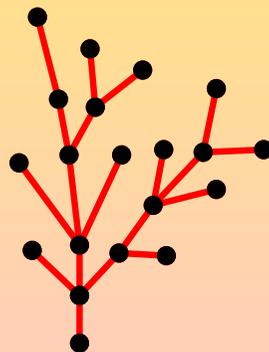


arbre généalogique

arbre combinatoire

=

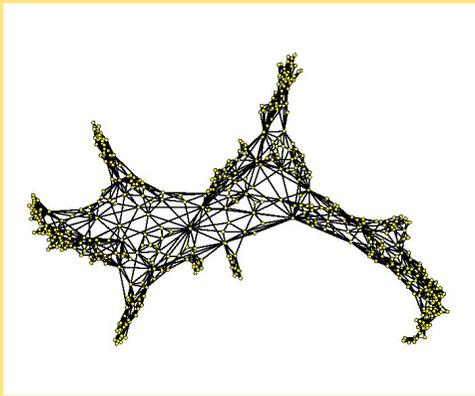
structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



arbre de synthèse

Objet combinatoire / abstraction discrète

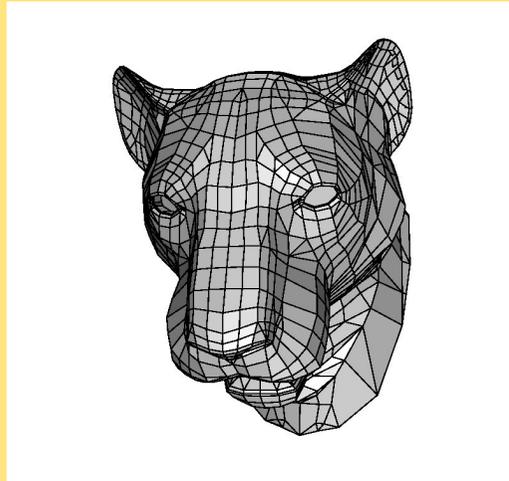
des objets qui vivent sur une surface...



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



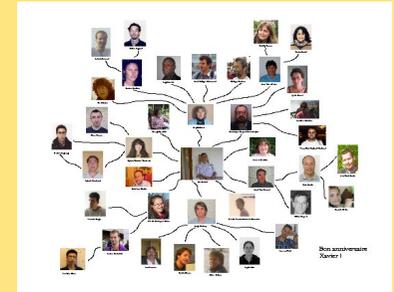
maillage surfacique (CAO)

?

un autre exemple



arbre d'automne

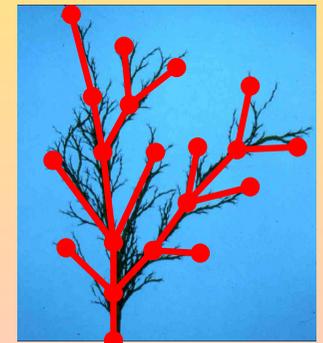
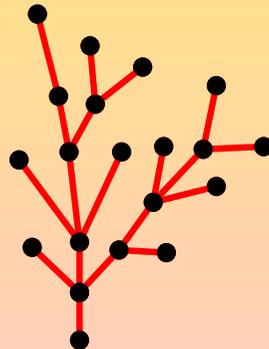


arbre généalogique

arbre combinatoire

=

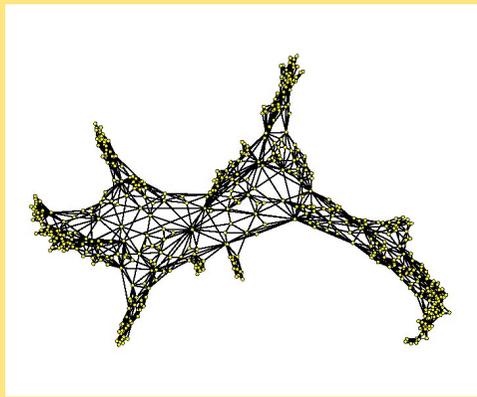
structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes



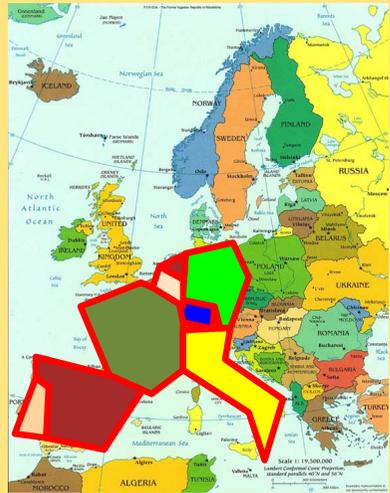
arbre de synthèse

Objet combinatoire / abstraction discrète

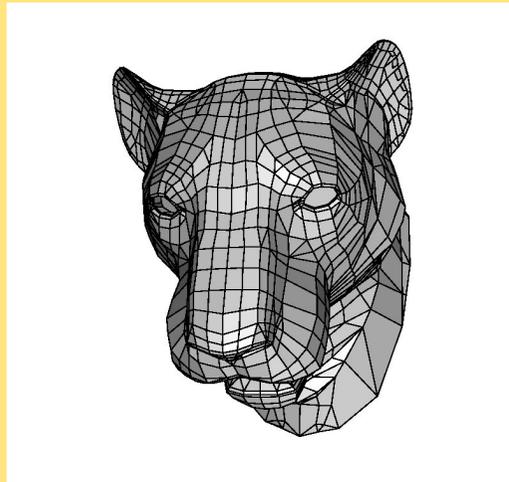
des objets qui vivent sur une surface...



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



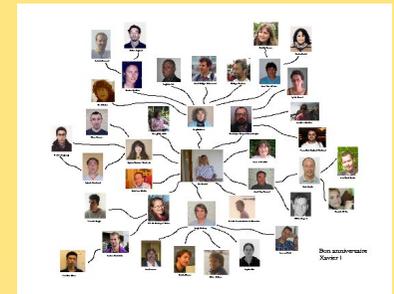
maillage surfacique (CAO)

?

un autre exemple



arbre d'automne

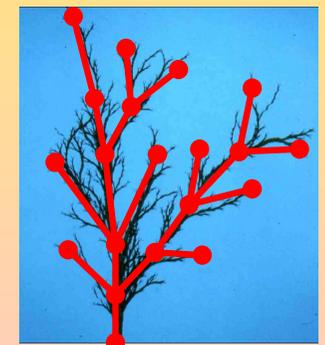
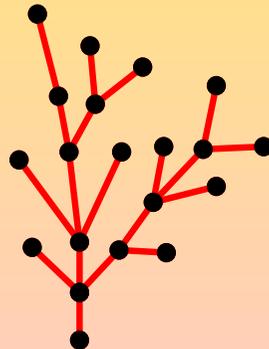


arbre généalogique

arbre combinatoire

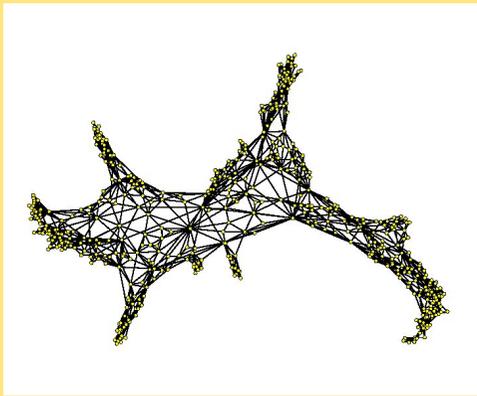
=

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

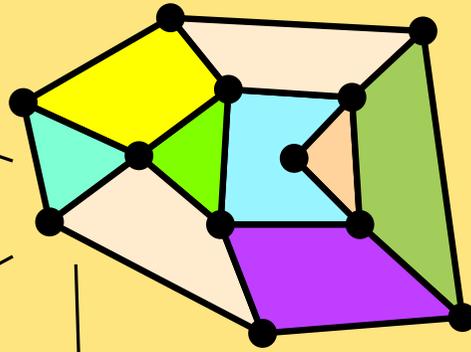


arbre de synthèse

Objet combinatoire / abstraction discrète

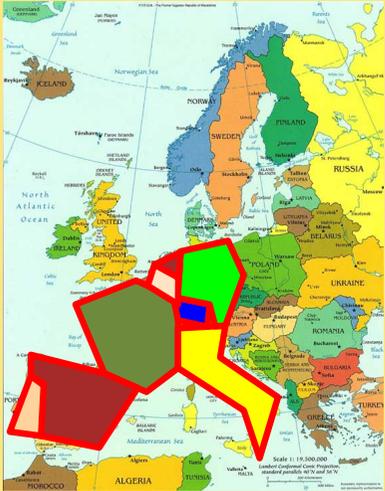


géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

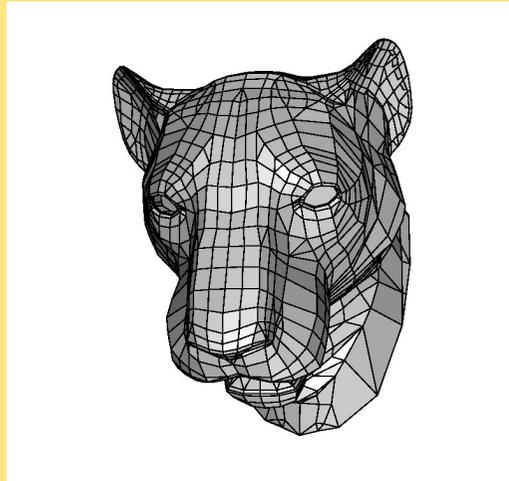


carte combinatoire
=

structure formée de **sommets**
et d'**arêtes** définissant des
faces (régions spl^t connexes)



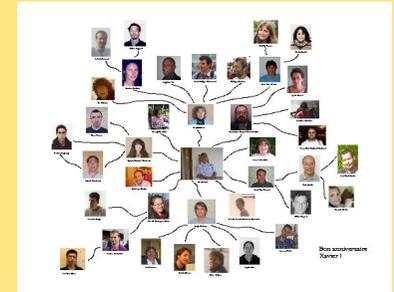
carte géographique



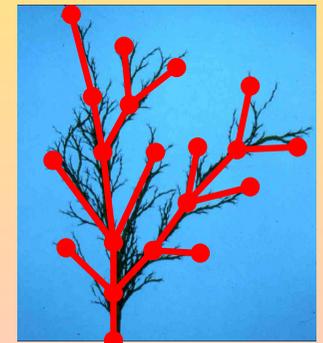
maillage surfacique (CAO)



arbre d'automne



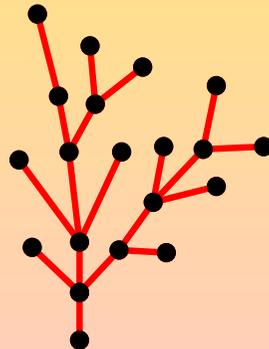
arbre généalogique



arbre de synthèse

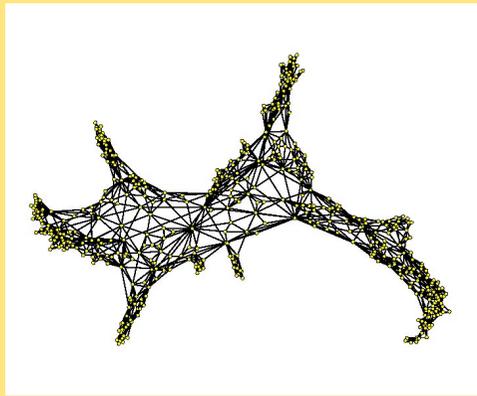
arbre combinatoire
=

structure formée de **sommets**
liés par des **arêtes** formants
des branches indépendantes

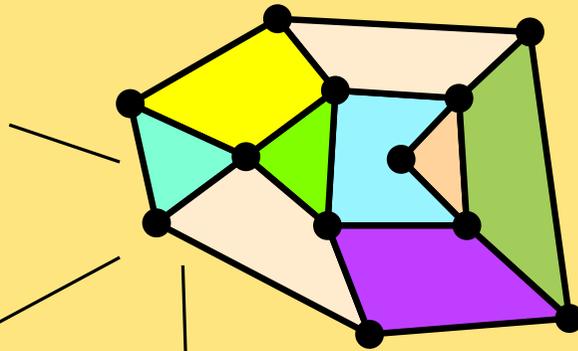


un autre exemple

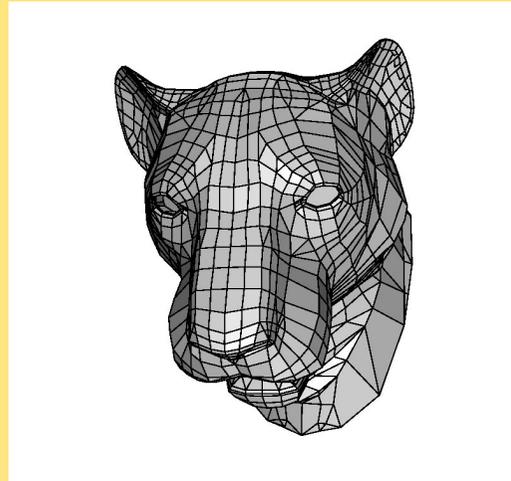
Des cartes combinatoires, pour quoi faire ?



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)

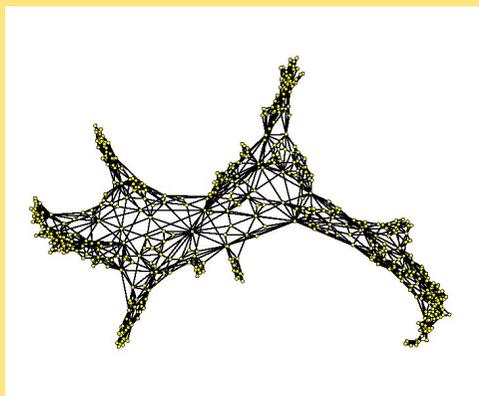


carte géographique

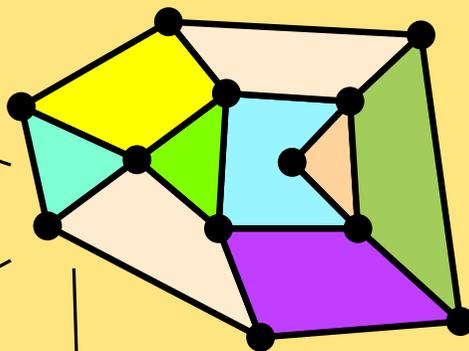


maillage surfacique (CAO)

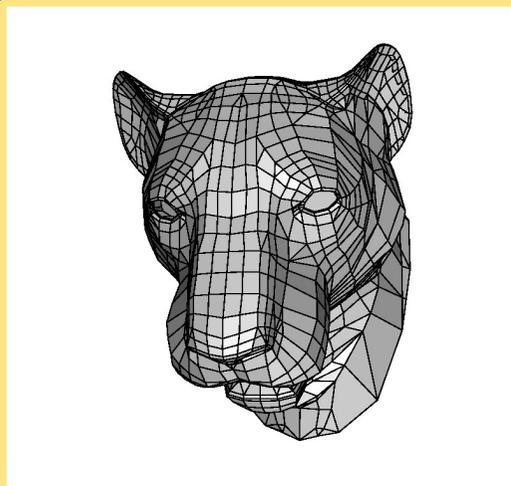
Des cartes combinatoires, pour quoi faire ?



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique

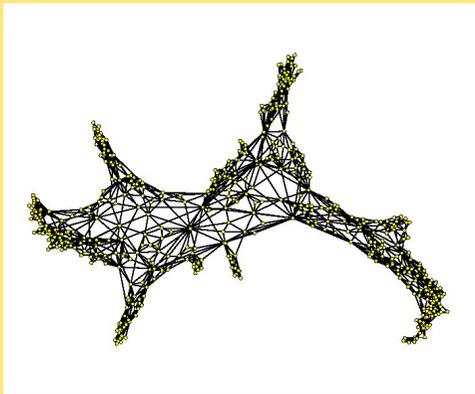


maillage surfacique (CAO)

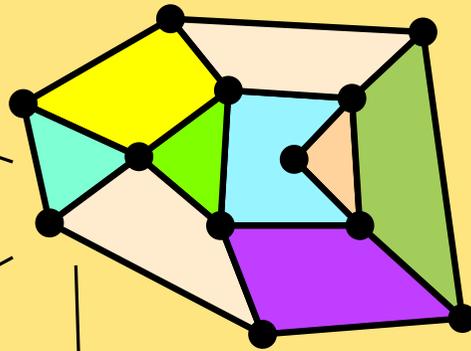
Théorème des 4 couleurs

⇒ sur la carte combinatoire
(peu importe le détail de la géométrie)

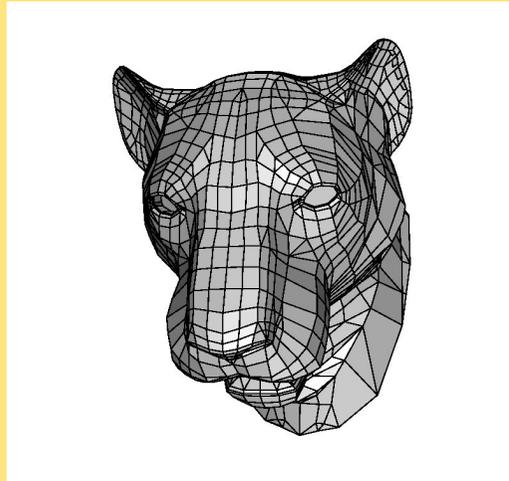
Des cartes combinatoires, pour quoi faire ?



géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



carte géographique



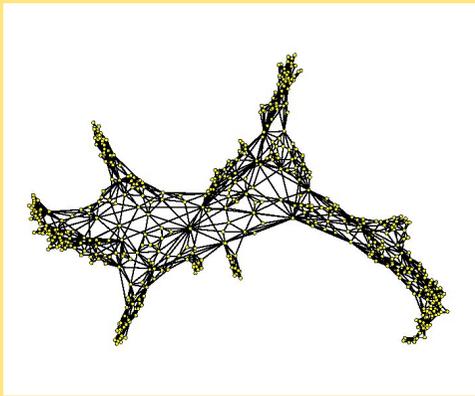
maillage surfacique (CAO)

Géométrie algorithmique
séparation des propriétés discrètes
(nb fini de faces/sommets/arêtes)
et géométriques (coordonnées)
⇒ structures de données

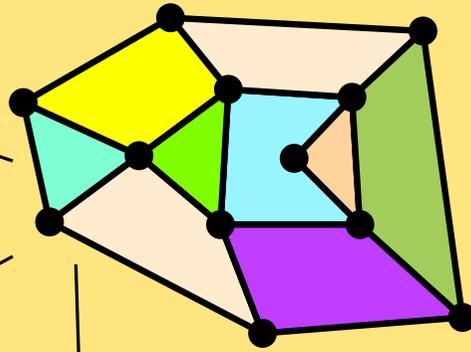
Théorème des 4 couleurs

⇒ sur la carte combinatoire
(peu importe le détail de la géométrie)

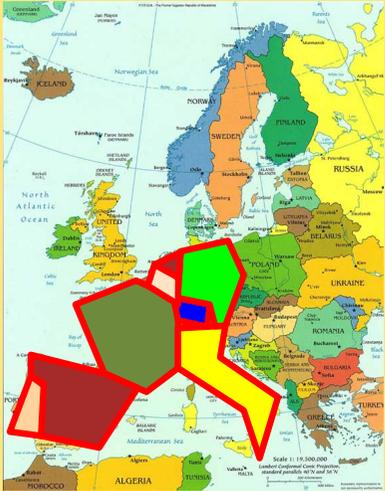
Des cartes combinatoires, pour quoi faire ?



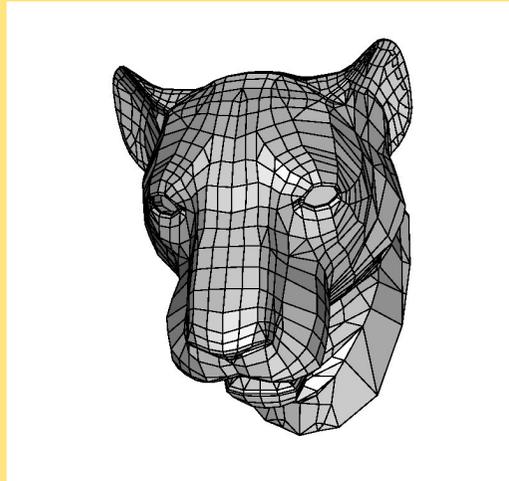
géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



Physique statistique
un modèle classique de
surface aléatoire discrétisée
(géométrie combinatoire)



carte géographique



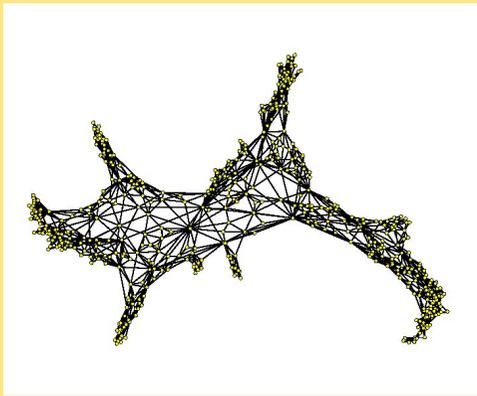
maillage surfacique (CAO)

Géométrie algorithmique
séparation des propriétés discrètes
(nb fini de faces/sommets/arêtes)
et géométriques (coordonnées)
⇒ structures de données

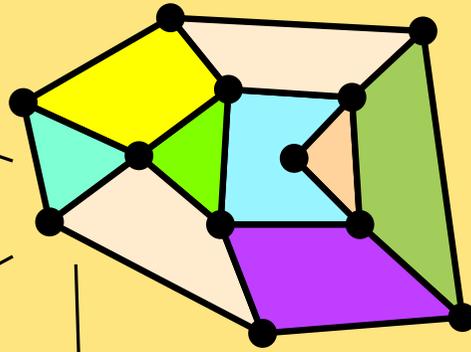
Théorème des 4 couleurs

⇒ sur la carte combinatoire
(peu importe le détail de la géométrie)

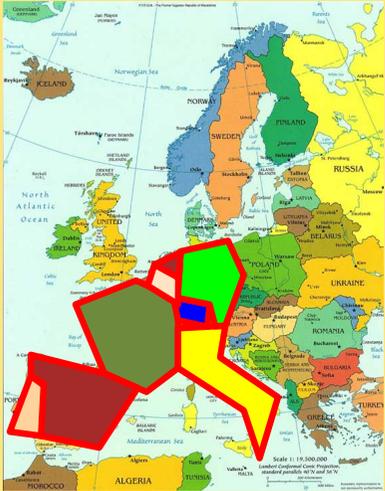
Des cartes combinatoires, pour quoi faire ?



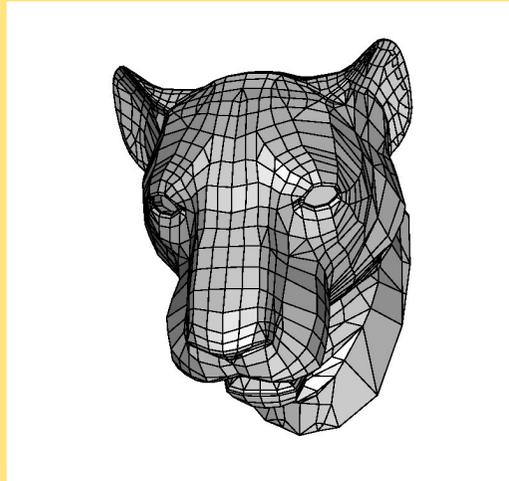
géométrie aléatoire discrète
(gravité quantique pure)



Physique statistique
un modèle classique de
surface aléatoire discrétisée
(géométrie combinatoire)



carte géographique



maillage surfacique (CAO)

Géométrie algorithmique
séparation des propriétés discrètes
(nb fini de faces/sommets/arêtes)
et géométriques (coordonnées)
⇒ structures de données

pour remonter plus loin dans le temps...

Théorème des 4 couleurs

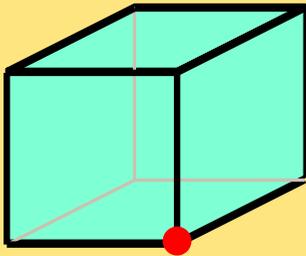
⇒ sur la carte combinatoire
(peu importe le détail de la géométrie)

Topologie des surfaces

⇒ la formule d'Euler

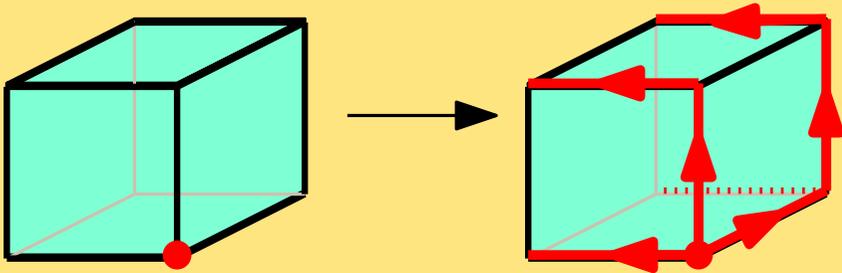
Cartes, parcours, Dürer et Euler...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Cartes, parcours, Dürer et Euler...

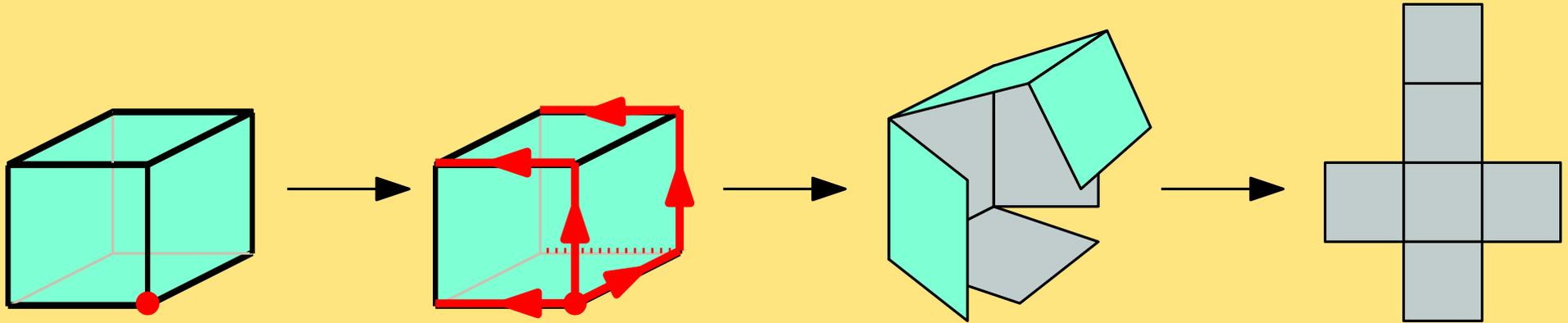
sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...

Cartes, parcours, Dürer et Euler...

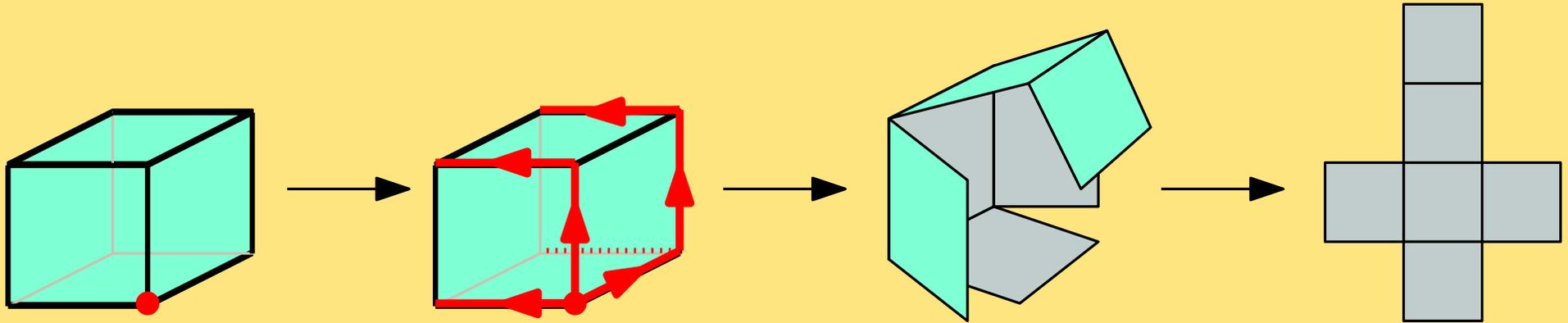
sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

Cartes, parcours, Dürer et Euler...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



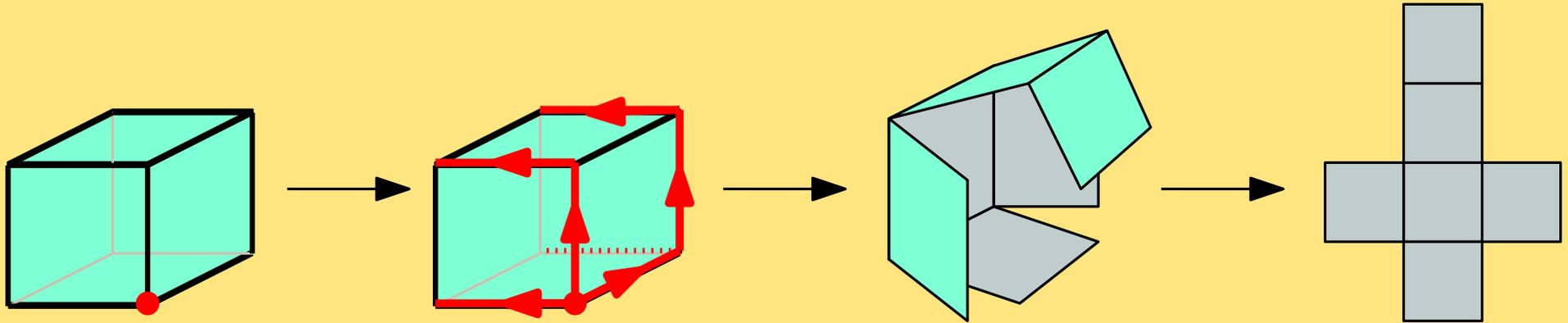
Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

Cartes, parcours, Dürer et Euler...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

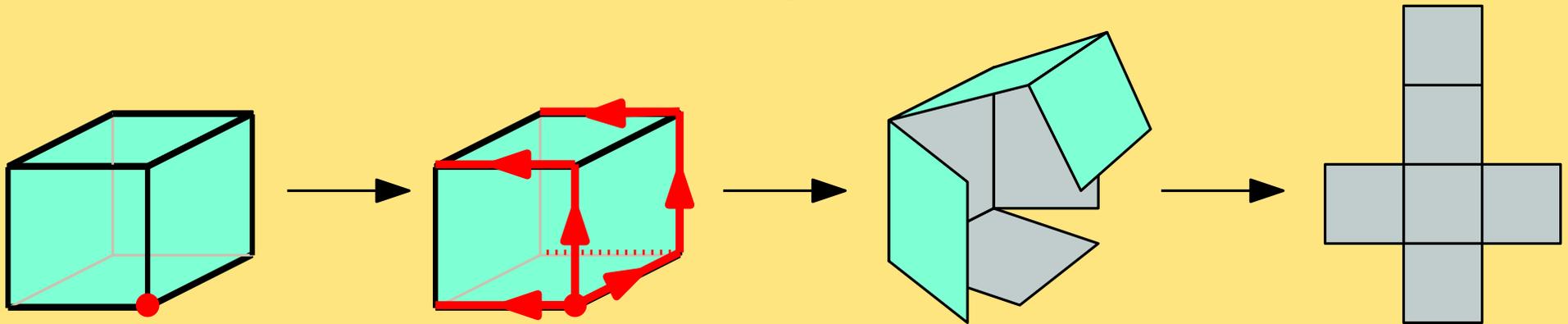
s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

f faces $\Rightarrow f - 1$ arêtes internes au patron

Cartes, parcours, Dürer et Euler...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

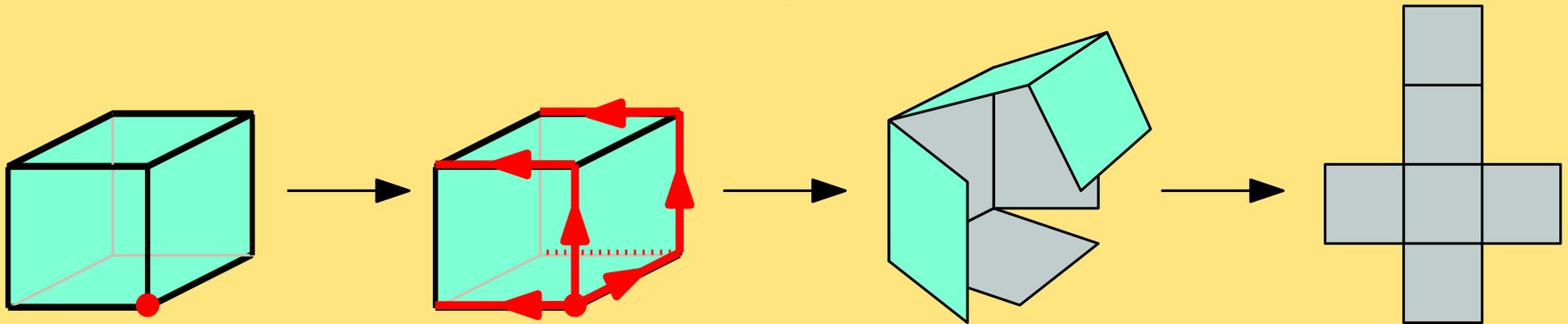
les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

f faces $\Rightarrow f - 1$ arêtes internes au patron

\Rightarrow **Théorème.** La formule d'Euler: $s + f = a + 2$ (Euler, 1752)

Cartes, parcours, Dürer et Euler...

sur la surface du cube: la carte la plus connue...



Parcourir les arêtes pour former un arbre joignant tous les sommets...
et découper la surface pour obtenir un **patron** (Dürer, 1525)

l'arbre de découpage joint tous les sommets

s sommets $\Rightarrow s - 1$ arêtes découpées

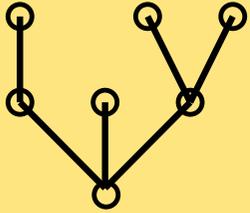
les faces du patron forment un arbre de polygones collés par des côtés

f faces $\Rightarrow f - 1$ arêtes internes au patron

\Rightarrow **Théorème.** La formule d'Euler: $s + f = a + 2$ (Euler, 1752)

Les algorithmes de parcours

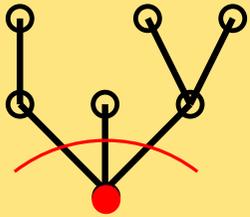
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord

Les algorithmes de parcours

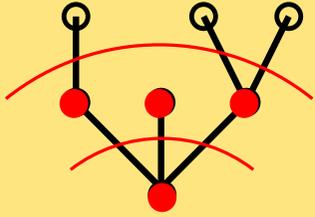
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord

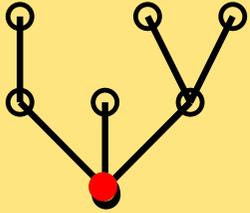
Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



Les algorithmes de parcours

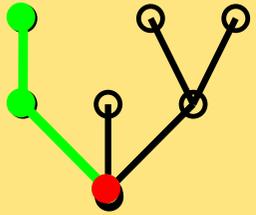
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

Les algorithmes de parcours

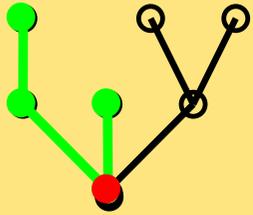
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

Les algorithmes de parcours

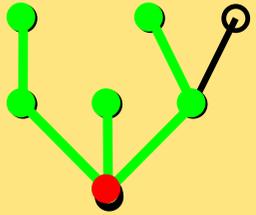
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

Les algorithmes de parcours

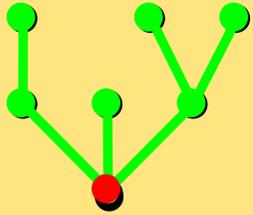
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

Les algorithmes de parcours

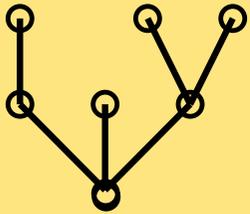
Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre

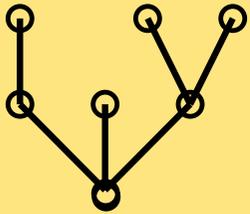


en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



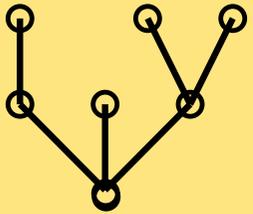
en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

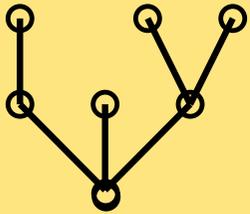
l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

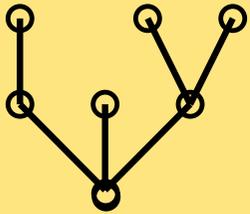
l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code préfixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

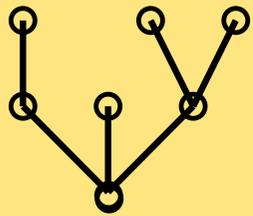
le genre de résultats qu'on aime:

Théorème. Le langage des codes prefixes
d'arbres ordonnés est *context-free*.

... méthodologie de Schützenberger

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

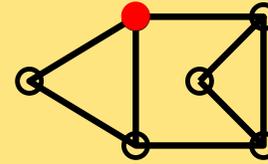
Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

le genre de résultats qu'on aime:

Théorème. Le langage des codes prefixes
d'arbres ordonnés est *context-free*.

... méthodologie de Schützenberger

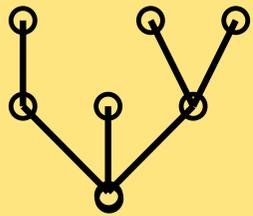
Parcours d'une carte



en largeur

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

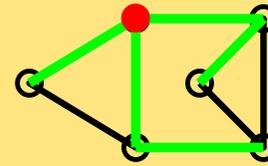
Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

le genre de résultats qu'on aime:

Théorème. Le langage des codes prefixes
d'arbres ordonnés est *context-free*.

... méthodologie de Schützenberger

Parcours d'une carte

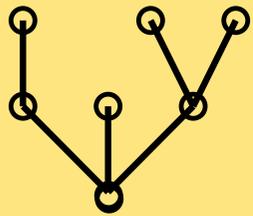


en largeur

permet de construire un arbre couvrant

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

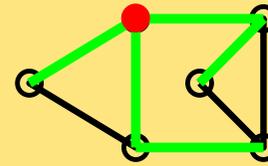
Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

le genre de résultats qu'on aime:

Théorème. Le langage des codes prefixes
d'arbres ordonnés est *context-free*.

... méthodologie de Schützenberger

Parcours d'une carte



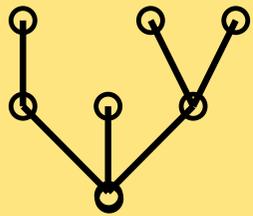
en largeur

permet de construire un arbre couvrant
+ marquage pour les arêtes externes

⇒ codage par une structure arborescente

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

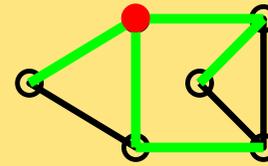
Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

le genre de résultats qu'on aime:

Théorème. Le langage des codes prefixes
d'arbres ordonnés est *context-free*.

... méthodologie de Schützenberger

Parcours d'une carte



en largeur

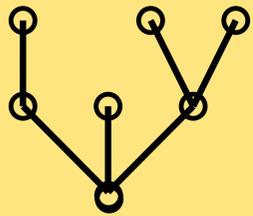
permet de construire un arbre couvrant
+ marquage pour les arêtes externes

⇒ codage par une structure arborescente

mais l'ensemble des arbres codants
n'est pas facile à décrire (pour les
familles classiques de cartes: cartes
planaires, 3-connexes,...)

Les algorithmes de parcours

Parcours d'un arbre



en largeur d'abord
en profondeur

l'utilisation de ces parcours
est l'une des idées fortes de
l'algorithmique

ex: le code prefixe d'un arbre

3 1 0 2 0 0 0 (en largeur)

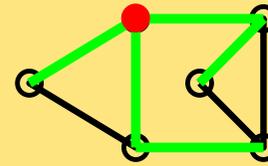
Affirmation. L'ensemble des
mots de code est facile à décrire

le genre de résultats qu'on aime:

Théorème. Le langage des codes prefixes
d'arbres ordonnés est *context-free*.

... méthodologie de Schützenberger

Parcours d'une carte



en largeur

permet de construire un arbre couvrant
+ marquage pour les arêtes externes

⇒ codage par une structure arborescente

mais l'ensemble des arbres codants
n'est pas facile à décrire (pour les
familles classiques de cartes: cartes
planaires, 3-connexes,...)

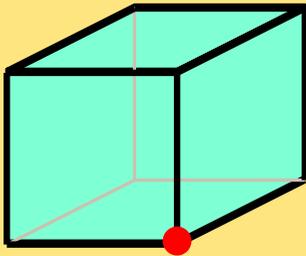
On voudrait un analogue du
théorème structurel précédent

Les algorithmes de parcours

Parcours d'une carte et découpage de surface

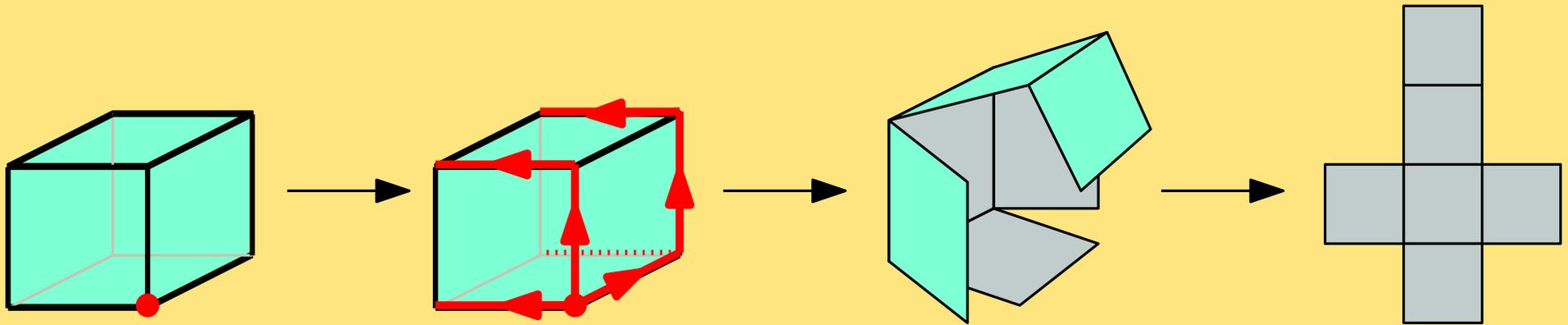
Les algorithmes de parcours

Parcours d'une carte et découpage de surface



Les algorithmes de parcours

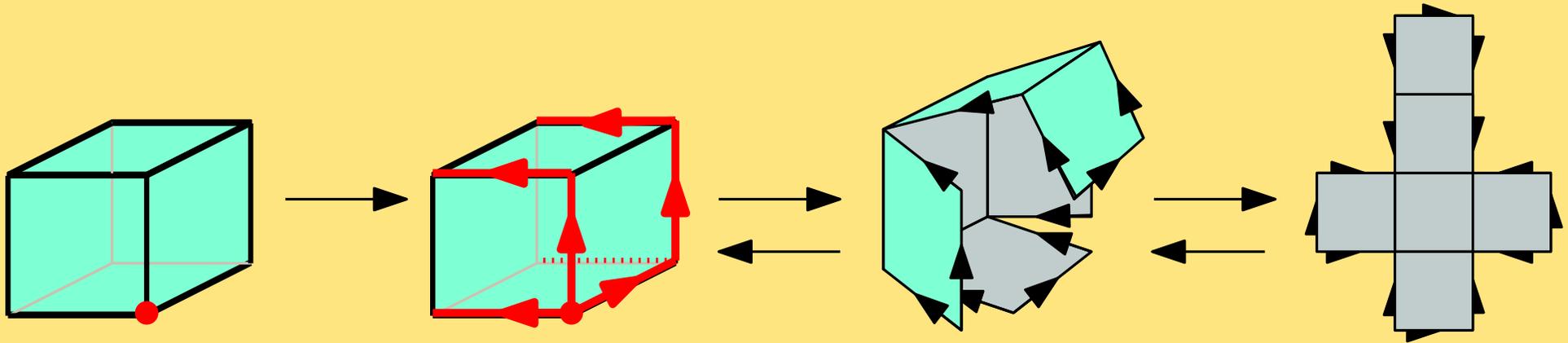
Parcours d'une carte et découpage de surface



Parcours + découpage \Rightarrow un "patron" de la carte

Les algorithmes de parcours

Parcours d'une carte et découpage de surface

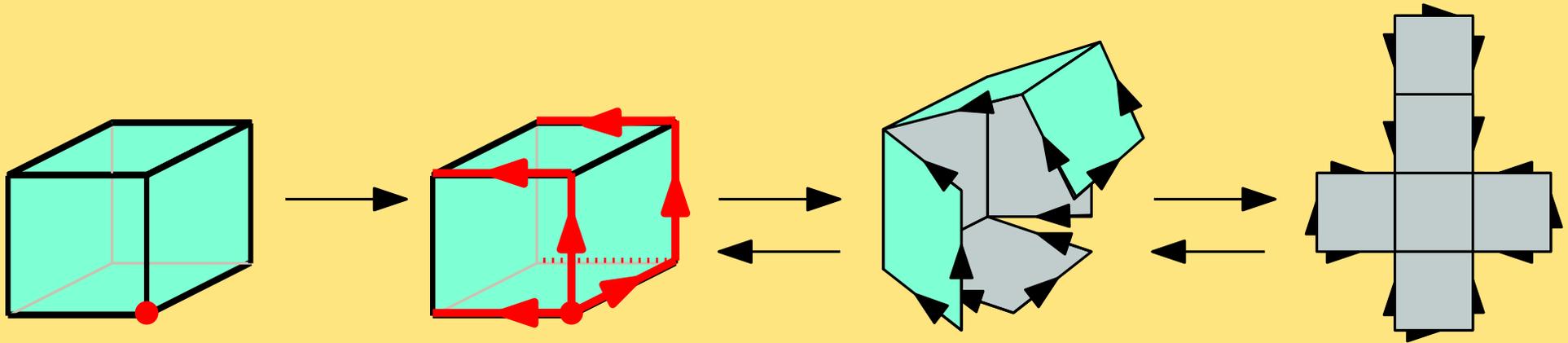


Parcours + découpage \Rightarrow un "patron" de la carte

pour reconstruire la surface, il faut le patron avec l'orientation des coupures: recoller les côtés tête-bêche et itérer

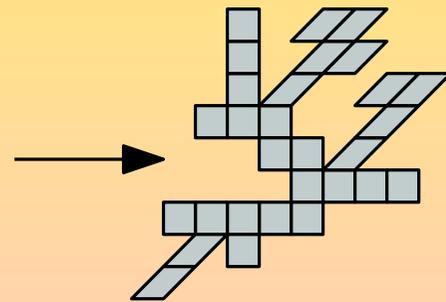
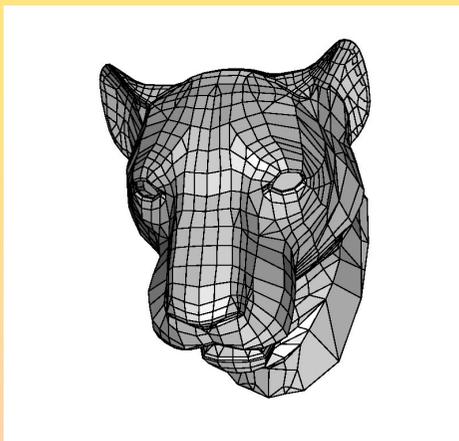
Les algorithmes de parcours

Parcours d'une carte et découpage de surface



Parcours + découpage \Rightarrow un "patron" de la carte

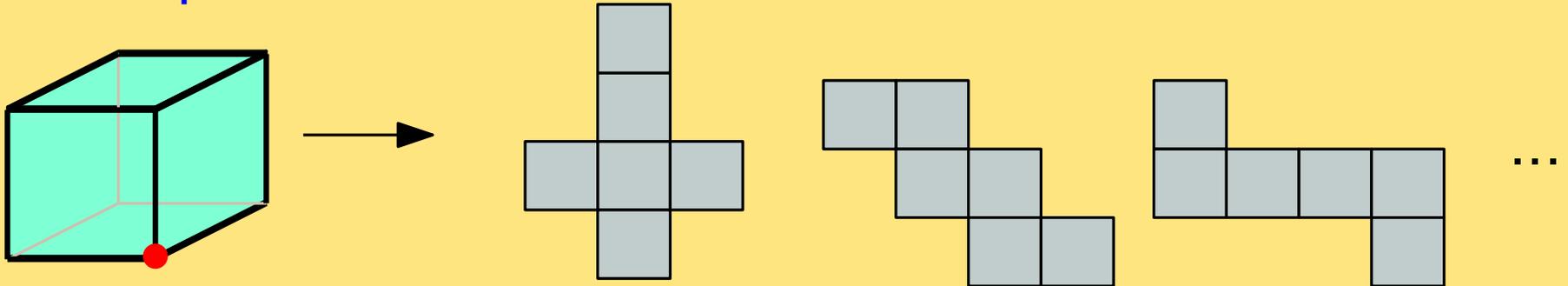
pour reconstruire la surface, il faut le patron avec l'orientation des coupures: recoller les côtés tête-bêche et itérer



Les patrons sont toujours des arbres de polygones
(tant que la surface n'a pas d'anse)

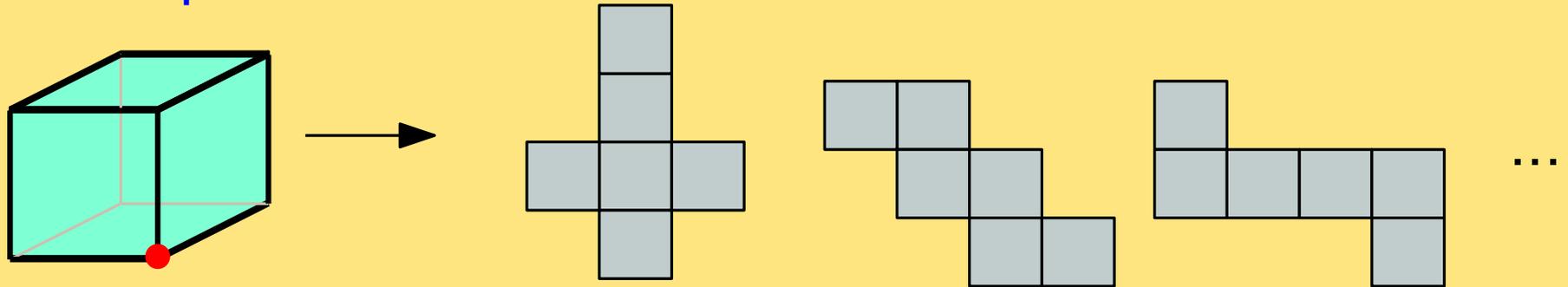
Les algorithmes de parcours

À une carte sont associés
de nombreux patrons...

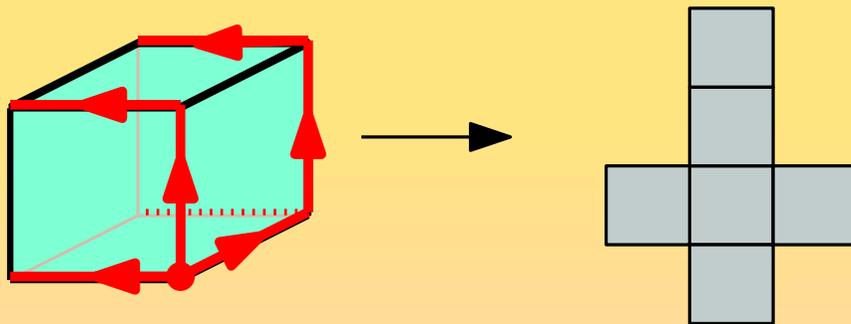


Les algorithmes de parcours

À une carte sont associés de nombreux patrons...

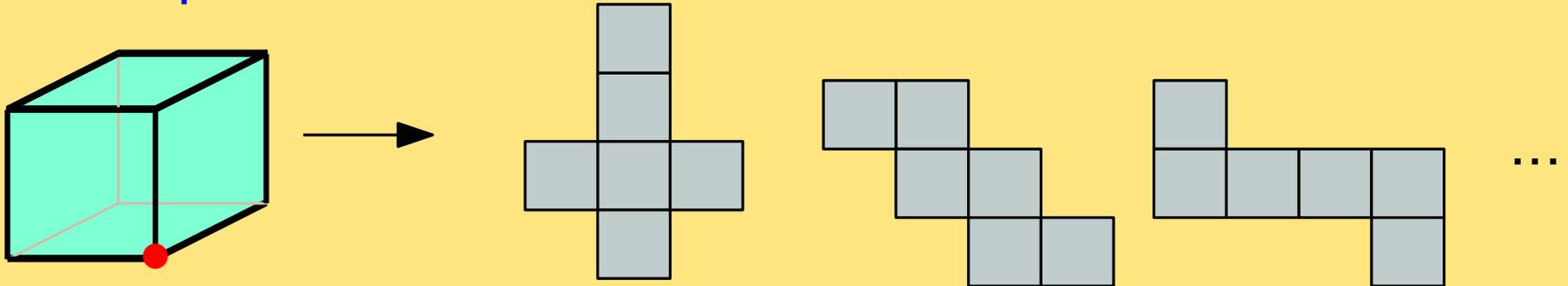


mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte

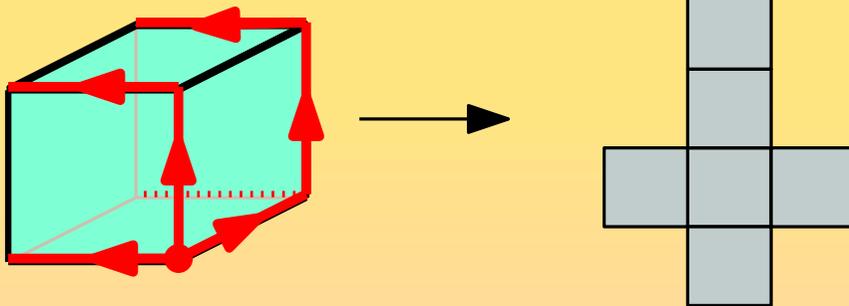


Les algorithmes de parcours

À une carte sont associés de nombreux patrons...



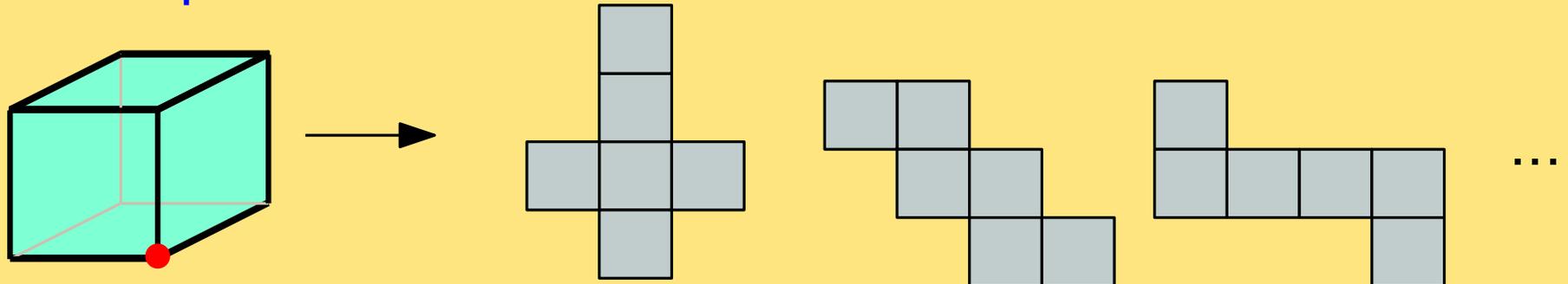
mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte



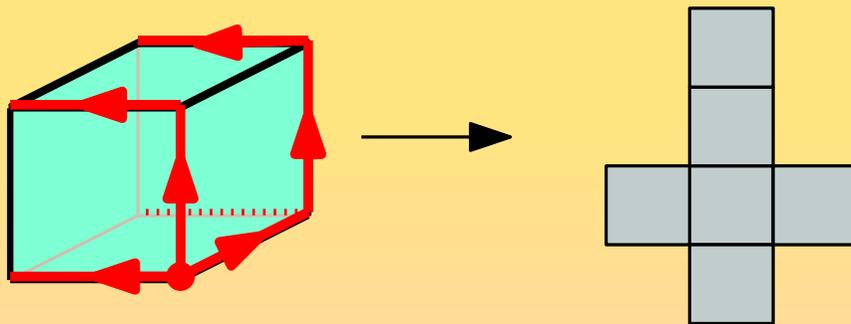
Représenter les cartes par une structure arborescente!

Les algorithmes de parcours

À une carte sont associés de nombreux patrons...



mais un algorithme de parcours donné associe un patron à chaque carte



Représenter les cartes par une structure arborescente!

algo de parcours \Rightarrow bijection, mais, ensemble des patrons utilisés ?

les patrons valides se décrivent mieux que les arbres de parcours

Un énoncé

Affirmation

à chacune des principales familles de cartes est associée un algorithme de parcours classique (en largeur, en profondeur, de Schnyder...) pour lequel le découpage donne des patrons *context-free*.

énoncé englobant une série de résultats "cohérents" :

- Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, S. 1997, Marcus 1998, Bousquet-Mélou-S. 1999, Poulalhon-S. 2003, Bouttier-di Francesco-Gitter 2004, Fusy 2005, Bernardi 2006...

Un énoncé

Affirmation

à chacune des principales familles de cartes est associée un algorithme de parcours classique (en largeur, en profondeur, de Schnyder...) pour lequel le découpage donne des patrons *context-free*.

énoncé englobant une série de résultats "cohérents" :

- Cori-Vauquelin 1984, Arquès 1987, S. 1997, Marcus 1998, Bousquet-Mélou-S. 1999, Poulalhon-S. 2003, Bouttier-di Francesco-Guitter 2004, Fusy 2005, Bernardi 2006...

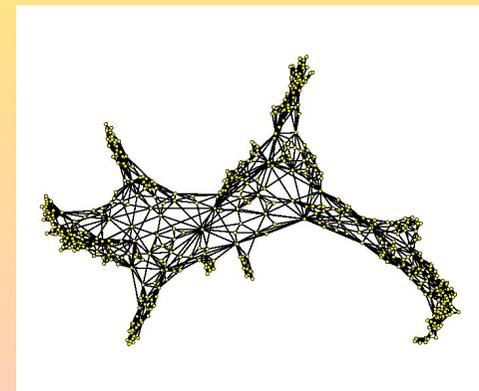
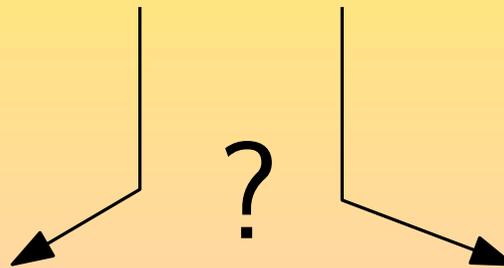
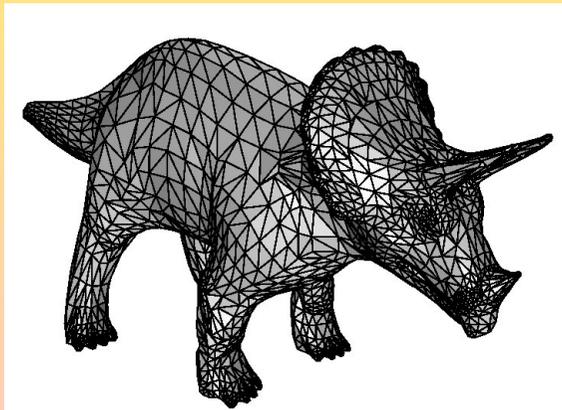
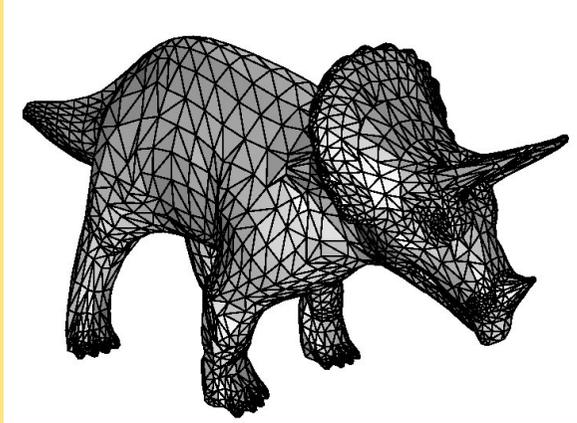


Illustration I: compression de maillages

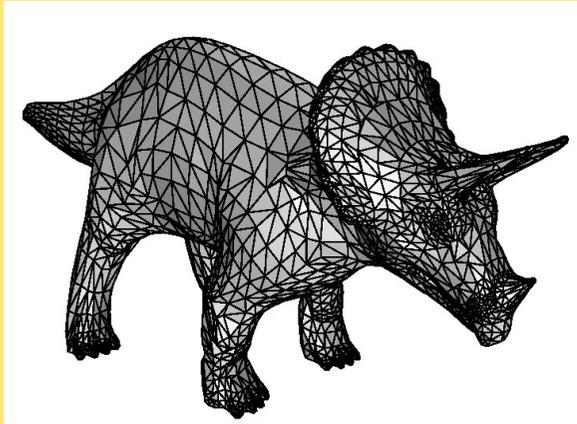
Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

Illustration I: compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie →

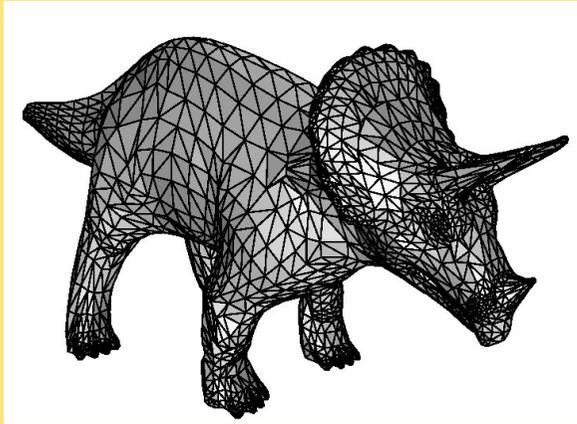
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire →

carte (224 bits/arêtes)

Illustration I: compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie →

coordonnées (32 bits/arêtes)

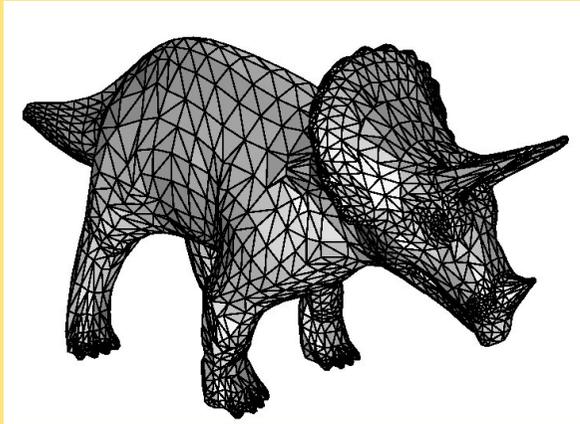
combinatoire →

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

Illustration I: compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

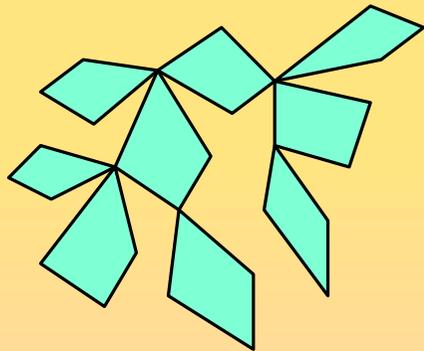
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

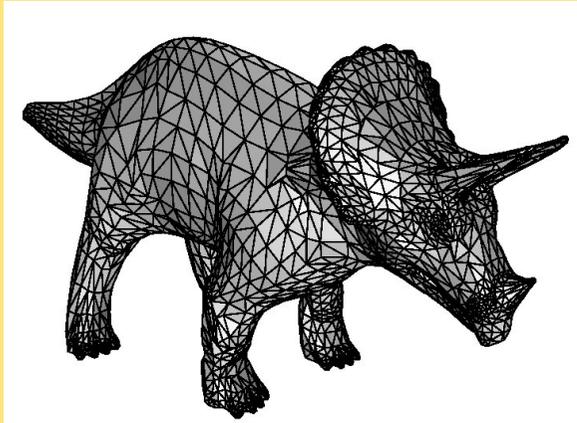
parcours
et découpage



patron valide

Illustration I: compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

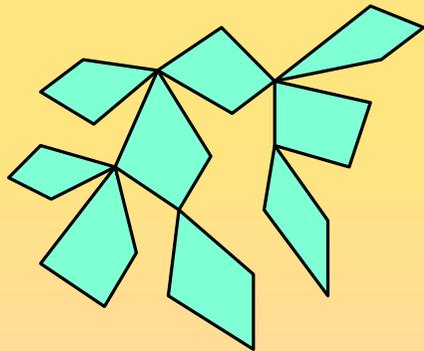
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

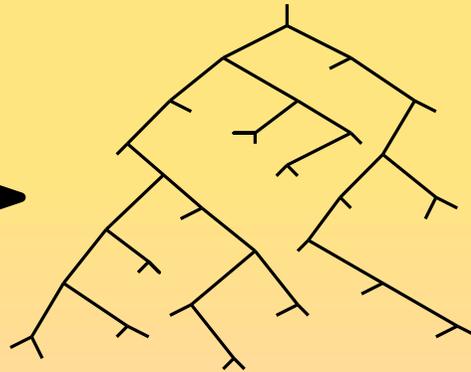
parcours
et découpage



patron valide

simplification

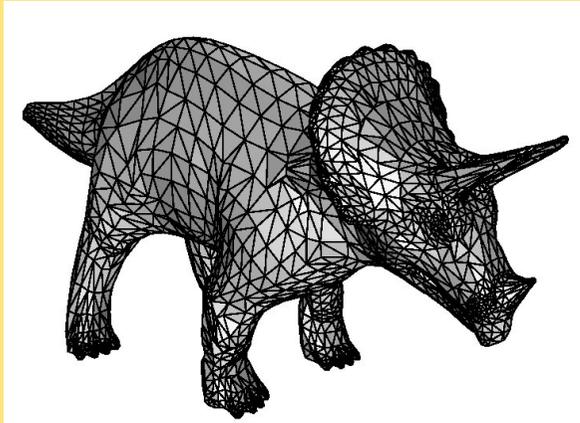
≈ 1-to-1



arbre binaire quelconque

Illustration I: compression de maillages

Maillages = carte combinatoire + coordonnées des sommets



maillage polygonal

géométrie

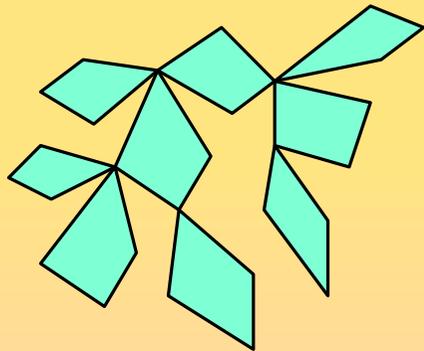
coordonnées (32 bits/arêtes)

combinatoire

Compresser ! (Rossignac et al. 90's)

carte (224 bits/arêtes)

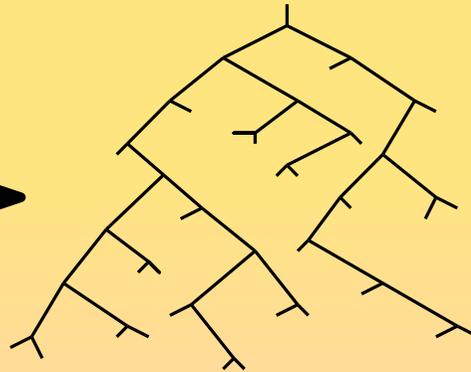
parcours
et découpage



patron valide

simplification

≈ 1-to-1



arbre binaire quelconque

code préfixe

≈ 1-to-1

```
1110100101100011001111
1000100101001000011110
0010101001001011000110
1100100101001010010100
001001001010001000000
```

code optimal
de la carte
2 bits/arêtes

Illustration II: "géométrie quantique"

- physique stat "classique": sur réseau carré
- physique stat + gravité quantique 2d
rendre la géométrie aléatoire
⇒ la distribution uniforme sur les cartes

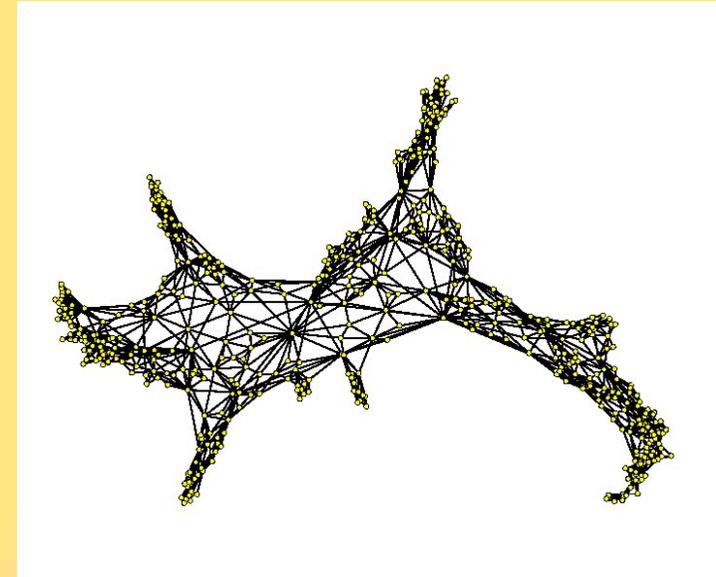
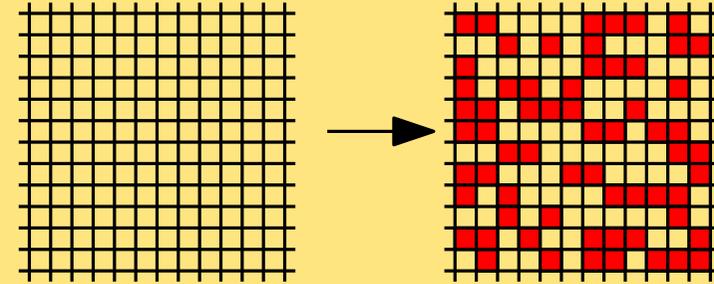
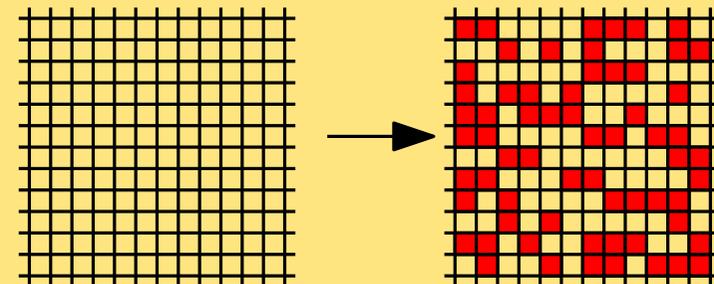


Illustration II: "géométrie quantique"

- physique stat "classique": sur réseau carré
- physique stat + gravité quantique 2d
rendre la géométrie aléatoire
⇒ la distribution uniforme sur les cartes



→ Étude énumérative des cartes via des intégrales de matrices et leurs développements perturbatifs (Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber 78)

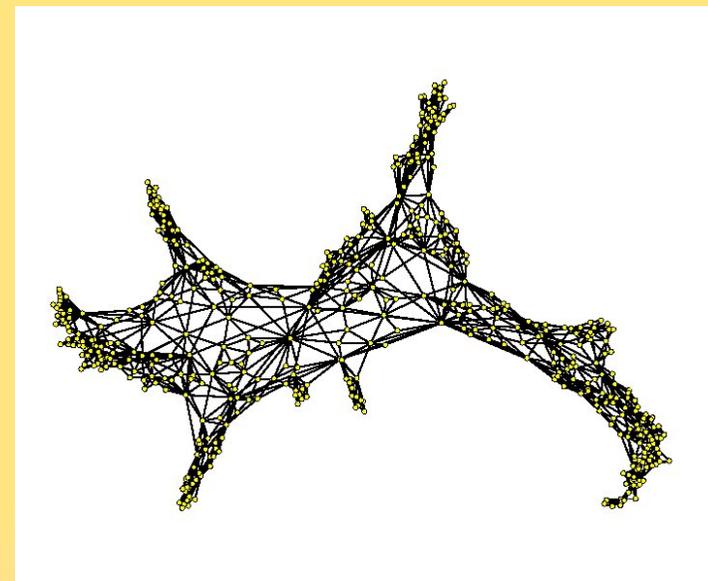
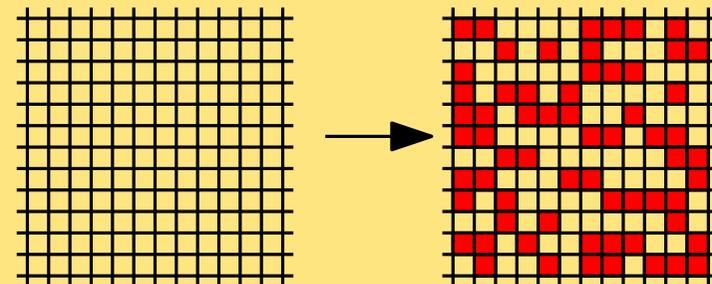


Illustration II: "géométrie quantique"

- physique stat "classique": sur réseau carré
- physique stat + gravité quantique 2d
rendre la géométrie aléatoire
⇒ la distribution uniforme sur les cartes



→ Étude énumérative des cartes via des intégrales de matrices et leurs développements perturbatifs (Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber 78)

On veut comprendre la géométrie intrinsèque de ces surfaces (distance au sens des graphes)

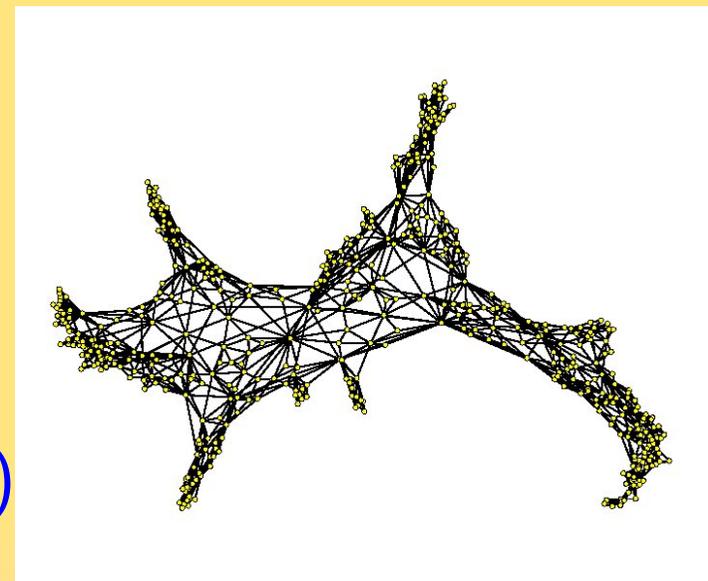
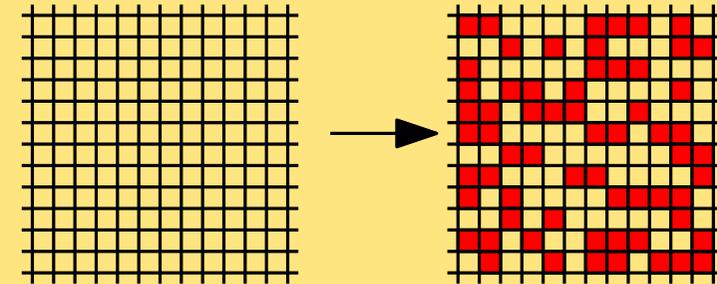


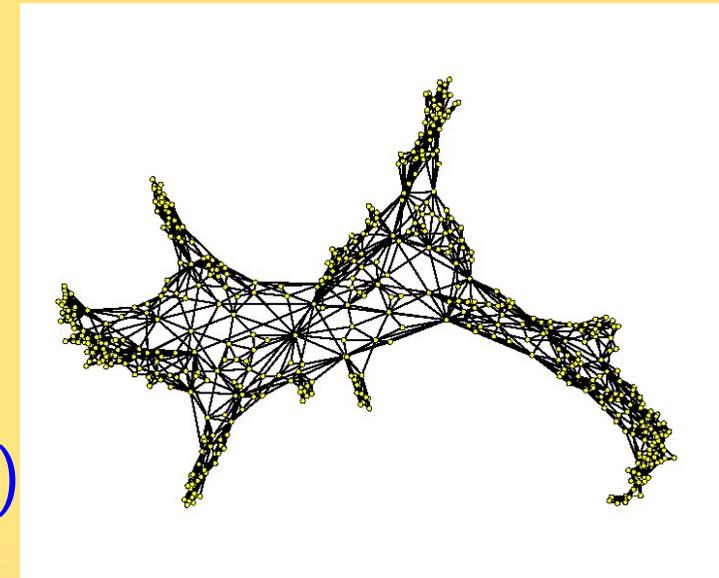
Illustration II: "géométrie quantique"

- physique stat "classique": sur réseau carré
- physique stat + gravité quantique 2d
rendre la géométrie aléatoire
⇒ la distribution uniforme sur les cartes



→ Étude énumérative des cartes via des intégrales de matrices et leurs développements perturbatifs (Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber 78)

On veut comprendre la géométrie intrinsèque de ces surfaces (distance au sens des graphes)

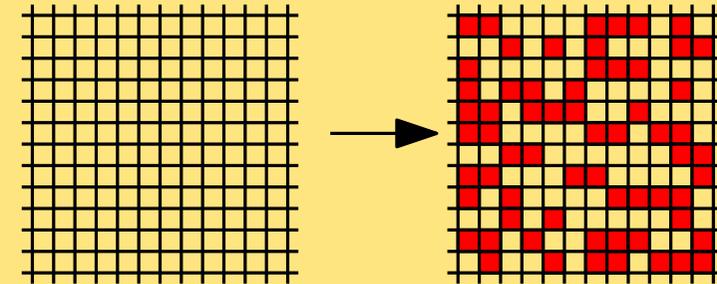


le parcours en largeur calcule la distance au point base

⇒ lire les distances sur le patron associé au parcours en largeur

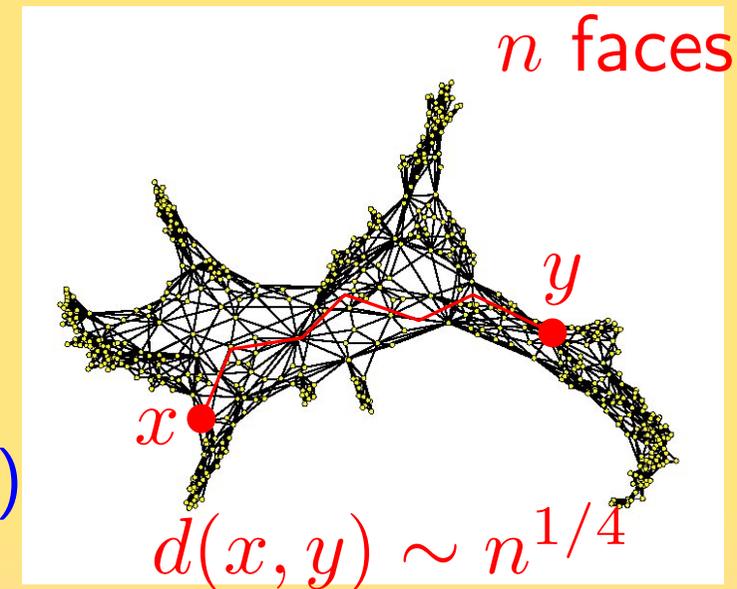
Illustration II: "géométrie quantique"

- physique stat "classique": sur réseau carré
- physique stat + gravité quantique 2d
rendre la géométrie aléatoire
⇒ la distribution uniforme sur les cartes



→ Étude énumérative des cartes via des intégrales de matrices et leurs développements perturbatifs (Brezin, Itzykson, Parisi, Zuber 78)

On veut comprendre la géométrie intrinsèque de ces surfaces (distance au sens des graphes)



le parcours en largeur calcule la distance au point base

⇒ lire les distances sur le patron associé au parcours en largeur

→ dimension de Hausdorff des cartes planaires

convergence de la metrique des grandes cartes (Le Gall-Paulin'07)

Conclusion

arbres

cartes

arbres

formes fondamentales

cartes

Conclusion

mots

permutations **arbres**

formes fondamentales

cartes

matrices

graphes

Conclusion

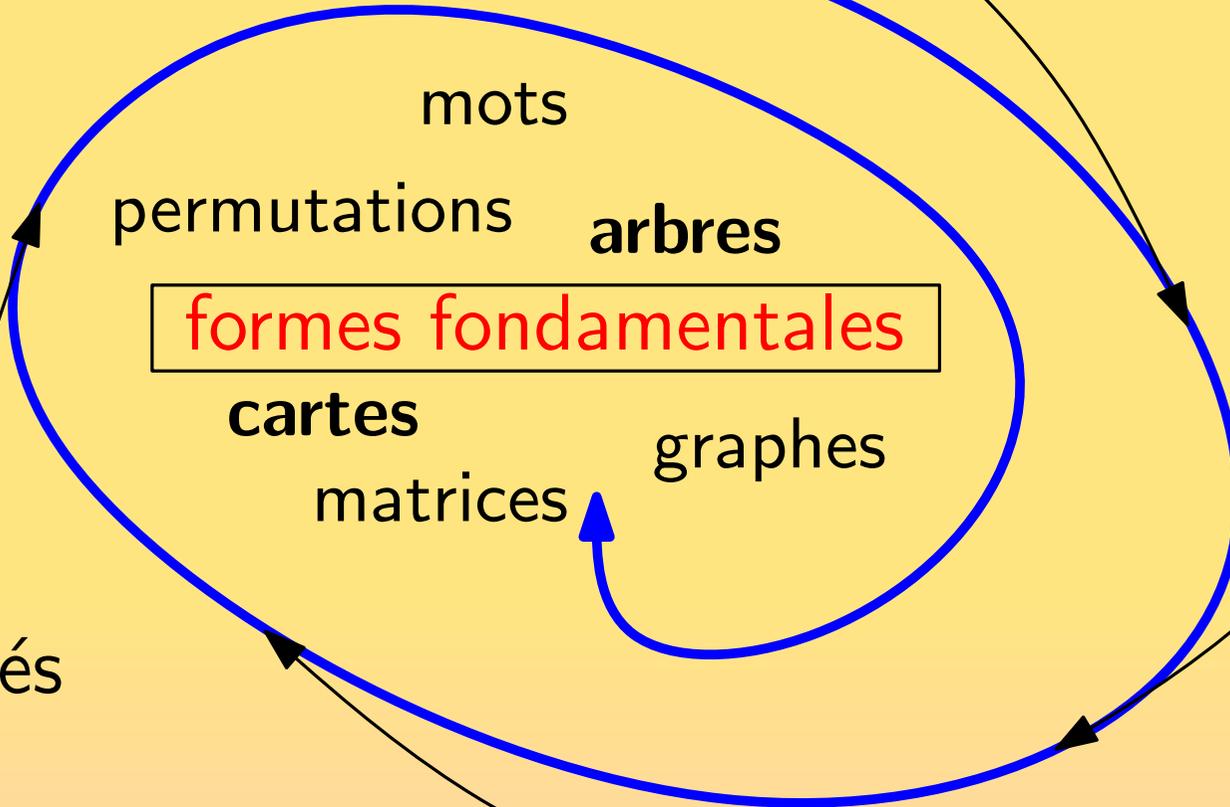
Combinatoire

Algorithmique

Aléa discret

Physique statistique

Probabilités



mots

permutations

arbres

formes fondamentales

cartes

matrices

graphes

Conclusion

Combinatoire

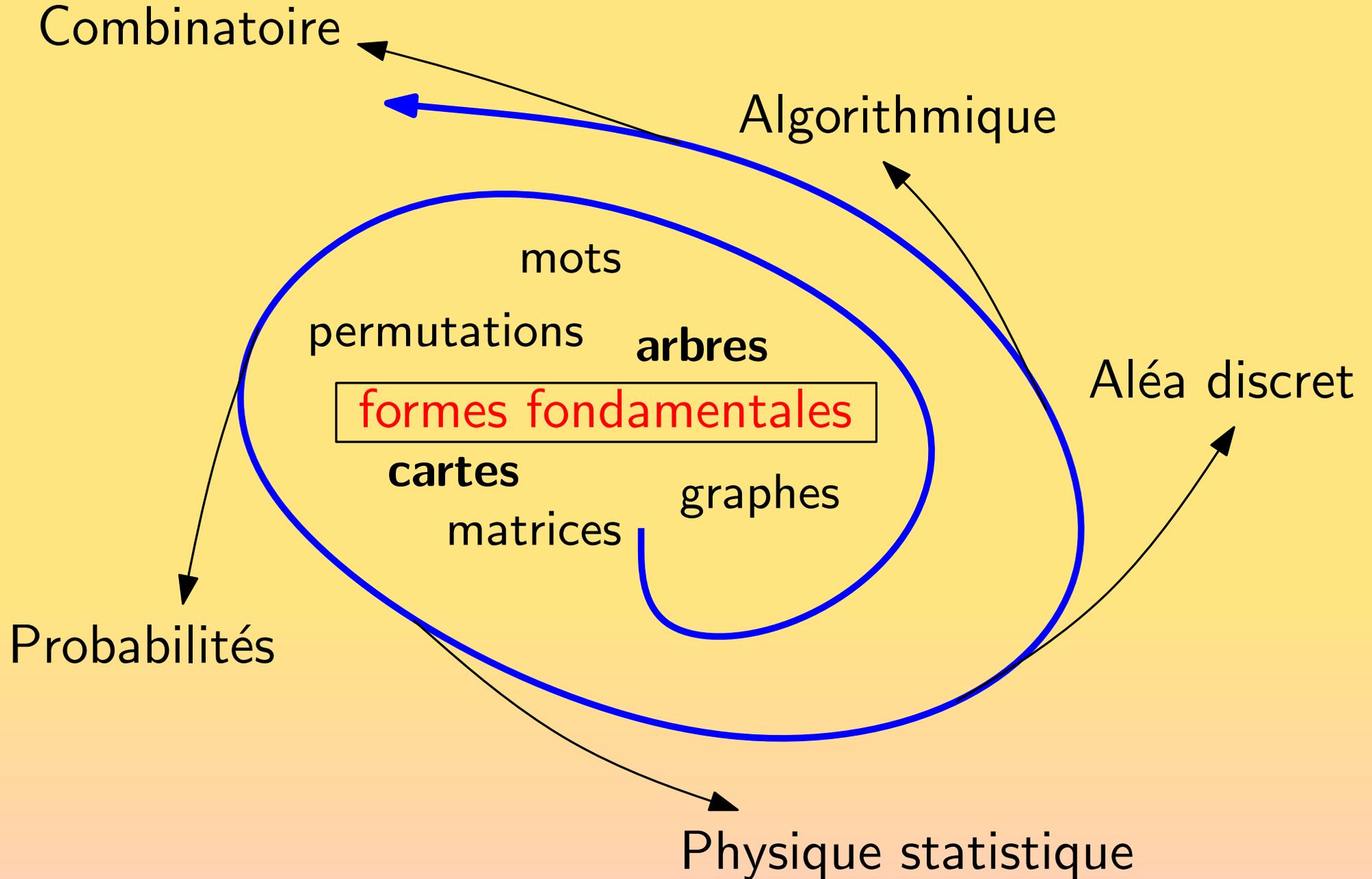
Algorithmique

Aléa discret

Physique statistique

Probabilités

mots
permutations arbres
formes fondamentales
cartes graphes
matrices



Merci de votre attention !