N° d'ordre : 2001

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Par **Gilles SCHAEFFER**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Conjugaison d'arbres
et
cartes combinatoires aléatoires

Soutenue le jeudi 3 décembre 1998

Après avis de MM.	Philippe Flajolet,	Directeur de recherche	Rapporteurs
	David M. Jackson,	Professeur	
	Antonio Machí,	Professeur	

Devant la commission d'examen formée de MM.

Xavier Viennot,	Directeur de recherche	Président
Bernard Chazelle,	Professeur	Examinateurs
Philippe Flajolet,	Directeur de recherche	
Michel Habib,	Professeur	
Jean-Marc Steyaert,	Professeur	
Alexandre Zvonkin,	Professeur	Rapporteur
Robert Cori,	Professeur	Directeur

— 1998 —

à Robert

En tout premier lieu, vient Robert Cori. Pour dire tout ce qu'il m'a apporté, toute ma gratitude, il faudrait un interminable inventaire à la Prévert. Malheureusement cette sorte d'énumération n'est pas combinatoire, aussi me limiterai-je à dire que j'apprécie profondément son enthousiasme joyeux et communicatif, l'éclectisme de ses intérêts et notre amitié. Les heures passées en sa compagnie ont été agréables et étonnantes, elles m'ont marqué et appris bien plus que toute autre forme d'enseignement. Son influence transparaît, en filigrane de tout mon travail.

Philippe Flajolet, David Jackson et Antonio Machí m'ont fait très plaisir en acceptant de lire mon manuscrit. Je les en remercie, ainsi que Bernard Chazelle, Michel Habib, Jean-Marc Steyaert, Xavier Viennot et Sacha Zvonkin qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury.

Une partie de ma recherche a été menée au Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique. Je suis particulièrement reconnaissant à Jean-Marc de m'y avoir accueilli, et d'être toujours resté disponible et de bon conseil. Je salue les nombreux stagiaires, thésards et scientifiques du contingent, ainsi qu'Évelyne et les habitués des repas d'avant-midi dont la compagnie m'a donné le courage de monter régulièrement la terrible côte de Palaiseau dés le matin. Je pense particulièrement à Benjamin, dont la gouaille extraordinaire reste indissociable de mes premières recherches. Depuis son départ pour les hautes sphères financières, la relève est heureusement assurée, grâce à Dominique et son inimitable style épistolaire. Je suis heureux d'avoir pu continuer avec elle le travail entamé avec Alain et présenté au dernier chapitre de cette thèse.

Je suis encore émerveillé d'avoir trouvé d'emblée un appartement qui me convienne à Bordeaux. C'est là le premier d'une longue liste de bienfaits parfois chocolatés que je dois à Mireille depuis mon arrivée, auxquels s'ajoute notre collaboration dont est issu le troisième chapitre de cette thèse. Béni soit le sommeil des gentilles lionnes et des pygmées ! Quant à Bétréma, même s'il se trompe sur ma conception du monde, je lui suis reconnaissant de la foi qu'il met dans les petits nouveaux. Merci aussi à Pierre, à Philippe et à tous ceux dont l'entrain fait passer les pires exploits du chef ou du RU pour des repas dignes de ce nom. Grâce à Benoît et Hélène et à la cafetière de l'afodib (ou assimilée), j'ai pu connaître très rapidement bon nombre de squatters du LaBRI. Leur bonne humeur a été un agréable soutien. Je suis gré aussi à Michel Marcus, entre autres choses de la gentillesse avec laquelle il accepte les retards incessants que ma rédaction a fait prendre à nos projets. Enfin je veux louer la gentillesse et la patience de Sacha ; je crains de n'avoir jamais fini de lui poser des questions. J'associe à ces remerciements tous les membres du LaBRI qui ont partagé un peu de leur science ou de leur temps avec moi.

Je veux encore remercier Michel Pocchiola, qui a su donner un sens à la notion de tutorat, et Dominique Foata qui m'a gentiment accueilli à Strasbourg et donné un goût immodéré pour l'inversion de Lagrange. Enfin, si je suis retourné plusieurs fois au LaCIM, c'est qu'Alain, Christophe, Pierre et Srecko m'ont, chacun à leur manière, donné le goût des séjours outre atlantique. La chaleur de l'accueil montréalais n'est pas une légende.

Je n'oublie pas tous ceux et celles qui aiment les patates aux lardons ou qui sont trop gentilles. Puisque j'en suis à ma thèse, je pense particulièrement à Alexis, Gaël et Sylvie, qui ont chacun accepté l'une ou l'autre fois d'avoir un peu maille à partir avec elle.

Pour finir, merci à mes parents et à mon frère pour leur confiance et leur soutien indéfectibles.

Table des matières

Introduction

La notion de carte planaire se trouve, à l'instar de tout objet mathématique intéressant, à la croisée des chemins de théories *a priori* sans rapport. Comme formalisme adéquat à l'étude topologique des plongements de graphes dans les surfaces, les cartes sont naturellement à la base de la théorie des graphes topologiques. Comme codage efficace de l'information topologique sous-jacente à toute représentation géométrique, leurs versions combinatoires apparaissent dans divers aspects de l'informatique graphique, en particulier pour les dessins effectifs de graphes.

Il est peut-être plus surprenant que ces objets soient au centre d'une branche complète de la physique statistique, sous le nom de *surfaces aléatoires* [31, 57] ; ainsi l'étude de transitions de phases dans des milieux bidimensionnels utilise, entre autres techniques, la *discrétisation* des surfaces qui consiste à remplacer les surfaces continues (sur lesquelles la mesure de probabilité est très difficile à étudier) par des surfaces *discrètes*, qui sont exactement les cartes (quand le nombre de faces tend vers l'infini on approche le cas continu).

Pour les mathématiciens, les cartes sont plus connues sous le nom de *dessins d'enfants*. Cette terminologie est issue de *l'esquisse d'un programme* dans laquelle A. Grothendieck [82, 126] propose l'étude du groupe de Galois absolu de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ au moyen de concepts élémentaires, *si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant* (avec l'aplomb habituel du mathématicien parlant des concepts qu'il manipule tous les jours). Les rapports entre cartes et revêtements de sphères, déjà implicitement présents dans les travaux d'Hurwitz à la fin du siècle dernier, sont enrichis dans cette théorie par des aspects algébriques et arithmétiques. Dans ce domaine, la théorie est soutenue par l'étude expérimentale des petits dessins, et fait l'objet d'interactions fructueuses entre l'algorithmique, les groupes et les dessins de graphes [56, 156].

Plus généralement la planarité est un concept important de l'algorithmique des graphes. De très nombreux problèmes bénéficient pour cette classe de graphes de solutions bien plus efficaces que celle des graphes généraux. Et le plus souvent, pour tirer parti de la planarité, ces algorithmes commencent par construire une carte planaire (ou plus insidieusement par la supposer donnée). Paradoxalement en effet, les cartes, *a priori* plus complexes que les graphes, sont plus simples à bien des égards lorsqu'on s'intéresse à la planarité. Ce paradoxe n'en est d'ailleurs pas vraiment un, puisque *les cartes planaires contiennent la description de leur planarité*, par opposition aux graphes planaires, pour lesquels le plongement se contente *d'exister*. C'est en partant de ce constat que différents auteurs, en particulier W.T Tutte, ont étudié les propriétés combinatoires des cartes avec en point de mire une preuve du théorème des quatre couleurs. S'ils ne sont pas parvenus à ce résultat, ils ont contribué à développer l'étude de plusieurs aspects des cartes planaires.

William T. Tutte a ainsi indéniablement posé les bases de la théorie énumérative des cartes planaires au début des années soixante dans une série d'articles qui se regroupent sous le titre générique de «A census of … » [136, 135, 137, 139]. Ces articles sont novateurs par les techniques combinatoires mises en œuvre. Non contentes d'être particulièrement élégantes, ces contributions tranchent avec l'absence de résultats qui caractérise, encore aujourd'hui, les problèmes d'énumération de graphes et plus particulièrement de graphes planaires. Ce désarroi de l'énumérateur devant les graphes planaires pourrait ne concerner que son amour propre, s'il ne cachait une profonde méconnaissance des propriétés statistiques des graphes planaires. En effet, si leurs propriétés extrémales sont très étudiées et assez bien connues, il n'y a quasiment aucune contrepartie planaire aux milliers de pages qui traitent de l'étude des graphes (généraux) aléatoires (voir [25] ou [103]). Suivant l'idée développée plus haut, il est alors naturel d'attaquer le problème *via les cartes planaires*. On obtient ainsi des propriétés statistiques des graphes pour la distribution biaisée mais naturelle du nombre de plongements planaires. Notons au passage que lorsque les graphes considérés sont 3-connexes, le théorème de Whitney nous donne essentiellement l'unicité du plongement planaire et la distribution n'est même plus biaisée. Nous nous plaçons dans cette optique.

Les propriétés statistiques des cartes ont été continûment étudiées depuis les articles fondateurs de W.T. Tutte. L'approche initiale de cet auteur, basée sur des décompositions combinatoires associées à l'usage de séries génératrices a largement fait ses preuves [34, 142, 144, 32, 33, 117, 150, 68, 30]. Combinée aux techniques d'analyse asymptotique, sous l'impulsion de E.A. Bender *et al.*, elle a permis d'étendre l'étude aux cartes de genre supérieur [17, 13, 12]. Lorsque les résultats exacts sont trop difficiles à obtenir ou à utiliser, ces techniques permettent de dégager des comportements asymptotiques. C'est ainsi qu'ont été données de nombreuses confirmations de *l'hypothèse d'universalité* qui décrit la dépendance des nombres asymptotiques de cartes en fonction du genre de la surface de plongement [8, 67]. Certains paramètres combinatoires peuvent être étudiés par ce bais [153, 89, 10, 15]. Néanmoins ces méthodes ne s'appliquent qu'à certaines statistiques, compatibles avec les décompositions de W.T. Tutte.

Coder les cartes en termes de permutations (voir [38, 40] et les références données là) permet de relever certains aspects du problème dans un contexte algébrique : l'énumération des cartes est ramenée au calcul de certaines *constantes de structure*, c'est-à-dire à l'étude des factorisations d'une permutation en produits de permutations de types cycliques donnés. Les élégants résultats en termes des caractères du groupe symétrique qui peuvent être obtenus ainsi s'étendent aux *constellations*, orientables ou non, comme l'ont montré I.P. Goulden et D.M. Jackson [96, 93, 92, 75, 74]. Ces résultats d'énumération, qui ont trouvé des applications profondes et surprenantes [86, 70, 94] restent cependant intrinsèquement limités aux familles de cartes définies par les (quelques) propriétés qui se traduisent facilement en termes algébriques. De plus l'usage des caractères du groupe symétrique handicape lourdement les calculs qu'il faut mener pour la détermination explicite des constantes de structure. Ceci amène à rechercher des expressions explicites alternatives.

Par ailleurs, les codages en termes de permutations sont les outils incontournables de la manipulation algorithmique des cartes. Les bibliothèques d'algorithmes de graphes qui traitent des problèmes de planarité et de plongement en font systématiquement usage [104, 46].

Les modèles de matrices aléatoires sont les outils de la technique assez souple qu'utilisent les physiciens statisticiens, pour lesquels comme on l'a dit, les cartes sont des *graphes sur surfaces aléatoires*. Une vaste littérature leur est consacrée dont l'accès est rendu difficile par de grandes différences de terminologie. Pourtant les résultats, qui sont principalement de nature asymptotique, rejoignent ceux de la combinatoire énumérative, en particulier au niveau de l'hypothèse d'universalité mentionnée plus haut, de même que les techniques, qui font appel à l'analyse. Un effort d'adaptation commence à se faire jour de part et d'autre (cf. [23, 155, 91, 94]) qui laisse penser que les interactions avec ce domaine vont se développer rapidement.

L'approche bijective consiste à rechercher des bijections et des codages avec des objets simples, en particulier des arbres ou des mots. Comme l'a souvent montré X. Viennot [147], cette approche, bien que difficile à mettre en œuvre, peut donner lorsqu'elle aboutit des résultats très esthétiques. En restant très près de la structure, elle débouche aussi en général sur des propriétés constructives des objets. Dans le domaine des cartes planaires, les premiers résultats ont été obtenus par R. Cori *et al.* sous l'impulsion de M.P. Schützenberger [38, 42, 43, 4] et ont permis de coder les cartes par des arbres étiquetés. Les preuves bijectives de résultats d'énumération ont aussi souvent l'avantage de conduire à des algorithmes de tirage au hasard.

La génération aléatoire, qui a pris un grand essor ces dernières années, permet l'analyse expérimentale de statistiques autrement inaccessibles ; on tire au hasard un grand nombre d'objets choisis uniformément parmi les objets de même taille, et on mesure les paramètres intéressants. Des modèles statistiques permettent alors d'en déduire des informations sur le comportement probable de ces paramètres. La génération aléatoire permet aussi de tester la complexité pratique d'algorithmes. Les rares algorithmes de génération aléatoire qui apparaissent dans la littérature ou dans les bibliothèques d'algorithmique des graphes ne permettent pas d'obtenir (même à peu près) uniformément des graphes planaires de plus de quelques centaines d'arêtes. De plus, même dans ces domaines de taille, ces algorithmes restent en général assez lents (voir [49] par exemple). La seule exception notable est un algorithme quadratique pour les cartes planaires [48], basé sur le codage par les arbres étiquetés évoqué ci-dessus. Cet algorithme reste limité à une famille particulière de cartes et ne permet pas de dépasser quelques milliers d'arêtes.

NOTRE CONTRIBUTION se situe principalement dans le cadre de l'approche bijective. Nous revenons sur les résultats de codage de cartes en termes d'arbres étiquetés pour en donner une nouvelle présentation car ils permettent de ramener l'étude des cartes de genre supérieur à celle des cartes étiquetées à une face. Cependant ces arbres et cartes étiquetés ne sont pas encore des structures suffisamment simples pour donner une explication complète de la surprenante élégance des formules de W.T. Tutte. Dans ce but nous introduisons *la conjugaison d'arbres*, qui nous permet de donner des interprétations en termes d'arbres plans élémentaires comme les arbres binaires ou ternaires complets. Les techniques que nous employons sont, là encore, réminiscentes des idées de M.P. Schützenberger sur l'utilisation des mots pour le codage des structures combinatoires. Notre approche nous permet de dénombrer les constellations planaires : nous étendons ainsi simultanément les formules de W.T. Tutte pour les cartes et un théorème d'Hurwitz sur l'énumération des revêtements de la sphère. Outre son côté esthétique qui a sans doute servi de moteur à notre recherche, la conjugaison d'arbres donne des informations structurelles sur les cartes. Par exemple, nous l'utilisons pour établir une borne sur le diamètre moyen des cartes. De plus les codages en termes de mots qui découlent de nos bijections donnent un moyen simple de tirer des cartes au hasard.

À l'aide de la conjugaison d'arbres nous obtenons une première famille d'algorithmes de génération aléatoire pour quelques familles de cartes planaires. Nos algorithmes ont une complexité linéaire et permettent d'obtenir «instantanément» des cartes représentatives avec plusieurs centaines de milliers de sommets. Dans un second temps, en introduisant *le tirage par extraction/rejet*, nous obtenons des algorithmes pour de nombreuses familles intéressantes. En particulier les tirages des graphes 3-connexes (graphes de polyèdres convexes) à nombre de sommets et arêtes fixés, ou des graphes 4-connexes maximaux planaires (graphes de triangulations convexes irréductibles) couronnent nos efforts. Ces algorithmes doivent pour fonctionner efficacement être *accordés* (au sens musical du terme). Cette opération nécessite une bonne connaissance de la *taille du noyau* d'une carte. Heureusement, ce paramètre combinatoire entre dans la catégorie évoquée ci-dessus des paramètres compatibles avec les décompositions de W.T. Tutte. Nous présentons donc une étude détaillée de sa distribution limite en utilisant des techniques analytiques. Enfin nous utilisons les générateurs pour compléter expérimentalement nos statistiques.

Sur les surfaces de genre plus élevé que la sphère, une fois démontré le résultat de réduction aux cartes étiquetées à une face, nous étudions principalement les cartes et constellations à une face. À l'aide des codages par permutations nous présentons pour l'énumération de ces cartes une formule qui unifie différents résultats présents dans la littérature. L'originalité de cette contribution réside principalement dans l'association de l'approche algébrique avec les méthodes bijectives.

En conclusion, cette thèse s'appuie sur différentes approches, bijective, analytique et, dans une moindre mesure, algébrique pour étudier les cartes. L'introduction en particulier de la notion de conjugaison d'arbres, mais aussi de différentes autres techniques bijectives, est notre outil central. Il nous permet à la fois d'obtenir de nouveaux résultats d'énumération et d'en convertir d'autres, déjà connus, en algorithmes performants. Nos programmes de génération aléatoire sont destinés à rejoindre la bibliothèque d'algorithmique des graphes planaires développée à l'ÉHÉSS [46]. Ils doivent permettre l'évaluation et la comparaison des performances pratiques de différentes approches, par exemple pour les tests de planarité. Ils ouvrent aussi des perspectives d'études expérimentales des paramètres des cartes et graphes planaires.

Résumé

Cette thèse est constituée d'un chapitre préliminaire, suivi de deux parties. La première est consacrée aux cartes planaires et chemine à travers trois chapitres de combinatoire énumérative pour déboucher au chapitre cinq sur des algorithmes de génération aléatoire de graphes planaires et de polyèdres convexes. La seconde retourne à l'énumération pour des cartes plongées dans des surfaces de genre supérieur.

Le chapitre préliminaire introduit *les cartes* ou plongements d'un graphe connexe dans une surface, au travers des méthodes de W.T. Tutte pour l'énumération des cartes planaires enracinées.

Le deuxième chapitre donne une lecture nouvelle des résultats de W.T. Tutte, à l'aide de *la conjugaison d'arbres* (section 2.1). Cette méthode originale de codage et d'énumération des cartes, s'étend *aux constellations planaires* pour englober au troisième chapitre (fruit d'une collaboration avec Mireille Bousquet-Mélou) un résultat d'A. Hurwitz sur l'énumération de revêtements de la sphère (section 3.1).

Le quatrième chapitre concerne *la taille du noyau* d'une carte planaire. Nous étendons un résultat de E.A. Bender *et al.*, d'abord en montrant que la distribution que ces auteurs ont étudiée sur un exemple est commune à de nombreux types de noyaux, puis en en proposant un analogue à deux variables (section 4.1). Nous obtenons aussi *une borne sur le diamètre moyen* que nous complétons par des données expérimentales (section 4.5).

Le cinquième chapitre introduit *le tirage par extraction-rejet*. Combinée avec les trois chapitres précédents, cette nouvelle méthode donne *des algorithmes de tirage aléatoire uniforme efficaces*, en particulier pour les graphes planaires 3- et 4-connexes, (*i.e.* polyèdres et triangulations convexes) (section 5.4).

La seconde partie débute au chapitre six par une bijection (obtenue avec Michel Marcus) entre cartes et cartes étiquetées à une face de même genre (appelées g-arbres). Le reste de cette thèse est alors consacré à ces g-arbres, qui généralisent les arbres plans usuels. Au chapitre six figure encore une approche nouvelle d'une récurrence de J. Harer et D. Zagier et une extension d'un résultat de A.B. Lehman.

Finalement le septième chapitre (issu d'une collaboration avec Alain Goupil et Dominique Poulalhon) est consacré à un mariage original entre les approches algébriques et bijectives, qui donne des formules complexes mais très générales pour l'énumération des g-arbres. En termes (équivalents) de permutations nous donnons une formule pour le nombre de factorisations d'un cycle maximal en produit de permutations de type cyclique fixés (section 7.1). Ainsi sont unifiés les différents résultats connus sur ce problème.

Chapitre 1

Premiers pas autour des cartes

Ce chapitre est consacré à introduire les cartes et à amorcer leur étude. Pour cela, après avoir donné quelques définitions, propriétés et outils fondamentaux (sections 1.1, 1.2 et 1.4), nous nous livrons à une relecture rapide des travaux de W.T. Tutte sur l'énumération des cartes (sections 1.3 et 1.5).

1.1 Éléments fondamentaux

Dans cette section, nous rappelons rapidement quelques définitions et propriétés des graphes et de leurs plongements dans les surfaces, les cartes. Les notions que nous utilisons sont classiques, voir les livres de C. Berge [20], de W.T. Tutte [145], et de J.L. Gross et T.W. Tucker [81].

1.1.1 Graphes, surfaces et cartes

Nous introduisons la plupart des objets qui nous intéressent au fil du texte, réservant les définitions plus formelles à une ou deux notions clefs. Nous ne nous attardons pas au début sur des notions que nous considérons comme classiques[1] : elles n'apparaissent qu'afin de préciser notre usage d'un vocabulaire malheureusement plutôt mouvant...

Graphes et isomorphismes de graphes

Un *graphe* G est formé d'un ensemble fini de sommets V_G et d'un ensemble fini d'arêtes A_G. Chaque arête a a deux *extrémités* qui sont des éléments de V_G, éventuellement identiques. Une arête dont les deux extrémités sont identiques est une *boucle* et un graphe peut contenir plusieurs arêtes ayant les mêmes extrémités, qui sont alors qualifiées de *multiples*.

Un graphe est *simple* s'il ne contient ni boucle ni arêtes multiples. L'usage, dans d'autres textes, est parfois d'appeler graphes nos graphes simples et multigraphes nos graphes. Cependant les boucles et arêtes multiples sont essentielles dans le contexte des plongements de graphes, ce qui motive notre choix (qui est aussi celui de [81] par exemple).

[1] Voir en particulier [81]. Un lecteur observateur de cet ouvrage reconnaîtra en passant l'une ou l'autre figure.

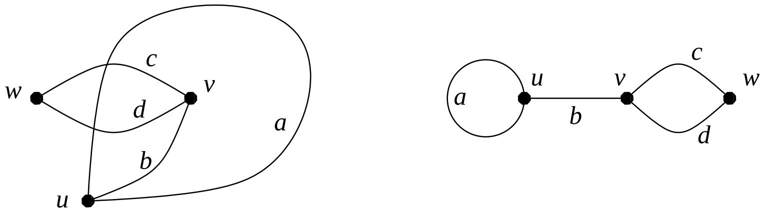


FIG. 1.1: Deux dessins d'un même graphe, avec $V_G = \{u, v, w\}$, $E_G = \{a, b, c, d\}$. Les extrémités de a, b et c sont $\{u, u\}$, $\{u, v\}$ et $\{v, w\}$.

Une arête a est *incidente* à un sommet s si s fait partie des extrémités de a. Nous dirons indifféremment que le sommet s est incident à l'arête a ou que l'arête a est incidente au sommet s. Une boucle a d'extrémité s est incidente deux fois à s. Le *degré* d'un sommet s d'un graphe G est le nombre total d'incidences de s avec des arêtes de G. Rappelons qu'une *partition* d'un entier n est une suite $(\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k)$ d'entiers strictement positifs dont la somme est n. Si un graphe possède n arêtes, alors les degrés de ses sommets forment une partition de $2n$.

Bien que nous ayons donné ici une définition *combinatoire* des graphes, nous ne ferons pas de différence entre ces graphes et des graphes topologiques, fait de points reliés par des arêtes.

Soit G et G' deux graphes. Un *isomorphisme* de graphes est formé d'une bijection de V_G sur $V_{G'}$, et d'une bijection de A_G sur $A_{G'}$ *qui préservent les incidences* (*i.e.* telle que les extrémités de l'image d'une arête de G soient les images des extrémités de cette arête). Deux graphes sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux, cette relation est une relation d'équivalence et les classes d'isomorphisme sont souvent appelées des *graphes non étiquetés*. Un isomorphisme d'un graphe sur lui-même est appelé *automorphisme*. Pour l'opération de composition les automorphismes d'un graphe G forment un groupe, noté $\mathrm{Aut}(G)$ et appelé *groupe d'automorphisme du graphe G*.

Nous ne donnons pas les définitions de *connexité*, *cycle*, *arbre*, etc. pour lesquelles il n'y a pas d'ambiguïté.

Plongements, cartes et cartes enracinées

Nous voulons nous intéresser aux différentes manières de dessiner un graphe dans le plan. Comme on peut traiter chaque composante connexe séparément, *nous ne considérons plus dans la suite que des graphes connexes.*

La figure 1.1 montre ainsi deux dessins d'un même graphe. Le second est plus satisfaisant dans la mesure où les arêtes ne se croisent pas de manière intempestive. Étant donné un graphe G, nous considérerons ses *plongements*, qui sont les dessins de G dans lesquel les arêtes ne se rencontrent qu'au niveau des sommets. Si le graphe G admet un tel plongement dans le plan, on dit que G est *un graphe planaire.*

Nous allons considérer plus généralement les plongements dans une surface compacte et sans bord. Bien entendu le plan n'est pas compact, mais, comme il ne diffère de la sphère que par un point à l'infini, on ne perd rien à considérer des plongements dans la sphère en lieu et place des

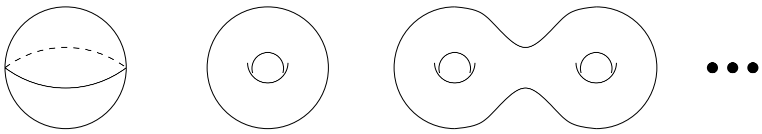


FIG. 1.2: Les surfaces compactes orientables de genre 0, 1 et 2...

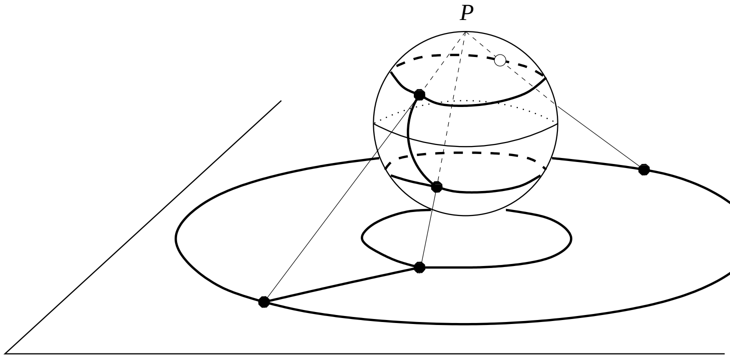


FIG. 1.3: Le plongement planaire d'une carte planaire (*i.e.* sphérique) dépend du choix du pôle P.

plongements dans le plan.

Les surfaces (compactes sans bord) sont complètement classifiées à déformation continue près : la donnée de leur *orientabilité* (orientable ou non) et de leur *genre* (un entier naturel) suffit à les caractériser. En particulier l'unique surface orientable de genre 0 est la sphère, et nous appelons *tore à g trous* l'unique surface orientable de genre g pour $g > 0$. Nous référons pour plus de détails au livre de W.S. Massey [114] et dans la suite *nous ne considérons plus que des surfaces orientables*, bien que tout ce que nous allons dire puisse sans grande difficulté être adapté au cas non orientable.

Le plongement d'un graphe G dans une surface S découpe S en faces : les faces sont les composantes connexes de $S \setminus G$. Un plongement est *cellulaire* si toutes ses faces sont *simplement connexes*, c'est-à-dire si ce sont des déformations continues du disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.1 *Une* carte topologique $C = (G, S, \phi)$ *est un plongement cellulaire ϕ d'un graphe connexe G dans une surface S compacte sans bord, défini à déformation continue près de la surface (orientée) S. Une carte est* planaire *si la surface de plongement est la sphère.*

De même que la frontière des arêtes contient des sommets et définit la relation d'incidence entre sommets et arêtes, la frontière des faces est formée d'arêtes et de sommets, ce qui nous permet de définir la relations d'incidence entre arêtes et faces et entre sommets et faces. Remarquons qu'une arête est toujours incidente à deux faces (éventuellement deux fois la même), mais qu'un sommet et une face peuvent être incidents un nombre arbitraire de fois. Le *degré* d'une face est le nombre d'incidences de cette face avec des arêtes (ou avec des sommets).

La figure 1.4 montre quatre plongements cellulaires planaires d'un même graphe. Remarquons que pour représenter ces plongements (dans la sphère) il nous faut projeter la sphère sur le plan, ce qui se fait par une projection stéréographique (cf. figure 1.3). Cette projection crée une face

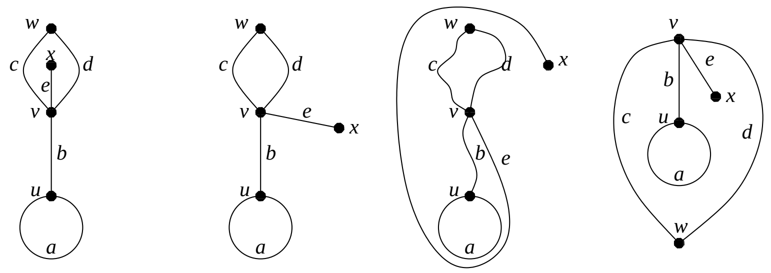


FIG. 1.4: Quatre plongements cellulaires d'un même graphe.

«infinie» pour chaque carte qu'il faut quand même considérer comme simplement connexe. Les deux premiers sont différents : le premier a des faces de degré 1, 4 et 5, alors que le second à des faces de degré 1, 2 et 7. Par contre les trois derniers sont identiques : entre le deuxième et le troisième on a continuement déformé la sphère. Quant au quatrième, il est obtenu en choisissant une autre face infinie pour faire la projection stéréographique.

Nous allons maintenant définir trois variantes des cartes : les cartes non étiquetées, étiquetées et enracinées, en nous appuyant sur la notion d'isomorphisme. Ces notions sont illustrées par la figure 1.5.

Premièrement la définition d'isomorphisme de graphes s'étend immédiatement aux cartes topologiques : deux cartes topologiques $C = (G, S, \phi)$ et $C' = (G', S', \phi')$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme Φ de graphe entre G et G' et une déformation continue Ψ de S en S' tel que $\phi' \circ \Phi = \Psi \circ \phi$. En d'autres termes, ceci revient à dire que les sommets, arêtes et faces de la première carte sont envoyées respectivement sur celles de la seconde carte en respectant les trois relations d'incidence (sommets-arêtes, arêtes-faces, sommets-faces). Les classes d'équivalence pour l'isomorphisme de cartes sont appelées *cartes non étiquetées.*

Un étiquetage (des arêtes) d'une carte (G, S, ϕ) est une application bijective de E_G dans $\{1, \dots, |E_G|\}$. Deux cartes munies d'un étiquetage sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de cartes entre elles qui respecte l'étiquetage. Les classes d'équivalences pour ces isomorphismes sont appelées *cartes étiquetées.*

Enfin, étant donnée une carte (G, S, ϕ), nous pouvons la munir d'une *racine*, *i.e.* choisir une arête et l'orienter. Deux cartes munies d'une racine sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de cartes entre entre elles qui envoie la racine de l'une sur la racine de l'autre. Les classes d'équivalences pour ces isomorphismes sont appelées *cartes enracinées.*

La relation d'Euler sur la sphère, énoncée par Euler dès 1750 relie les nombres de sommets $s(C)$, de faces $f(C)$ et d'arêtes $a(C)$ de toute carte planaire C :

$$s(C) + f(C) = a(C) + 2.$$

Cette formule s'étend aux surfaces compactes sans bord orientées.

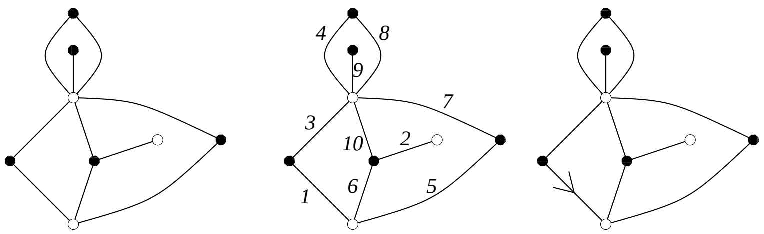


FIG. 1.5: Une carte non étiquetée, une carte étiquetée et une carte enracinée.

Théorème 1.2 (Formule de la caractéristique d'Euler) *La caractéristique d'Euler d'une carte $C = (G, S, \phi)$, définie par*

$$\chi_{\mathcal{E}}(C) = s(C) + f(C) - a(C),$$

ne dépend que du genre g de la surface S :

$$\chi_{\mathcal{E}}(C) = 2 - 2g.$$

On peut vérifier par exemple cette relation sur la carte de la figure 1.5. Le nombre d'arêtes est 10, le nombre de sommets est 8, le nombre de faces est 4. La caractéristique d'Euler est donc 2, en accord avec $g = 0$ pour la sphère.

1.1.2 Permutations et cartes combinatoires

Si les graphes topologiques permettent une visualisation aisée, l'implantation des algorithmes sur les graphes est naturellement plus commode avec les graphes combinatoires qui sont des objets discrets, finis et qui capturent toute l'information structurelle. Nous allons maintenant introduire les *cartes combinatoires* qui jouent le même rôle pour les cartes. Voir [40] pour plus de détails, en particulier sur les propriétés des automorphismes de cartes.

Considérons la carte étiquetée de la figure 1.5. Nous cherchons à caractériser ce plongement particulier du graphe sous-jacent. Remarquons que sur chaque sommet, le plongement induit un ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet. Ce graphe est *biparti i.e.* les sommets sont de deux couleurs et chaque arête joint deux sommets de couleurs distincte. Ainsi chaque arête apparaît une fois et une seule autour d'un sommet blanc. Les sommets blancs définissent donc une permutation des arêtes, $\alpha = (1, 5, 6)(2)(3, 10, 7, 8, 9, 4)$, en notation cyclique. Il en va de même pour les sommets noirs qui définissent une permutation $\beta = (1, 3)(2, 10, 6)(4, 8)(5, 7)(9)$. Ainsi via la permutation β, l'arête 1 est envoyée sur l'arête 3, qui la suit dans le sens direct autour d'un sommet noir. Via la permutation α, cette arête 3 est à son tour envoyée autour du sommet blanc qui la borde sur l'arête 10. Si on recommence avec β, 10 va sur 6 puis avec α, 6 va retombe sur 1. Nous avons fait le tour d'une face. Plus généralement les cycles du produit $\alpha\beta = (1, 10)(2, 7, 6)(3, 5, 8)(4, 9)$ sont en bijection avec les faces de la carte : les étiquettes d'un cycle sont les arêtes qui bordent la face correspondante du sommet noir vers le sommet blanc en sens direct autour de la face[2] et

[2]Attention à la face infinie dont l'orientation est inversée du fait de la projection stéréographique.

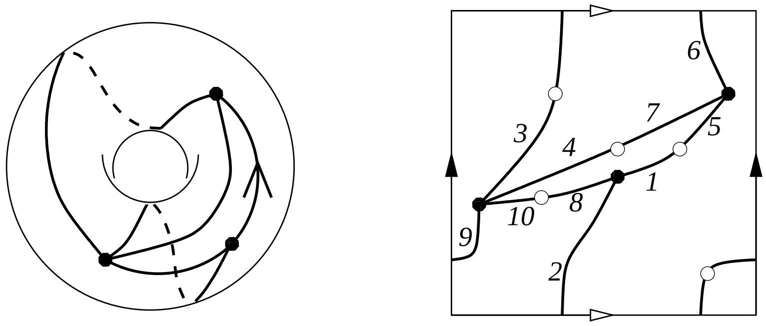


FIG. 1.6: Une carte enracinée sur le tore, et la même étiquetée sur le tore polygonal. La racine correspond au brin 1. Les permutations sont $\alpha = (1,5)(2,3)(4,7)(6,9)(8,10)$ et $\beta = (1,8,2)(3,9,10,4)(5,6,7)$.

une face de degré 2ℓ est associée à un cycle de longueur ℓ. On voit aussi que les déplacements dans la carte se traduisent par l'application de α ou β. Comme la carte est connexe, ceci implique que toute arête i peut être envoyée sur l'arête 1 par une suite d'application de α ou β. Une façon d'énoncer cette propriété est de dire que le sous groupe $\langle\alpha,\beta\rangle$ de $\mathfrak{S}_n$ engendré par α et β (appelé parfois *groupe cartographique*) agit transitivement sur $\{1,\dots,n\}$.

Inversement étant données deux permutations α et β, nous pouvons calculer $\beta\alpha$ et associer à chaque cycle de longueur ℓ de cette permutation un polygone (ou une face) de degré 2ℓ dont la moitié des arêtes sont étiquetées. Puis la permutation α permet de retrouver les étiquettes des autres arêtes autour de chaque polygone. L'identification deux-à-deux de tous les couples de côtés de polygones qui portent la même étiquette ne laisse aucun côté libre. Un peu de topologie générale[3] nous enseigne alors que le résultat de cette opération est une surface compacte sur laquelle est dessinée une carte.

Ceci nous amène à la

Définition 1.3 *Soit n un entier positif et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Soit λ, μ et ν trois partitions de n.*

Une carte combinatoire bipartie *à n arêtes de* distribution $[\lambda,\mu,\nu]$ *est un triplet de permutations (α,β,γ) de $\mathfrak{S}_n$ telles que*

- *le produit $\alpha\beta\gamma$ est égal à la permutation identité,*
- *le sous-groupe $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$ de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les trois permutations α, β et γ agit transitivement sur $\{1,\dots,n\}$.*

La discussion précédente justifie alors le

Théorème 1.4 *Les cartes topologiques étiquetées biparties à n arêtes sont en bijection avec les cartes combinatoires biparties à n arêtes. De plus cette bijection envoie les cartes topologiques dont les degrés des sommets noirs, blancs et des faces sont λ, μ et ν sur les cartes combinatoires de distribution $[\lambda,\mu,\nu]$.*

[3]Voir les beaux dessins de [114, Chapitre 1] ou, pour des références plus spécifiques, [81, Section 3.2]

La restriction aux cartes biparties n'en est pas vraiment une. En effet, les cartes quelconques à n arêtes sont en bijection avec les cartes biparties à $2n$ arêtes dont tous les sommets blancs sont de degré deux : il suffit de considérer le milieu de chaque arête comme un sommet blanc ! Les deux parties de chaque arête ainsi crées sont appelées les *brins*[4] et peuvent être numérotée de 1 à $2n$. Ainsi les cartes topologiques quelconques à n arêtes sont associées aux triplets (α, β, γ) de permutations de $\mathfrak{S}_{2n}$ dans lesquel α est une involution sans point fixe.

Il est bien entendu possible de traduire aussi en termes de permutations les variantes *non étiquetées* et *enracinées*. Nous nous contentons de la seconde qui sera utile. Soit $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $C' = (\alpha', \beta', \gamma')$ deux cartes combinatoires. Un isomorphisme de cartes enracinées de C sur C' est une permutation ϕ des arêtes (ou des brins pour les cartes quelconques) qui laisse fixe l'élément 1 et telle que

$$\begin{aligned} \alpha' &= \phi^{-1}\alpha\phi, \\ \beta' &= \phi^{-1}\beta\phi, \\ \gamma' &= \phi^{-1}\gamma\phi. \end{aligned}$$

En d'autres termes il s'agit d'un réétiquetage des arêtes qui laisse fixe l'arête 1. Les classes d'équivalences pour cette relation d'isomorphisme sont appelées les cartes enracinées, et il est clair que cette notion d'enracinement correspond à celle des cartes topologiques.

Cependant un des premiers résultats que nous permet d'obtenir facilement l'utilisation des cartes combinatoires est le suivant :

Propriété 1.5 *Il y a $(n-1)!$ cartes étiquetées à n brins, isomorphes en tant que cartes non étiquetées à une carte enracinée donnée.*

Démonstration. Les permutations laissant fixe le brin 1 agissent par réétiquetage sur les cartes étiquetées : $\phi \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\phi^{-1}\alpha\phi, \phi^{-1}\beta\phi, \phi^{-1}\gamma\phi)$ et, par définition, les cartes enracinées sont les orbites de cette action. Le nombre de cartes étiquetées correspondant à une carte enracinée donnée est donc le nombre d'éléments de l'orbite associée. Or le cardinal d'une orbite est égal au cardinal du groupe, (*i.e.* $(n-1)!$ puisque 1 est laissé fixe), divisé par le nombre de permutations ϕ telles que $\phi \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Maintenant, si $\phi(1) = 1$ et ϕ commute avec α et β, comme tout i s'envoie sur 1 par une suite d'application de α et β, on a $\phi(i) = i$ pour tout i. □

Pour finir remarquons qu'il est possible de calculer directement à l'aide des permutations le genre de la surface S dans laquelle est plongée toute représentation topologique d'une carte combinatoire donnée. En effet selon la formule de la caractéristique d'Euler, le genre est donné par

$$g = \frac{1}{2}(2 + a(C) - s(C) - f(C)) = \frac{1}{2}(2 + c(\beta) - c(\alpha) - c(\gamma)) \tag{1}$$

où, pour toute permutation π, $c(\pi)$ désigne le nombre de cycles de π.

À partir de maintenant nous allons donc parler de cartes, sans qu'il soit utile de préciser s'il s'agit de cartes topologiques ou combinatoires.

[4]ou des *demi-arêtes*, des *darts*, des *flèchettes* ou encore des *drapeaux* (pour se limiter à la terminologie française). On pourra trouver dans [80] une discussion des nombreuses variantes possibles de cette *équivalence de catégorie* (sic !).

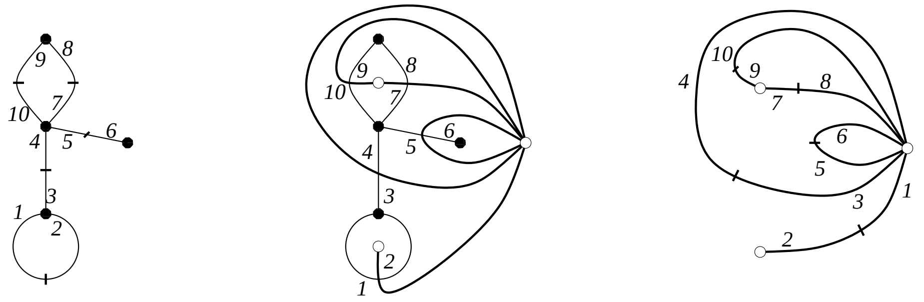


FIG. 1.7: Deux cartes planaires duales dont les brins sont étiquetés.

Naturellement, dans les figures nous employons des cartes topologiques, dans les algorithmes des cartes combinatoires. Nous ne nous poserons pas ici le problème du dessin effectif et automatique[5] des cartes combinatoires sous la forme de cartes topologiques, bien que celui-ci fasse l'objet de nombreuses études (voir [50] pour une bibliographie détaillée).

1.1.3 Dualité, connexité

Pour conclure l'introduction des concepts fondamentaux de cette thèse, nous présentons quelques notions qui nous servent régulièrement.

Soit C une carte, la carte *duale* C' est définie de la façon suivante : dans chaque face de C, on met un sommet de C' et à travers chaque arête de C, on place une arête de C'. Ainsi les sommets de C' sont en bijection avec les faces de C, les faces de C' avec les sommets de C et les arêtes de C' et de C se correspondent. Remarquons que la dualité est une application involutive sur les cartes. La figure 1.7 montre une carte et sa duale. Cette carte n'est pas bipartie, il faut donc étiqueter les brins dans le cas où on veuppt la décrire par une carte combinatoire. La dualité se décrit très bien en termes de permutations : l'involution α reste identique et les permutations faces et sommets s'échangent (en changeant d'orientation, *i.e.* en étant inversée).

Remarquons que la dualité est bien un concept lié aux cartes : deux plongements différents d'un même graphe planaire, définissent des cartes duales distinctes, dont les graphes sous-jacents n'ont pas de raison d'être isomorphes.

Nous serons amenés à utiliser les concepts de *séparateurs*, ou de *cocycles*. Un k-*séparateur* est un ensemble de k sommets tel qu'il existe une partition des arêtes en deux ensembles non vides tels que les k sommets soient les seuls sommets incidents à la fois à ces deux ensembles. La figure 1.8(a) montre un 3-séparateur. Un k-cocycle est un k-uplet d'arêtes distinctes $a_1, \ldots, a_k$ telle que pour tout $1 \leq i < j \leq k+1$, les arêtes a_i et a_j sont incidentes à une même face si $i+1=j$ et ne le sont pas si $i+1 \neq j$ (par convention, a_{k+1} désigne a_1). De manière équivalente, un k-cocycle d'une carte est un cycle simple de la carte duale. La figure 1.8(b) montre un 3-cocycle.

Le lemme de Jordan dit que toute courbe simple fermée sépare la sphère en deux composantes

[5]certains auteurs parlent *d'incrustation* pour marquer la différence avec le plongement (*i.e.* le choix d'une carte étant donné un graphe)

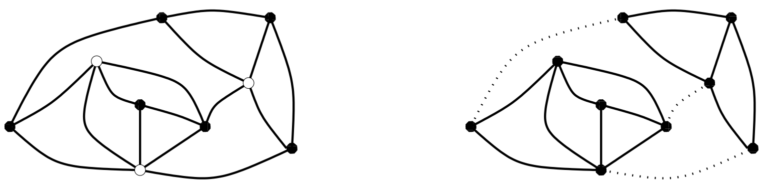


FIG. 1.8: (a) Un 3-séparateur (en blanc). (b) Un 3-cocycle (en pointillé).

simplement connexes. Pour les cartes il s'énonce sous la forme suivante.

Lemme 1.6 (de Jordan) *Tout cycle simple d'arêtes définit dans une carte deux composantes, contenant chacune au moins une face. Si la carte est enracinée, on appelle composante externe celle qui contient la face racine et composante interne l'autre.*

Ce lemme implique que dans une carte planaire un k-cocycle sépare une carte en deux composantes connexes contenant chacune au moins un sommet. Par exemple un 1-cocycle est appelé un *pont*. Remarquons qu'en genre supérieur un k-cocycle peut ne pas séparer deux composantes connexes.

Une carte planaire est appelée *non séparable* si elle ne contient pas de 1-séparateur. Cette notion correspond à la 2-connexité du graphe sous-jacent et à l'absence de boucle (sauf pour les deux cartes réduites à une arête qui sont non séparables suivant la définition des 1-séparateurs). Plus généralement pour $k \geq 3$ une carte planaire est k-connexe si elle ne contient pas de k-séparateur.

1.2 Énumération exacte, séries génératrices

Pour obtenir rapidement des résultats d'énumération, nous faisons fréquemment appel aux séries génératrices ordinaires, qui sont adaptées aux décompositions de cartes. On trouve dans la littérature d'autres types de séries génératrices : séries génératrices exponentielles, séries de Dirichlet, séries de probabilité, q-séries, séries de Newton, etc. Voir [131, 127] pour des discussions plus complètes.

On considère une famille $\mathcal{F}$ d'objets combinatoires munis d'un paramètre entier positif, que l'on appelle la taille des objets. On note $|f|$ la taille d'un objet f de $\mathcal{F}$. La *série génératrice ordinaire* de la famille $\mathcal{F}$ selon la taille est la série formelle

$$f(x) = \sum_{f \in \mathcal{F}} x^{|f|}$$

où x est une indéterminée. Bien sûr cette série génératrice n'a de sens que si pour tout $n \geq 0$, le nombre f_n d'éléments f de $\mathcal{F}$ de taille $|f| = n$ est fini. La série génératrice peut alors s'exprimer sous la forme

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n.$$

Pour indiquer que f_n est le coefficient de x^n dans la série formelle $f(x)$, on utilise souvent la notation $f_n = [x^n]f(x)$.

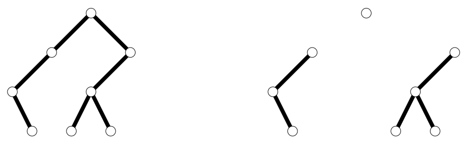


FIG. 1.9: Un arbre binaire et sa décomposition.

La motivation principale pour l'introduction des séries génératrices est l'existence de «dictionnaire» de traduction entre opérations combinatoires et opérations sur les séries.

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles d'objets combinatoires. Notons f_n et g_n les nombres d'objets de tailles n et $f(x)$ et $g(x)$ les séries génératrices des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Alors on dispose des opérations combinatoires suivantes.

- *Union disjointe.* Soit $\mathcal{H} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$ l'union des deux familles : un objet de $\mathcal{H}$ est soit un objet de $\mathcal{F}$, soit un objet de $\mathcal{G}$. Le nombre d'objets de taille n de $\mathcal{H}$ est $h_n = f_n + g_n$ et donc
$$h(x) = f(x) + g(x).$$
- *Produit.* Soit $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$ le produit cartésien des deux familles : un objet de $\mathcal{H}$ est un couple formé d'un élément de $\mathcal{F}$ et d'un élément de $\mathcal{G}$. La taille d'un élément (f, g) de $\mathcal{H}$ est par définition $|f| + |g|$. Le nombre d'éléments de taille n est $h_n = \sum_{i+j=n} f_i g_j$ et donc
$$h(x) = f(x)g(x).$$
- *Composition.* Soit $\mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ la composée des deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ ne contient aucun objet de taille nulle : un objet h de $\mathcal{H}$ est formé d'un objet f de $\mathcal{F}$ et de $k = |f|$ objets de $\mathcal{G}$. La taille de $h = (f; g_1, \dots, g_k)$ est $\sum_{i=1}^{k} |g_i|$. Le nombre d'éléments de $\mathcal{H}$ de taille n est $h_n = \sum_{k=0}^{n} \sum g_{i_1} \cdots g_{i_k}$ où la seconde somme porte sur les k-uplets d'entiers vérifiant $i_1 + \cdots + i_k = n$. On en déduit que
$$h(x) = f(g(x)).$$

D'autres opérations sur les séries, comme la dérivation ou l'intégration, ont une interprétation combinatoire, mais nous n'en aurons pas l'utilité dans un premier temps. On trouvera dans [131, 127] encore d'autres opérations et de nombreux exemples d'applications.

Définissons aussi les familles $\{\bullet\}$ qui contient un seul objet $\bullet$ de taille 1 et $\{\diamond\}$ qui contient un seul objet $\diamond$ de taille 0. À l'aide de ces deux familles élémentaires et des trois opérations précédentes, il est déjà possible d'énumérer une grande variété d'arbres plans élémentaires. Prenons un exemple.

L'équation combinatoire
$$\mathcal{B} = \{\diamond\} + \{\bullet\} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{B},$$
définit la famille des arbres binaires comptés selon leur nombre de sommets. En effet un arbre binaire est soit un arbre vide ($\diamond$), soit un sommet ($\bullet$) avec deux sous-arbres, qui sont eux-mêmes des arbres binaires ($\mathcal{B}$). Cette décomposition est illustrée par la figure 1.9.

À l'aide du dictionnaire précédent, on obtient une équation pour la série génératrice ordinaire $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, où b_n désigne le nombre d'arbres binaires à n sommets :

$$B(x) = 1 + xB(x)^2.$$

Il ne reste pour trouver b_n qu'à résoudre,

$$B(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{x}, \tag{2}$$

et développer cette série en 0 :

$$b_n = [x^n]B(x) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Les nombres b_n sont les *nombres de Catalan*. Il convient de remarquer ici qu'en écrivant le radical dans la formule (2) et en parlant de développement en 0 nous avons quitté les séries formelles pour passer dans le domaine des séries analytiques autour de l'origine. Par extension, nous utiliserons la notation $[x^n]B(x)$, qui désigne le coefficient de x^n dans la série formelle $B(x)$, pour parler du coefficient de x^n dans le développement de Taylor de la série $B(x)$ au voisinage de 0, lorsque cela a un sens. On aurait pu se passer de ce détour par les fonctions analytiques en utilisant par exemple la formule d'inversion de Lagrange pour les séries formelles (voir [71, Section 1.2.4]). Cependant l'utilisation des propriétés des séries analytiques est extrêmement fructueuse, en particulier pour obtenir des résultats d'énumération asymptotique (nous y reviendrons à la section 1.4).

L'utilisation de séries génératrices est une méthode d'énumération très souple, qui s'applique à une grande variété d'objets combinatoires, et plus particulièrement à ceux qui sont issus de l'analyse d'algorithmes (cf. [118, 148]). Cependant, cette approche peut être difficile à mener pour les structures qui ne sont pas facilement décomposables. Les graphes fournissent des exemples de structures particulièrement rebelles à cette forme d'analyse (voir [101] pour un magnifique contre-exemple à cette remarque).

Pour prendre un exemple proche de nos préoccupations à venir, considérons le cas des graphes planaires. Très peu de choses sont connues sur le nombre de graphes planaires simples à n sommets. Dans [49], est démontré un encadrement qui est loin de donner même un équivalent asymptotique. On peut avancer une «explication» à cet échec. Par définition, un graphe est planaire s'il *existe* un plongement de ce graphe dans le plan. Étant donné un graphe, différents critères sont disponibles pour dire s'il est planaire et plusieurs algorithmes le déterminent en temps linéaire. Cependant cette propriété reste quand même implicite dans la structure du graphe, alors qu'au contraire une carte planaire «contient explicitement la preuve de sa planarité». Nous allons voir tout au long de cette thèse qu'il est du coup possible d'obtenir pour les cartes des résultats d'énumération satisfaisants. Ceci illustre l'idée, somme toute assez naturelle, qu'on sait d'autant mieux compter des objets que leur structure est plus explicite.

1.3 Contraction/suppression et équations fonctionnelles

Dans cette section nous abordons l'énumération des cartes planaires enracinées.

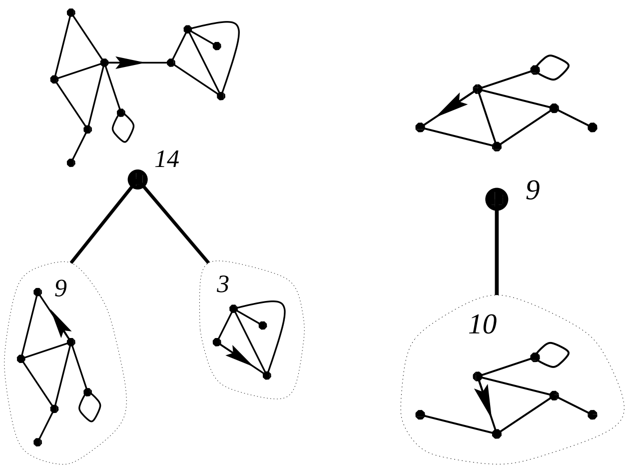


FIG. 1.10: *i.* La racine est un pont. *ii.* La racine n'est pas un pont.

1.3.1 La méthode de W.T. Tutte

Les travaux de W.T. Tutte et son école ont permis dès les années soixante de donner des équations fonctionnelles pour les séries génératrices de différentes familles de cartes planaires enracinées. Rappelons la démarche de W.T. Tutte pour la détermination du nombre de cartes d'une famille $\mathcal{F}$ par contraction/suppression :

1. Donner une décomposition récursive des cartes de $\mathcal{F}$. Pour cela,
   (a) Dans une carte C *générique* de $\mathcal{F}$, supprimer ou contracter l'arête racine.
   (b) Décomposer la carte obtenue de façon à ce que chaque composante «s'apparente» à une carte de $\mathcal{F}$ plus petite que C.
   (c) Déterminer combien de cartes on peut reconstruire à partir de la donnée des composantes.
2. Traduire la décomposition récursive en termes d'équations fonctionnelles pour les séries génératrices. Pour cela il est en général nécessaire d'introduire un ou plusieurs paramètres supplémentaires.
3. Résoudre les équations fonctionnelles pour déterminer les séries génératrices.

Pour ne pas rester trop abstrait, considérons tout de suite l'exemple de la famille $\mathcal{F}$ de toutes les cartes planaires enracinées. Nous allons déterminer f_n, le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes.

1. La décomposition est illustrée figure 1.10 (les nombres qui y apparaissent seront utilisés plus loin).
   (a) On utilise l'opération «supprimer une arête».
   (b) Deux cas se présentent :

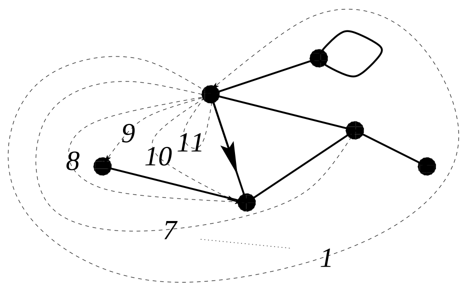


FIG. 1.11: Quelques unes des 11 façons de replacer la racine.

i. *La racine est un pont.* Elle lie deux cartes comme sur la figure 1.10i. En enracinant chacune de ces deux cartes sur l'arête qui suit la racine dans le sens direct, on obtient deux cartes de $\mathcal{F}$.

ii. *La racine n'est pas un pont.* Comme le montre la figure 1.10ii., enracinons la carte restante C' sur l'arête suivant la racine dans le sens direct. Elle appartient à $\mathcal{F}$.

(c) Dans le premier cas, la décomposition est clairement bijective. Dans le second, à partir d'une carte C', on reconstruit une carte C en insérant une arête qui part du coin droit de la racine et arrive en n'importe lequel des coins de la face racine de C'. Le nombre de cartes ainsi reconstruites est donc égal au degré de la face racine de C' plus un, comme on le voit sur la figure 1.11.

2. La décomposition se traduit en une équation fonctionnelle pour la série génératrice à deux variables

$$F(x,u) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} f_{n,k}x^n u^k$$

dans laquelle $f_{n,k}$ désigne le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes et dont la face racine est de degré k. Remarquons que $f_n = \sum_{k\geq 1} f_{n,k}$ et que nous voulons donc déterminer le coefficient de x^n dans la série $F(x,1)$.

La série génératrice des cartes planaires se décompose en

– Le monôme 1, associé aux feuilles.

– La série des couples de cartes reliées par un pont : celle-ci est $xu^2F(x,u)^2$.

– Pour tout k, la série des cartes dont la face racine est de degré k lorsqu'on supprime l'arête racine :

$$x\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} f_{n,k}(u+u^2+\ldots+u^{k+1}) = x\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} f_{n,k}u\frac{1-u^{k+1}}{1-u} = xu\frac{F(x,1)-uF(x,u)}{1-u}.$$

Nous en déduisons l'équation fonctionnelle (cf.[141]),

$$F(x,u) = 1 + xu^2F(x,u)^2 + xu\frac{F(x,1)-uF(x,u)}{1-u}. \tag{3}$$

3. La résolution de cette équation se fait en plusieurs étapes :
   - Tout d'abord réordonnons les termes :

$$xu^2(1-u)F(x,u)^2 - (1-u+xu^2)F(x,u) + (1-u) + xuF(x,1) = 0. \tag{4}$$

   Dérivons par rapport à u :

$$\begin{aligned} x(2u-3u^2)F(x,u)^2 + (1-2xu)F(x,u) - 1 + xF(x,1) \\ +F'_u(x,u)(2xu^2(1-u)F(x,u) - (1-u+xu)^2) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

   - Considérons l'équation

$$2xu(x)^2(1-u(x))F(x,u(x)) - (1-u(x)+xu^2(x)) = 0, \tag{6}$$

   tirée du second facteur de l'équation (5) et supposons qu'il existe une série formelle $u(x)$, qui soit solution de cette équation (6). Sous cette hypothèse, les séries $u(x)$, $f(x) = F(x,1)$ et $v(x) = F(x,u(x))$ annulent les équations (4), (5) et (6) ainsi donc que le premier facteur de l'équation (5) :

$$\left\{ \begin{array}{c} 2xu(x)^2(1-u(x))v(x) - (1-u(x)+xu^2(x)) = 0 \\ x(2u(x)-3u(x)^2)v(x)^2 + (1-2xu(x))v(x) - 1 + xf(x) = 0 \\ xu(x)^2(1-u(x))v(x)^2 - (1-u(x)+xu(x)^2)v(x) + (1-u(x)) + xu(x)f(x) = 0. \end{array} \right.$$

   En particulier lorsque ce système admet une solution, les trois séries sont algébriques.
   - L'élimination de $f(x)$ et $v(x)$ dans le système nous amène à l'équation

$$x^2u^4 + 2xu^4 - 4xu^3 + 2xu^2 + 2u^3 - 7u^2 + 8u - 3 = 0$$

   qui a le bon goût de se factoriser :

$$(xu^2 + u - 1)(xu^2 + 2u^2 - 5u + 3) = 0.$$

   Nous obtenons ainsi les deux candidats $u(x)$ possibles, $u_1(x)$ annulant le premier facteur, et $u_2(x)$ le second.

   La série $u_1(x)$ vérifie $x = (1-u)/u^2$, ce qui nous permet d'exprimer la série $f_1(x)$ correspondante. On trouve $f_1(x) = u^2/(u-1)$ qui n'est pas analytique en 0, ce qui est incompatible avec l'interprétation combinatoire de $F(x,1)$.

   La série $u_2(x)$ vérifie $x = (1-u)(3-u)/u^2$, et on trouve $f_2(x) = u(4-3u)/(3-2u)^2$ qui est analytique en 0. Cette série est solution du système et la solution $f_2(x)$ lui correspondant l'est aussi. Comme l'équation (3) est clairement contractante, elle admet une unique solution analytique en zéro et nous en concluons que $F(x,1) = f_2(x)$.
   - Nous appliquons finalement la formule d'inversion de Lagrange : si $\phi(y)$ et $\Psi(y)$ sont deux séries avec $\phi(0) = 0$, et si $L(x) = \phi(L(x))$ alors

$$[x^n]\Psi(L(x)) = \frac{1}{n}[y^n]y\Psi(y)'\phi(y)^n.$$

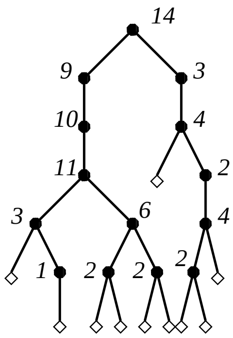


FIG. 1.12: L'arbre de description complet de la carte de la figure 1.10.

Si on pose $u_2(x) = 1/(1 - t(x))$, on a

$$\begin{aligned}
t(x) &= \frac{x}{1-3t(x)} \quad \text{et} \quad x^2 f_2(x) = t(x)^2 - 4t(x)^3 \\
f_n &= [x^n]f_2(x) = [x^{n+2}]\left(t(x)^2 - 4t(x)^3\right) = \frac{1}{n+2}[y^{n+2}]\frac{y(2y-12y^2)}{(1-3y)^{n+2}} \\
&= \frac{1}{n+2}\left[2\binom{2n+1}{n}3^n - 12\binom{2n}{n-1}3^{n-1}\right] \\
&= \frac{2(2n)!3^n}{n!(n+2)!}.
\end{aligned}$$

Cet exemple nous amène à deux développements, qui font l'objet des deux sections suivantes.

1.3.2 Arbres de description

La décomposition récursive que nous avons utilisée, due à W.T. Tutte, s'exprime assez naturellement en termes *d'arbres de description* : à chaque étape de la décomposition, on associe un nœud de l'arbre.

- Dans le cas (i), il s'agit d'un nœud binaire, dont les deux fils sont les arbres associés récursivement aux deux composantes. Ce nœud porte une étiquette égale au degré de la face racine (cf. figure 1.10.i).
- Dans le cas (ii), c'est un nœud unaire, dont le fils est l'arbre associé récursivement à la carte privée de l'arête racine. Le nœud porte une étiquette égale au degré de la face racine (cf. figure 1.10.ii).
- La carte sans arête, à un sommet et une face, est associée à une feuille portant l'étiquette 0, qui est le degré de sa face racine.

La figure 1.12 montre l'arbre de description complet de la carte de la figure 1.10. Ce codage permet de reconstituer les cartes en utilisant les étiquettes pour replacer la racine dans le cas unaire. Enfin, comme les étiquettes codent le paramètre «degré de la face racine», on voit qu'un arbre unaire-binaire est un arbre de description d'une carte si ses étiquettes vérifient les trois conditions suivantes :

- Les feuilles sont étiquetées 0.
- L'étiquette d'un nœud unaire est supérieure à un et inférieure à l'étiquette de son fils plus un.
- L'étiquette d'un nœud binaire est égale à la somme des étiquettes des deux fils plus deux.

Dans cet exemple, le codage met en évidence la structure de la décomposition récursive. Plus généralement la méthodologie de W.T. Tutte s'applique à bon nombre de familles de cartes et amène à des décompositions qui peuvent s'exprimer de manière uniforme en termes d'arbres de description. Ces arbres ont été introduits et particulièrement étudiés dans [39, 99, 98].

Les arbres qu'il nous faut considérer sont obtenus à l'aide des opérations suivantes, qui généralisent les opérations utilisées pour l'exemple de la famille de toutes les cartes planaires. Ce sont des arbres plans, portant des étiquettes entières positives. Étant donnée une famille $\mathcal{A}$ d'arbres de description, notons $G_{\mathcal{A}}(x,u)$ sa série génératrice selon le nombre de nœuds et l'étiquette de la racine. De la même façon que pour les séries génératrices ordinaires de la section précédente, nous avons un dictionnaire entre opérations combinatoires et opérations sur les séries.

1. *Feuille.* La feuille $\diamond_i$ étiquetée i avec $i \geq 0$ est un arbre de taille 0. En particulier $G_{\{\diamond_i\}} = u^i$.
2. *Nœud unaire.* Soit $\mathcal{A}$ une famille d'arbres de description. La famille $\bullet\mathcal{A}$ contient les arbres obtenus en attachant un arbre de $\mathcal{A}$ dont la racine porte l'étiquette e, à un nœud racine étiqueté e. Alors $G_{\bullet\mathcal{A}} = xG_{\mathcal{A}}$.
3. *Nœud binaire.* Soit $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux familles d'arbres de description. La famille $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \bullet \mathcal{A}_2$ contient les arbres obtenus en attachant un sous-arbre gauche, pris dans $\mathcal{A}_1$ et un sous-arbre droit, pris dans $\mathcal{A}_2$, à un nœud racine dont l'étiquette est égale à la somme des étiquettes de ses deux fils. Alors
$$G_{\mathcal{A}}(x,u) = xG_{\mathcal{A}_1}(x,u)G_{\mathcal{A}_2}(x,u).$$
Une variante de cette opération consiste à joindre deux sous arbres par un nœud factice, ne modifiant pas la taille de l'arbre : si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2$ alors
$$G_{\mathcal{A}}(x,u) = G_{\mathcal{A}_1}(x,u)G_{\mathcal{A}_2}(x,u).$$
4. *L'incrément* $\uparrow$. L'opération d'incrémentation consiste à ajouter 1 à l'étiquette de la racine d'un arbre. Ainsi à partir d'une famille d'arbres $\mathcal{A}$ nous formons la famille $\uparrow\mathcal{A}$. Alors
$$G_{\uparrow\mathcal{A}}(x,u) = uG_{\mathcal{A}}(x,u).$$
5. *La relaxation* $\Downarrow$. L'opération de relaxation consiste à remplacer l'étiquette e à la racine par une étiquette comprise entre 0 et $e-1$ (les arbres de racine 0 n'ont pas d'image par relaxation). Alors
$$G_{\Downarrow\mathcal{A}}(x,u) = \frac{G_{\mathcal{A}}(x,1) - G_{\mathcal{A}}(x,u)}{1-u} = \Delta G_{\mathcal{A}}(x,u).$$
Nous appelons l'opérateur Δ, opérateur de *dérivation discrète*. En effet, il ne s'agit pas exactement de l'opérateur de différence finie et pour $u \to 1$, $\Delta F(x,u) \to F'_u(x,1)$.

Avec ces notations les arbres de description des cartes planaires sont définis par l'équation combinatoire

$$\mathcal{A} = \diamond_0 + \uparrow^2 \mathcal{A} \bullet \mathcal{A} + \bullet \uparrow \Downarrow \uparrow \mathcal{A}.$$

La méthodologie de W.T. Tutte donne d'autres équations du même type pour différentes familles de cartes. En effet, l'intervention de l'opérateur $\Downarrow$ est très naturelle pour les cartes planaires : le paramètre k représente typiquement le degré de la face racine, dans laquelle on ajoute une arête, ce qui a pour effet de *cacher* une partie des arêtes, et ainsi de faire diminuer le paramètre.

À la section 1.3.4 sont donnés les arbres de description associés par contraction/suppression à quelques autres familles de cartes énumérées par W.T. Tutte.

1.3.3 Résolution des équations «aux dérivées discrètes»

Le second développement inspiré de l'exemple de la famille de toutes les cartes planaires concerne la méthode de résolution de l'équation fonctionnelle ; en effet, nous avons employé ici une reformulation de la *méthode quadratique*, introduite et utilisée par W. G. Brown et W. T. Tutte [34]. Cette reformulation s'inspire d'une extension de la méthode quadratique due à R. Cori et J. Richard [41, 42, 37], et simplifiée par M. Bousquet-Mélou [28].

De manière générale, considérons une équation de la forme

$$P(x, u, f(x), F(x, u)) = 0,$$

où $f(x)$ et $F(x, u)$ sont des fonctions inconnues et $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un polynôme. Alors nous appliquons la démarche suivante :

- Dérivons formellement par rapport à u :
$$\frac{\partial P}{\partial x_2}(x, u, f(x), F(x, u)) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u)\frac{\partial P}{\partial x_4}(x, u, f(x), F(x, u)) = 0.$$
- Supposons que l'équation
$$\frac{\partial P}{\partial x_4}(x, u(x), f(x), F(x, u(x))) = 0$$
possède une solution $u(x)$ qui est une série formelle (éventuellement une série de puissances fractionnaires de x). Alors $u(x)$, $v(x) = F(x, u(x))$ et $f(x)$ sont solutions du système
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x_4}(x, u(x), f(x), v(x)) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial x_2}(x, u(x), f(x), v(x)) = 0, \\ P(x, u(x), f(x), v(x)) = 0. \end{array}\right.$$
En particulier, si ce système n'est pas dégénéré, ses éventuelles solutions sont algébriques, de même que $F(x, u)$ qui annule alors $P(x, u, f(x), F(x, u))$.

La présentation que nous avons suivie est essentiellement due à M. Bousquet-Mélou [28]. Dans [42], R. Cori et J. Richard traitent le même cas (mais de manière plus compliquée), et s'intéressent aussi à celui des équations de la forme $P_0(x,u)+P_1(x,u)f_1(x)+\ldots+P_k(x,u)f_k(x)+P_{k+1}(x,u)F(x,u)=0$, où les $P_i(x,u)$ sont des polynômes en x et u. Plus généralement il est naturel de considérer les équations de la forme

$$P(x,u,f_1(x),\ldots,f_k(x),F(x,u))=0$$

où P est un polynôme, car les séries génératrices des arbres de description définies à partir des opérateurs de la section précédente rentrent dans ce cadre. En effet, l'opérateur de dérivée discrète

$$\Delta F(x,u)=\frac{F(x,1)-F(x,u)}{1-u},$$

donne des équations algébriques en $F(x,u)$ et $F(x,1)$, qui sont en pratique *surdéterminées* : dans l'exemple de la famille de toutes les cartes planaires, l'équation (4) est de la forme

$$P(x,u,F(x,1),F(x,u))=0$$

mais nous l'avons résolue sous la forme

$$P(x,u,f(x),F(x,u))=0$$

en oubliant que $f(x)=F(x,1)$. En effet cette dernière relation est une conséquence de l'équation (4) lorsqu'on fait tendre u vers 1 !

Plus généralement les itérés de l'opérateur de dérivation font intervenir de nouvelles fonctions inconnues, qui ne dépendent que de x :

$$\Delta^2F(x,u)=\frac{\Delta F(x,u)|_{u=1}-\Delta F(x,u)}{1-u}=\frac{F'_u(x,1)-\Delta F(x,u)}{1-u}.$$

Comme exemple d'équations faisant intervenir des itérés de ce type figure celui des constellations planaires enracinées, énumérées au chapitre 3 par une méthode bijective. Ainsi, les séries génératrices des m-constellations satisfont à des équations qui font intervenir les opérateurs Δ^i pour i de 1 à $m-1$. Ces équations, découvertes par M. Bousquet-Mélou [28], ont permis de conjecturer à partir des premiers termes les expressions démontrées au chapitre 3. Pour ces équations il est possible, au moins en théorie, de donner une extension de la méthode précédente qui permet de montrer l'algébricité des solutions [28]. En pratique cependant les calculs semblent très vite devenir inextricables.

On peut espérer à la manière de [64, 65] définir des conditions sur les grammaires à base d'opérateurs Δ et montrer l'algébricité des séries de ces grammaires *bien fondées*. En particulier ces grammaires d'arbres de description pourraient fournir un cadre général intéressant pour étendre les résultats de R. Cori et J. Richard.

1.3.4 Quelques séries génératrices de cartes

Nous donnons les séries génératrices de quelques familles de cartes, qui nous seront utiles plus loin. Ces séries s'obtiennent à partir des équations combinatoires satisfaites par les arbres de description donnés à la section 1.3.2 en appliquant la méthode de la section 1.3.3. Tous ces paramétrages sont déjà connus et ont été donnés par W.T. Tutte dans la série d'article [137, 136, 139, 141]. Remarquons que suivant l'usage qu'on veut faire de ces paramétrages, il est intéressant ou non de compter les cartes à 0 ou 1 arêtes. Ceci induit des variations (triviales mais pas toujours faciles à suivre) dans les paramétrages, d'où l'intéret de donner toujours les premiers termes des développements.

Rappelons que toutes les cartes considérées ici sont planaires et enracinées.

- Soit f_n le nombre de cartes quelconques à n arêtes. Ces cartes sont décrites par les arbres de description,

$$\mathcal{A} = \diamond_0 + \uparrow^2 \mathcal{A} \bullet \mathcal{A} + \bullet \uparrow\Downarrow\uparrow \mathcal{A}.$$

D'où l'équation résolue à la section 1.3.1,

$$F(x,u) = 1 + xu^2 F(x,u)^2 + xu\Delta(uF(x,u)).$$

On obtient le paramétrage de la série génératrice $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$,

$$t = \frac{x}{1-3t}, \qquad x^2 f(x) = t^2 - 4t^3.$$

Ce paramétrage est équivalent à

$$y = 3x(1+y)^2, \qquad f(x) = (1-y/3)(1+y).$$

$$f(x) = 1 + 2x + 9x^2 + 54x^3 + 378x^4 + 2916x^5 + O(x^6).$$

Le nombre de cartes est

$$f_n = \frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n!(n+2)!}.$$

- Soit f_n le nombre de cartes biparties à n arêtes. Ces cartes sont décrites par les arbres de description,

$$\mathcal{A} = \diamond_0 + \uparrow \mathcal{A} \bullet \mathcal{A} + \bullet \uparrow\Downarrow\uparrow \mathcal{A}.$$

D'où l'équation,

$$F(x,u) = 1 + xuF(x,u)^2 + xu\Delta(F(x,u)).$$

On obtient le paramétrage de la série génératrice $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$,

$$t = \frac{x}{1-2t}, \qquad x^2 f(x) = t^2 - 3t^3 + t^4.$$

$$f(x) = 1 + x + 3x^2 + 12x^3 + 56x^4 + 288x^5 + 1584x^6 + O(x^7).$$

Le nombre de cartes est

$$f_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1} (2n)!}{n!(n+2)!}.$$

– Soit f_n le nombre de cartes non séparables[6] à $n+1$ arêtes. Ces cartes sont décrites par les arbres de description,

$$\mathcal{A} = \diamond_0 + \uparrow \mathcal{A} \bullet (\diamond_0 + \Downarrow \mathcal{A}).$$

D'où l'équation

$$F(x,u) = 1 + xuF(x,u)(1 + \Delta F(x,u)).$$

On obtient le paramétrage suivant de la série génératrice $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$,

$$t = \frac{x}{(1-t)^2}, \qquad xf(x) = t - t^2 - t^3.$$

Ce paramétrage est équivalent à

$$y = x(1+y)^3, \qquad f(x) = 1 + y - y^2.$$

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 22x^4 + 91x^5 + 408x^6 + O(x^7).$$

Finalement, le nombre de cartes est

$$f_n = \frac{2(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}.$$

– Soit f_n le nombre de cartes cubiques[7] non séparables à $n+1$ faces. Ces cartes sont décrites par les arbres de description,

$$\mathcal{A} = \diamond_1 + \uparrow^2 \mathcal{A} \bullet \Downarrow \mathcal{A}.$$

D'où l'équation

$$F(x,u) = u + xu^2 F(x,u)\Delta F(x,u).$$

On obtient le paramétrage suivant de la série génératrice $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$,

$$t = \frac{x}{(1-2t)^2}, \qquad xf(x) = t - 3t^2.$$

$$f(x) = 1 + x + 4x^2 + 24x^3 + 176x^4 + 1456x^5 + 13056x^6 + O(x^6).$$

Finalement, le nombre de cartes est

$$f_n = \frac{2^n(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}.$$

[6] 2-connexes et sans boucles, y compris exceptionnellement pour 1 arête, cf. section 1.1.3.
[7] dont tous les sommets sont de degré 3 ; ces cartes sont duales des triangulations.

– Soit f_n le nombre de cartes cubiques 3-connexes à $n+1$ faces. Ces cartes sont décrites par les arbres de description,

$$\mathcal{A} = \diamond_1 + \uparrow \mathcal{A} \bullet \Downarrow \mathcal{A}.$$

D'où l'équation

$$F(x,u) = u + xuF(x,u)\Delta F(x,u).$$

On obtient le paramétrage suivant de la série génératrice $f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$,

$$t = \frac{x}{(1-t)^3}, \qquad xf(x) = t - 2t^2.$$

$$f(x) = 1 + x + 3x^2 + 13x^3 + 68x^4 + 399x^5 + 2530x^6 + O(x^7).$$

Finalement, le nombre de cartes est

$$f_n = \frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}.$$

1.4 Énumération approchée, outils asymptotiques

Il nous sera utile à différentes reprises de déterminer le comportement asymptotique de coefficients de séries génératrices. Nous empruntons pour cela deux théorèmes à l'analyse des singularités. Ces résultats nous permettront d'obtenir très rapidement les équivalents dont nous aurons besoin par la suite.

Voir les travaux de F. Flajolet, A. Odlyzko, M. Drmota [61, 60, 51] pour les preuves de ces deux résultats et d'autres bien plus généraux. Dans les deux théorèmes suivants apparaît la notion de Δ-domaine[8]. Cependant, comme elle ne nous sert qu'à emboîter les deux théorèmes, nous renvoyons à [61] pour plus de détails.

Théorème 1.7 *Soit $\phi(z)$ analytique autour de $z = 0$ dont les coefficients ϕ_n du développement de Taylor sont positifs et telle que $\phi(0) \neq 0$ (si ϕ est un polynôme, on impose de plus qu'il soit de degré au moins deux, de sorte que $\phi''(r) > 0$ pour tout $r > 0$). Si $\phi(z)$ diverge en approchant de son rayon de convergence, l'équation*

$$\phi(\tau) - \tau\phi'(\tau) = 0,$$

possède une unique solution réelle positive τ. Alors l'équation

$$L(z) = z\phi(L(z))$$

possède une unique solution $L(z)$ analytique à l'origine. Notons f_n les coefficients du développement de $L(z)$ en 0.

[8]Un Δ-domaine associé à une fonction analytique en 0 de rayon de convergence ρ et ayant une unique singularité dominante (*i.e.* de plus petit module) réelle est un disque de rayon $\rho+\epsilon$ privé d'un secteur centré en ρ et de la forme $\{\rho + z \mid |\arg(z)| < \theta\}$, avec $\epsilon > 0$ et $0 < \theta < \pi/4$.

Si on suppose encore que pour n assez grand, tous les f_n sont strictement positifs alors $L(z)$ a une unique singularité dominante (i.e. de plus petit module) en $z = r_\ell = \tau/\phi(\tau)$. De plus, $L(z)$ admet dans un Δ-domaine en r_ℓ le développement singulier

$$L(z) = \tau - c(r_\ell - z)^{1/2} + d(r_\ell - z) + O(r_\ell - z)^{3/2}$$

avec $c = \sqrt{2\phi(\tau)/\phi''(\tau)}$.

Théorème 1.8 (Transfert) *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ analytique dans un Δ-domaine et vérifiant au voisinage de 1 dans son Δ-domaine la condition,*

$$f(z) = O((1-z)^{-\alpha}),$$

où α est un réel. Alors

$$f_n = O(n^{\alpha-1}).$$

Si $f(z) = (1-z)^{1/2}$ alors

$$f_n = \frac{-n^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}(1 + O(1/n)).$$

Si $f(z) = (1-z)^{3/2}$ alors

$$f_n = \frac{3n^{-5/2}}{4\sqrt{\pi}}(1 + O(1/n)).$$

En particulier on obtient avec ces deux théorèmes des équivalents de la forme $\alpha n^{-3/2}\gamma^n$ pour les coefficients des séries génératrices de toutes sortes de familles d'arbres décomposables. L'existence d'une forme asymptotique commune à une famille d'objets combinatoires de même type est connue des physiciens statisticiens sous le nom d'*hypothèse d'universalité*.

Effectuons le calcul pour un exemple, afin de montrer comment s'obtiennent les valeurs de α et γ dans un cas particulier (nous suivons ici la méthode décrite dans [61]). Soit f_n le nombre d'arbres binaires-unaires. Ces arbres sont définis par l'équation

$$\mathcal{A} = \bullet(\cdot + \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}),$$

et leur série génératrice est solution de l'équation

$$F(z) = z(1 + F(z) + F(z)^2).$$

Cette équation rentre dans le cadre du théorème 1.7 en posant $\phi(y) = 1 + y + y^2$, $\phi(\tau) - \tau\phi'(\tau) = 1 - \tau^2$ et $\tau = 1$, $r_f = 1/3$. Développons au voisinage de $y = \tau$ la fonction suivante :

$$\frac{\tau}{\phi(\tau)} - \frac{y}{\phi(y)} = \frac{1}{9}(1-y)^2 - \frac{1}{9}(1-y)^3 + O((1-y)^4),$$

où l'on remarque que l'annulation du terme linéaire provient du choix de τ. En considérant z comme une fonction de y définie par l'équation $y = z\phi(y)$, on voit que le développement précédent est un développement de $r_f - z$. On en déduit, en choisissant la bonne détermination de la racine (z est fonction croissante de y)

$$\sqrt{r_f - z} \quad = \quad \sqrt{\frac{\tau}{\phi(\tau)} - \frac{y}{\phi(y)}} = \frac{1}{3}(1-y) - \frac{1}{6}(1-y)^2 + O((1-y)^3).$$

Enfin on inverse cette relation pour obtenir

$$F(z) = 1 - \sqrt{3}(1-3z)^{1/2} + O(1-3z)$$

et il ne reste qu'à appliquer le théorème de transfert :

$$f_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}}\sqrt{\frac{3}{\pi}}3^n.$$

Remarquons que nous utilisons implicitement le fait qu'au fur et à mesure des différentes étapes, les développements précédents restent valables dans des Δ-domaines adaptés.

Pour les cartes planaires (et plus généralement pour les cartes de genre donné), des physiciens statisticiens ont formulé une *hypothèse d'universalité* du même type. Indépendemment E.A. Bender *et al.* ont conjecturé un énoncé équivalent [8]. Si on se restreint au cas planaire cette conjecture, vérifiée pour la plupart des exemples *raisonnables*[9] de cartes connus, s'énonce ainsi :

> Soit $\mathcal{F}$ une famille de cartes planaires enracinées et f_n le nombre de cartes de $\mathcal{F}$ de taille n. Alors il existe des constantes réelles positives δ et $\gamma > 1$ telles que $f_n \sim \delta n^{-5/2}\gamma^n$.

Dans la suite nous étudions uniquement des familles de cartes dont les séries génératrices sont données par un système d'équations auquel il est possible d'appliquer la formule d'inversion de Lagrange.

Définition 1.9 *Nous appellerons une série $L(z)$* lagrangienne[10] pure *s'il existe une série $\phi(z)$ qui vérifie les hypothèses du théorème 1.7 avec $L(z)$ comme solution. Comme τ est l'image de L en sa singularité dominante, nous appelons τ la valeur critique de $L(z)$.*

Une série $H(z)$ est lagrangienne *s'il existe L lagrangienne pure de valeur critique τ et une série Ψ, analytique en 0 et de rayon de convergence supérieur à τ telle que*

$$H(x) = \Psi(L(x)).$$

Remarquons que la série $H(x)$ a alors pour rayon de convergence r_ℓ, comme $L(z)$.

Une série lagrangienne $H(x)$ a un paramétrage (ϕ, Ψ) singulier *si*

$$\Psi'(\tau) = 0.$$

La proposition suivante est immédiate.

[9]Qu'est ce qu'on entend par *raisonnable* ? Une réponse de normand serait «qui vérifie l'hypothèse d'universalité» ! Cependant l'expérience suggère qu'une famille de cartes est raisonnable si les contraintes qui sont imposées sont locales. Un exemple de famille de cartes «déraisonnables» est donné dans [95], où sont comptées des cartes qui possèdent une symétrie globale.

[10]Le choix de cette terminologie n'est peut être pas idéal, mais ne devrait pas induire de confusion dans notre contexte.

Proposition 1.10 *Soit $\mathcal{H}$ une famille de cartes planaires satisfaisant à l'hypothèse d'universalité et dont la série génératrice $H(x)$ est lagrangienne. Alors le paramétrage de la série $H(x)$ est singulier et $H(x)$ admet le développement suivant en sa singularité dominante r_h :*

$$H(z) = \Psi(\tau) - a(1 - z/r_h) + b(1 - z/r_h)^{3/2} + O((1 - z/r_h)^2),$$

avec $b > 0$.

Démonstration. Soit ϕ, Ψ et L les séries associées à H. Alors en vertu du théorème précédent,

$$L(z) = \tau - c(1 - z/r_h)^{1/2} + c_1(1 - z/r_h) + O((1 - z/r_h)^{3/2}),$$

avec $c = (2\phi(\tau)/\phi''(\tau))^{1/2}$.

Par hypothèse, Ψ est régulière en τ et donc le développement singulier de $H(z)$ au voisinage de r_h est

$$H(z) = \Psi(\tau) - \Psi'(\tau)c(1 - z/r_h)^{1/2} + a(1 - z/r_h) + b(1 - z/r_h)^{3/2} + O((1 - z/r_h)^2).$$

Ce développement est toujours valable dans un Δ-domaine et en appliquant le théorème de transfert, on voit que pour satisfaire à l'hypothèse d'universalité il faut $\Psi'(\tau) = 0$ et $b > 0$. □

À titre d'exemple, la fin de cette section est une session `Maple` dans laquelle on dérive successivement les développements des séries génératrices $G(x)$ des cartes non séparables, $F(x)$ des cartes quelconques et $H(x) = xF(x)^2$ des cartes enracinées sur un pont. Ces résultats nous seront utiles plus loin.

– *Cartes non séparables.* Le paramétrage suivant donne la série génératrice G des cartes planaires non séparables à n arêtes pour $n \geq 0$ (il est lié au paramétrage donné à la section 1.3.4 pour la série $f(x)$ des cartes planaires non séparables à $n+1$ arêtes pour $n \geq 1$ par la relation $G(x) = 1 + x + xf(x)$, car cette fois on veut compter la boucle.).

```
> phi:=(1+y)^3;
```

$$\phi := (1 + y)^3$$

```
> psi:=factor((4y+1)/(1+y)^2);
```

$$\psi := \frac{4\,y + 1}{(1 + y)^2}$$

```
> LL:=0: to 10 do
> LL:=series(x*subs(y=LL,phi),x,10); od:
> GG:=series(subs(y=LL,psi),x,10);
```

$$GG := 1 + 2\,x + x^2 + 2\,x^3 + 6\,x^4 + 22\,x^5 + 91\,x^6 + 408\,x^7 + 1938\,x^8 + 9614\,x^9 + \mathrm{O}(x^{10})$$

```
> solve(phi-y*diff(phi,y),y);
```

$$\frac{1}{2},\ -1,\ -1$$

```
> tau:=1/2;
```

$$\tau := \frac{1}{2}$$

```
> X:=y/phi;
```

$$X := \frac{y}{(1+y)^3}$$

```
> rho:=subs(y=tau,X);
```

$$\rho := \frac{4}{27}$$

Développons $\rho - x$, vue comme fonction de y, au voisinage de τ : on pose $r = \tau - y$.

```
> devX:=series(sqrt(subs(y=tau-r,
> 1-1/rho*series(X,y=tau,4))),r=0,4);
```

$$devX := \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r + \frac{16}{27}\sqrt{3}\,r^2 - \frac{64}{243}\sqrt{3}\,r^3 + \mathrm{O}(r^4)$$

Il suffit maintenant d'inverser cette relation pour trouver y, c'est-à-dire $L(x)$ en $t = 1 - x/\rho$.

```
> L:=tau-solve(sqrt(t)=devX,r);
```

$$L := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{t} + \frac{2}{3}\,t - \frac{20}{27}\sqrt{3}\,t^{3/2} - \mathrm{O}(t^2)$$

```
> G:=series(subs({y=L},psi),t);
```

$$G := \frac{4}{3} - \frac{4}{9}\,t + \frac{8}{81}\sqrt{3}\,t^{3/2} + \mathrm{O}(t^2)$$

Le théorème de transfert nous donne alors $g_n \sim \frac{2}{27}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{27}{4}\right)^n$.

– *Cartes planaires quelconques.* Le paramétrage suivant donne la série $F(x)$ des cartes planaires à n arêtes (cf. section 1.3.4).

```
> phi:=3*(1+y)^2;
```

$$\phi := 3\,(1+y)^2$$

```
> psi1:=factor(1+(2*y-y^2)/3);
```

$$\psi 1 := -\frac{1}{3}\,(1+y)\,(y-3)$$

```
> LL:=0: to 10 do
> LL:=series(x*subs(y=LL,phi),x,10); od:
> FF:=series(subs(y=LL,psi1),x,10);
```

$$FF := 1 + 2\,x + 9\,x^2 + 54\,x^3 + 378\,x^4 + 2916\,x^5 + 24057\,x^6 + 208494\,x^7 + 1876446\,x^8 + 17399772\,x^9 + \mathrm{O}(x^{10})$$

– *Cartes planaires enracinées sur un pont.* Celles ci sont obtenues en liant deux cartes planaires, de sorte que $H(x) = xF(x)^2$.

```
> psi2:=factor(y/phi*psi1^2);
```

$$\psi 2 := \frac{1}{27}\,y\,(y-3)^2$$

```
> HH:=series(subs(y=LL,psi2),x,10);
```

$$HH := x + 4\,x^2 + 22\,x^3 + 144\,x^4 + 1053\,x^5 + 8316\,x^6 + 69498\,x^7 + 606528\,x^8 + 5477706\,x^9 + \mathrm{O}(x^{10})$$

```
> solve(phi-y*diff(phi,y),y);
```

$$1,\ -1$$

```
> tau:=1;
```

$$\tau := 1$$

```
> X:=y/phi;
```

$$X := \frac{1}{3}\,\frac{y}{(1+y)^2}$$

```
> rho:=subs(y=tau,X);
```

$$\rho := \frac{1}{12}$$

```
> devX:=series(sqrt(subs(y=tau-r,
> 1-1/rho*series(X,y=tau,4))),r=0,4);
```

$$devX := \frac{1}{2}\,r + \frac{1}{4}\,r^2 - \frac{1}{16}\,r^3 + \mathrm{O}(r^4)$$

```
> L:=tau-solve(sqrt(t)=devX,r);
```

$$L := 1 - 2\,\sqrt{t} + 2\,t - 5\,t^{3/2} - \mathrm{O}(t^2)$$

```
> F:=series(subs({y=L},psi1),t);
```

$$F := \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\,t + \frac{8}{3}\,t^{3/2} + \mathrm{O}(t^2)$$

D'où $f_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n$.

```
> H:=series(subs({y=L},psi2),t);
```

$$H := \frac{4}{27} - \frac{4}{9}\,t + \frac{16}{27}\,t^{3/2} + \mathrm{O}(t^2)$$

D'où $h_n \sim \frac{4}{9\sqrt{\pi}} 12^n$.

1.5 Noyaux et composition des séries génératrices

Une seconde méthode utilisée par W.T. Tutte pour obtenir des équations fonctionnelles est *l'extraction du noyau* d'une carte. Ou plutôt d'*un* noyau, car de nombreux choix sont possibles qui font que cette méthode est en fait assez souple et puissante. Les équations obtenues sont toutes de même nature et font intervenir des *compositions* de séries génératrices.

Nous étudions un premier exemple, puis nous montrons un éventail représentatif d'applications de la méthode d'extraction, pour lesquels nous donnons en quelques mots l'idée de la décomposition. Les schémas de composition obtenus serviront pour les algorithmes de génération aléatoire par *extraction/rejet* du chapitre 5.

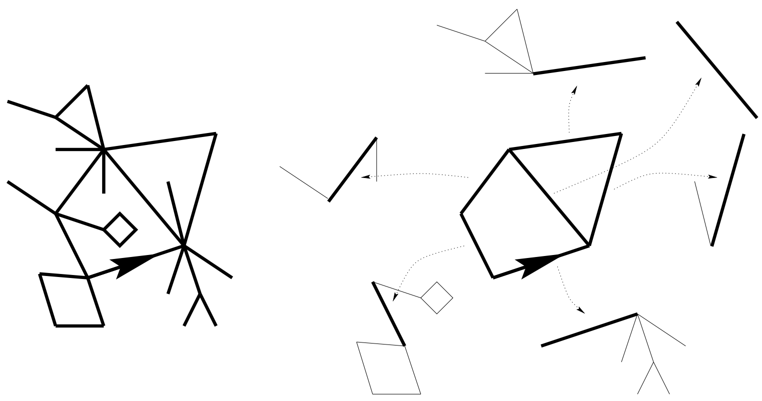


FIG. 1.13: Décomposition et noyau non séparable d'une carte planaire.

Enfin notons qu'au chapitre 4 nous reviendrons plus longuement sur la composition des séries génératrices pour étudier les distributions de tailles de noyaux dans les cartes.

1.5.1 Exemple : extraction d'un noyau non séparable

Soit $\mathcal{F}$ la famille de toutes les cartes planaires enracinées, $\mathcal{G}$ la famille des cartes non séparables[11] et $\mathcal{H} = \mathcal{X}\mathcal{F}^2$ les couples de cartes planaires reliées par une arête. Le paramètre de taille que nous utilisons ici est le nombre d'arêtes.

Théorème 1.11 *Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont liées par la relation*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F}^2).$$

Démonstration. La figure 1.13 illustre cette relation. Il nous faut mettre en bijection les cartes à n arêtes de $\mathcal{F}$ avec les couples de la forme $(G; H_1, \dots, H_k)$ où G est une carte de $\mathcal{G}$ de taille k, les H_i sont des cartes de $\mathcal{H}$ et $|H_1| + \cdots + |H_k| = n$.

Soit F une carte planaire enracinée à n arêtes. Une sous-carte de F est une carte obtenue en supprimant des arêtes et des sommets de F (en particulier F est sa propre sous-carte). Une composante non séparable de F est une sous-carte non séparable maximale de F (*i.e.* qui n'est sous-carte d'aucune autre sous-carte non séparable de F).

La seule carte n'ayant pas d'arête est la carte réduite à un sommet. Par convention, elle est ici considérée comme non séparable, de sorte que la relation est vérifiée pour $n = 0$.

Si $n > 0$, soit G l'unique sous-carte maximale de F contenant la racine de F. La carte G est une carte non séparable enracinée à k arêtes, avec $1 \leq k \leq n$. On définit une orientation canonique des arêtes de G par un parcours en profondeur des arêtes à partir de la racine, dans le sens direct autour de chaque sommet.

À chaque arête a de G, associons une sous-carte H_a de F. Cette carte est enracinée en a (qui est orientée par le parcourt en profondeur). L'arête a est un pont. À chaque extrémité s_i pour $i = 1, 2$

[11] 2-connexes et sans boucles pour $n \geq 2$, voir section 1.1.3.

de a, on associe l'ensemble A_i des arêtes incidentes à s_i entre a et l'arête suivante appartenant à G lorsqu'on tourne en sens direct autour de a. La sous-carte H_a est la réunion de a et des composantes connexes dans $F \setminus G$ des arêtes de A_1 et A_2.

On a défini ainsi une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$. Inversement si G est une carte planaire non séparable enracinée à k arêtes et $(H_1, \ldots, H_k)$ sont des cartes de la familles $\mathcal{H} = \mathcal{X}\mathcal{F}^2$, on reconstruit facilement une carte planaire enracinée quelconque. □

En particulier cette bijection se traduit par une relation de composition pour les séries génératrices selon le nombre d'arêtes.

Corollaire 1.12 *Soit f_n le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes et g_n le nombre de cartes non séparables enracinées à n arêtes. Alors les séries génératrices $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ et $G(x) = \sum_{n\geq 0} g_n x^n$ vérifient*

$$F(x) = G(xF(x)^2)$$

Cette équation est due à W.T. Tutte qui s'en est servi pour déduire la valeur de g_n de celle de f_n. Cette preuve est même antérieure à la preuve par contraction/suppression.

Remarquons que si on pose $F(x, u) = G(uxF(x)^2)$ alors le coefficient de $x^n u^k$ dans la série formelle $F(x, u)$ est le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes dont le noyau 2-connexe est de taille k. Nous nous servirons de cette remarque au chapitre 4 pour étudier la taille du noyau d'une carte choisie uniformément parmi toutes les cartes de taille n.

Nous allons maintenant voir que les relations de ce type abondent parmi les cartes.

1.5.2 Variations sur le thème

L'exemple de la section 1.5.1 montre une relation de composition récursive, liée à l'existence d'une décomposition des cartes quelconques en composantes non séparables. La table 1.1 réunit différents autres exemples de décompositions de ce type.

Il est aussi possible de donner des relations de composition non récursives. Dans ce cas les sous cartes supprimées ont une structure plus pauvre, et on parlera de relation d'enrichissement : par exemple on peut enrichir une carte irréductible (*i.e.* sans sommets de degré 2) en ajoutant un nombre arbitraire de sommet de degré 2 sur chaque arête. La table 1.2 donne quelques relations d'enrichissement.

Enfin il serait possible de donner des versions bivariées à la plupart de ces schémas pour tenir compte des nombres de sommets et de faces. Nous indiquons par quelques commentaires laconiques, comment s'obtiennent ces relations de composition. Dans ces exemples il est utile de garder à l'esprit qu'il est très facile de munir une carte d'une orientation canonique des arêtes (pour enraciner les composantes extraites).

- *Arêtes multiples/cartes simples.* Les arêtes multiples d'une carte forment des cycles de longueur deux. Un cycle définit une composante externe qui contient la face racine et une composante interne (lemme 1.6). Le noyau *simple* d'une carte sans boucle est obtenu en supprimant toutes les composantes internes et en identifiant les deux arêtes de chacun des

cartes ($\mathcal{F}$)		noyau ($\mathcal{G}$)	relation	référence
nom	taille	nom	composition	
quelconques	n arêtes	non séparables	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F}^2)$	[140]
quelconques	n arêtes	sans pont	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}(\mathcal{X}\mathcal{F})^*)$	?
quelconques	n arêtes	s. boucle	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{L} + \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}((\mathcal{X}\mathcal{F})^*)^2)$	?
s. boucle	n arêtes	simples	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F})$	?
biparties	n arêtes	bip. simples	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F})$	?
biparties	n arêtes	bip. non sép.	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F}^2)$	?
biparties	n arêtes	bip. sans pont	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}(\mathcal{X}\mathcal{F})^*)$	?
non séparables	n arêtes	non. sép. simples	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F})$	?
non séparables	$n+1$ arêtes	3-connexes	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{D} + \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$	[140]
cubiques n. s.	$n+2$ faces	cub. 3-c	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}(1+\mathcal{F})^3)$	[136]
cubiques 3-c.	$n+2$ faces	cub. 4-c	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \cdot \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F}^2)$	[136]

TAB. 1.1: Quelques schémas de composition de cartes planaires enracinées. Pour chaque famille de cartes, la colonne taille indique le paramètre pour lequel il faut composer. $\mathcal{X}$ désigne une carte de taille 1, $\mathcal{L}$ la famille des cartes quelconques non enracinées sur une boucle et $\mathcal{D}$ la famille des cartes non séparables sans noyau.

cartes ($\mathcal{F}$)		noyau ($\mathcal{G}$)	reliquat ($\mathcal{H}$)	relation	référence
nom	taille	nom	nom	de composition	
quelconques	n arêtes	irréductible	sommets	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{X}^*)$	[67]
non séparable	n arêtes	n. sép. irréd.	sommets	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{X}^*)$	[67]
quelconques	n arêtes	s. feuilles	arbres	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{X}\mathcal{H}\mathcal{F} + \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{H}^2)$	[67]
biparties	n arêtes	bip. s. feuilles	arbres	$\mathcal{F} \simeq \mathcal{X}\mathcal{H}\mathcal{F} + \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{H}^2)$	[67]

TAB. 1.2: Quelques schémas d'enrichissement de cartes planaires enracinées.

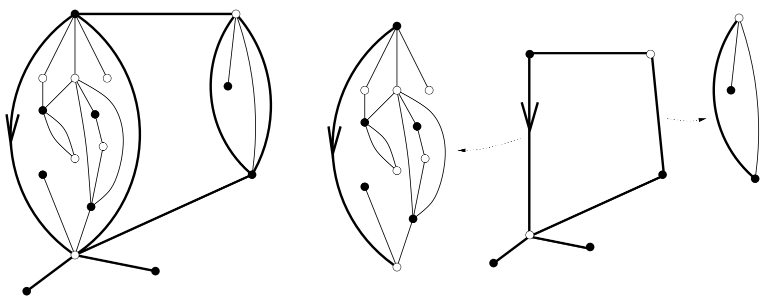


FIG. 1.14: Décomposition et noyau simple d'une carte planaire.

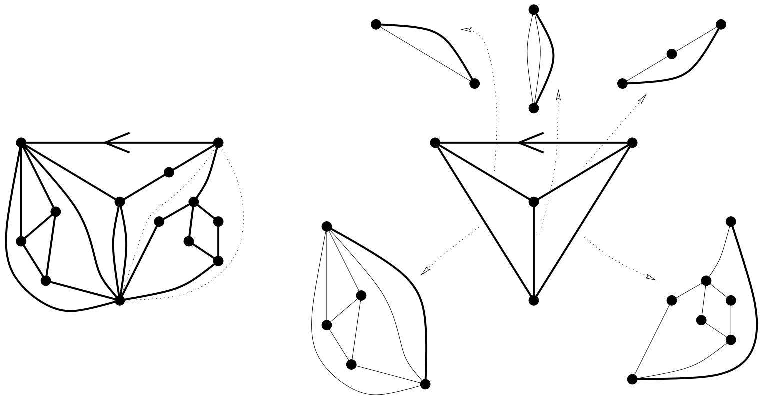


FIG. 1.15: Décomposition et noyau 3-connexe d'une carte planaire non séparable (en pointillé à gauche une composante 2-séparable maximale).

cycles maximaux de longueur deux restants. Remarquons que ce qui fait marcher l'argument est l'impossibilité d'avoir deux cycles de longueur deux qui se chevauchent (sans quoi on ne pourrait définir les cycles *maximaux*). Nous dirons que les cycles de longueur deux sont *bien ordonnés par inclusion*.

L'élimination des arêtes multiples dans certaines cartes particulières donne des résultats de k-connexité. Par exemple les cartes quelconques sont en bijection avec les cartes radiales, qui sont des cartes dont tous les sommets sont de degré quatre (voir lemme 2.3 ou [139, 117]). Or la restriction de cette bijection aux cartes non séparables les envoie sur les cartes radiales sans 2-cocycles. On retrouve ainsi le résultat de la section précédente.

Un autre exemple est celui des cartes cubiques (dont tous les sommets sont de degré trois). En effet ces cartes sont *duales* des triangulations (dont toutes les faces sont de degré trois) et une triangulation 2-connexe est 3-connexe si et seulement si elle est simple. Ainsi on obtient les noyaux 3-connexes des cartes cubiques non séparables [138].

– 3-*cycles/triangulations* 4-*connexes.* Les cycles de longueurs trois dans les triangulations sont bien ordonnés par inclusion dans les cartes simples, et peuvent donc être éliminés de manière canonique. Cette remarque permet par exemple d'extraire le noyau 4-connexe d'une triangulation 3-connexe. En effet ces triangulations sont simples et un 3-séparateur dans une triangulation 3-connexe est doublé d'un cycle de longueur trois [138].

– 4-*cycles/cartes* 3-*connexes.* Dans les cartes biparties simples, les cycles de longueur quatre sont ordonnés par inclusion et peuvent donc être éliminés de manière canonique. Comme une carte non séparable est 3-connexe si et seulement si sa carte radiale ne contient pas de 4-cocycle, on obtient les noyaux 3-connexes des cartes non séparables en éliminant les cycles de longueur 4 dans la carte duale de la carte radiale [139, 117]. Remarquons pour ce schéma particulier que le noyau 3-connexe N d'une carte non séparable C n'est pas à proprement parler une sous carte de C : N est obtenue en remplaçant dans C par une arête toutes les composantes 2-séparables maximale (*i.e.* séparées par un couple de sommets séparateurs et contenue dans aucune autre) ne contenant pas la racine. La figure 1.15 illustre cette décomposition. De plus, certaines cartes non séparables n'ont pas de noyau 3-connexe, ce qui amène dans le schéma un terme $\mathcal{D}$, qui compte les cartes sans noyau.

- *Ponts.* Un *pont* est une arête qui sépare deux composantes connexes. On parle aussi de 1-séparateur, ou, pour les cartes sans pont, de carte «arêtes-2-connexes» (par opposition à la notion usuelle de 2-connexité qui est une «2-connexité au sens des sommets»). Le noyau sans pont d'une carte est obtenu en supprimant tous les ponts rencontrés lors d'un parcours en largeur de cette carte depuis sa racine. Inversement dans chaque «coin» de la carte peuvent être ajoutés un nombre arbitraire de cartes quelconques, pendues par un pont.

Première partie

Cartes et graphes planaires

Chapitre 2

Conjugaison d'arbres et cartes planaires

Dans ce chapitre, un nouvel éclairage est porté sur les cartes planaires. Introduisons le par un parallèle peut-être audacieux... Le principe suivant, qui fait partie de l'héritage de M.P. Schützenberger, remonte à A. Dvoretzky, Th. Motzkin ou encore G.N. Raney :

> *les arbres plans sont des mots conjugués.*

Notre propos sera de convaincre le lecteur du credo suivant :

> *les cartes planaires sont des arbres plans conjugués.*

2.1 Démonstration par l'exemple

Les bijections qui font l'objet de ce chapitre sous-tendent les algorithmes de codage et de génération aléatoire des chapitres suivants et donnent des informations sur des paramètres importants comme le diamètre. Cependant au premier abord, je voudrais leur trouver un intérêt presque esthétique : idéalement, les lignes qui suivent permettraient de «comprendre» quelques jolies formules initialement démontrées par W. T. Tutte, dans les années soixante.

2.1.1 Les arbres plans plantés sont des mots conjugués

Le lien entre arbres plans plantés et langages est maintenant classique. Considérons par exemple l'arbre plan planté de la figure 2.1. Cet arbre s'interprète naturellement comme une expression fonctionnelle dans laquelle chaque symbole possède une *arité* fixée : $(a, 2), (b, 2), (c, 3), (d, 1), (e, 0), (f, 0)$. Un symbole d'arité k possède k fils —ou prend k arguments— et les symboles d'arité 0 sont des constantes. Ainsi on peut écrire l'arbre précédent en notation fonctionnelle

$$a(d(a(e, d(e))), c(e, f, b(e, e))).$$

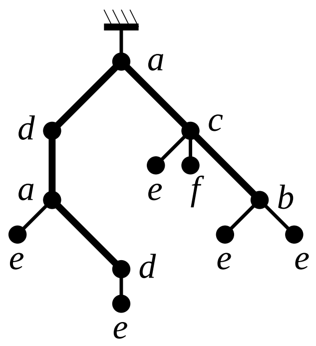


FIG. 2.1: Un arbre plan planté.

Comme les symboles ont une arité fixée, on ne perd pas d'information en se passant des parenthèses :

$$adaedecefbee.$$

En effet, on peut facilement reconstituer le mot de départ en partant des constantes et en «remontant», ou encore, reconstruire l'arbre dans l'ordre préfixe en lisant le mot de gauche à droite. Cette façon d'écrire les expressions fonctionnelles, et donc les arbres plans plantés, est parfois appelée *notation polonaise* et la notation polonaise d'un arbre s'obtient directement en lisant les étiquettes au cours d'un parcours préfixe gauche. Remarquons que les arbres que nous considérons sont *plantés* (*i.e.* leur racine est une feuille), mais que *la feuille racine ne fait pas partie du code.* L'intérêt de considérer des arbres plantés est que ainsi tous les nœuds (*i.e.* sommets internes) ont un degré (au sens des graphes) égal à leur arité plus un.

Appelons $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ l'alphabet et δ la fonction qui à une lettre de $\mathcal{A}$ associe son arité *moins un* : dans notre exemple

$$\delta(a) = \delta(b) = 1,\ \delta(c) = 2,\ \delta(d) = 0,\ \delta(e) = \delta(f) = -1.$$

L'ensemble des mots qui codent des arbres en notation polonaise est appelé le *langage de Lukacievicz* de $(\mathcal{A}, \delta)$. Plus généralement on définit le langage de Lukacievicz associé à un couple ainsi formé d'un alphabet $\mathcal{A}$ et d'une fonction δ de $\mathcal{A}$ dans les entiers $\{-1, 0, 1, \dots\}$.

Alors les mots du langage de Lukacievicz —les mots qui codent des arbres— peuvent être caractérisés très simplement en terme de δ, étendu additivement aux mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$: $\delta(a_1a_2\dots a_k) = \delta(a_1) + \delta(a_2) + \cdots + \delta(a_k)$. En effet un mot w sur $\mathcal{A}$ est un mot de Lukacievicz si et seulement si

- le mot ne «termine» pas avant la fin : pour tout facteur gauche strict[1] u de w, $\delta(u) \geq 0$,
- le mot «termine» à la fin : $\delta(w) = -1$.

En effet, reconstruisons un arbre à partir de son code dans l'ordre préfixe gauche. Après avoir reconstruit le préfixe associé au facteur gauche u, $\delta(u) + 1$ compte le nombre de «places libres»

[1] *i.e.* il existe v non vide tel que $uv = w$.

restantes. Les conditions traduisent simplement qu'il reste une place libre pour ajouter le sommet suivant, sauf à la fin où il ne doit en rester aucune.

Rappelons que deux mots w et w' sont *conjugués* s'il existe u et v tels que $uv = w$ et $vu = w'$. En d'autres termes, deux mots sont conjugués s'ils correspondent au même *mot cyclique*. Le titre de ce paragraphe se justifie maintenant par le *lemme cyclique* suivant. Ce lemme est dû à A. Dvoretzky et Th. Motzkin [55] et a été mis en valeur par G.N. Raney [121] pour donner la première preuve combinatoire de la formule d'inversion de Lagrange.

Lemme 2.1 (Lemme cyclique) *Soit w un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tel que $\delta(w) = -p$ avec $p \geq 1$. Alors il existe une factorisation de w unique $w = uv_1 \ldots v_{p-1}u'$ telle que*

- *pour tout $i = 1, \ldots, p-1$, le mot v_i est de Lukacievicz.*
- *le mot u est non vide et $u'u$ est de Lukacievicz.*

En particulier pour $p = 1$, exactement un conjugué $u'u$ du mot $w = uu'$ est un mot de Lukacievicz.

Démonstration. La démonstration du lemme cyclique est classique (voir par exemple [108, 109, p.221]). Nous nous contentons d'en rappeler l'idée. Commençons par le cas $p = 1$: soit w un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tel que $\delta(w) = -1$. Considérons successivement les facteurs gauches u de w de longueur croissante et leur $\delta(u)$. Au départ le mot vide vérifie $\delta(\varepsilon) = 0$, et chaque fois que $\delta(w)$ atteint pour le première fois une valeur négative, appelons u un *minimum de gauche à droite* (appelé parfois excédence). Par définition, w est un mot de Lukacievicz si et seulement si w est un de ses minima de gauche à droite, et il est alors le seul. Plus généralement la factorisation (u, u') du théorème est donnée par u le dernier minimum de gauche à droite de w. Il est facile de voir en effet que celui-ci convient et que toute autre factorisation violerait les conditions. Dans le cas général, les p facteurs sont donnés par les p derniers minima de gauche à droite. □

Ainsi les arbres plans plantés qui peuvent être formés sur le (multi-)ensemble de symbole $\mathcal{M} = \{a, a, b, c, d, d, e, e, e, e, e, f\}$ sont en bijection avec les mots cycliques formés sur $\mathcal{M}$. Plus généralement le lemme cyclique permet de compter les arbres plans formés sur un ensemble de lettres $\mathcal{M}$ donnés.

Corollaire 2.2 *Soit*

$$\mathcal{M} = \{\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{a_k, \ldots, a_k}_{n_k}\}$$

un (multi-)ensemble de n lettres ($n = n_1 + \cdots + n_k$). Soit p l'entier, supposé strictement positif,

$$-p = \sum_{i=1}^{k} n_i \delta(a_i).$$

Alors, le nombre de mots w formés sur $\mathcal{M}$ et qui s'écrivent comme un produit $v_1 v_2 \cdots v_p$ de mots de Lukacievicz est

$$\frac{p}{n_1 + \cdots + n_k} \binom{n_1 + \cdots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}.$$

Démonstration. Considérons les mots cycliques : à chaque lettre x d'un mot cyclique $\bar{w}$ est associé le mot w_x qui commence par cette lettre. Comptons de deux façons les triplets $(\bar{w}, x, y)$ où x et y sont deux lettres de $\bar{w}$ et w_y est un mot de Lukacievicz.

- Un tel triplet est de la forme (w_x, y), où w_x est un mot quelconque vérifiant $\delta(w_x) = p$ et y l'une des p lettres de w_x telle que w_y soit produit de mots de Lukacievicz. Il y a donc $p\binom{n_1+\dots+n_k}{n_1,\dots,n_k}$ triplets.
- Il est aussi de la forme (w_y, x), où w_y est un produit de mots de Lukacievicz et x une des $n_1 + \ldots + n_k$ lettres de w_y.

Le corollaire suit en comparant les deux nombres obtenus. $\square$

Prenons quelques exemples :

- Un arbre binaire complet à n nœuds est codé par un mot sur n lettres x d'arité deux et $n+1$ lettres $\bar{x}$ d'arité zéro. Le nombre d'arbres binaires à n nœuds est donc le nombre de Catalan
$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$
- Un arbre m-aire complet à n nœuds est codé par un mot sur n lettres x d'arité m et $(m-1)n+1$ lettres $\bar{x}$ d'arité zéro. Le nombre d'arbres m-aires à n nœuds est donc
$$\frac{1}{mn+1}\binom{mn+1}{n} = \frac{1}{(m-1)n+1}\binom{mn}{n}.$$
- Un arbre plan planté possédant n_i nœuds d'arité i pour tout $i \geq 1$ et $\ell + 1$ feuilles (y compris la racine) est codé par un mot sur l'alphabet de Lukacievicz standard $\{x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ contenant n_i lettres x_{i-1} et ℓ lettres x_{-1} (une fois encore rappelons que la feuille racine ne rentre pas dans le code). Le nombre de ces arbres, calculé par F. Harary, G. Prins et W.T. Tutte [85] est donc
$$\frac{1}{\ell+n_1+\dots+n_k}\binom{\ell+n_1+\dots+n_k}{\ell, n_1, \dots, n_k} = \frac{1}{\ell}\binom{\ell-1+n_1+\ldots+n_k}{\ell-1, n_1, \dots, n_k}. \tag{1}$$

2.1.2 Cartes planaires et formules de W.T. Tutte

Ainsi qu'il est défini à la section 1.1, une *carte planaire* est un plongement d'un graphe planaire connexe dans la sphère, dans lequel les arêtes multiples ainsi que les boucles sont autorisées. Dans ce chapitre les cartes que nous considérons sont toujours *enracinées*, c'est-à-dire qu'une arête est distinguée et orientée. *L'arête racine* est issue d'un *sommet racine* et bordée sur sa droite d'une *face racine*. Par convention, nous choisissons la face racine comme face infinie pour dessiner les cartes dans le plan. En d'autres termes, l'arête racine d'une carte enracinée dessinée dans le plan est toujours une arête qui borde la face infinie en sens (trigonométrique) direct.

L'idée d'enraciner les cartes pour les compter est due à W.T. Tutte. Nous avons rappelé les décompositions par contraction/suppressions (section 1.3) et par extraction (section 1.5) que cet auteur utilise dans une série d'articles (la série des «census of . . . » [137, 135, 136, 139, 34, 141]) pour étudier les cartes. Il obtient ainsi d'élégantes formules auxquelles nous nous intéressons maintenant de plus près.

Par exemple, dans [141], W.T. Tutte calcule le nombre de cartes planaires enracinées quelconques à n arêtes, qui nous a servi d'exemple à la section 1.3 :

$$\frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n!(n+2)!}.$$

Un autre exemple est celui des cartes non séparables[2]. Dans [34], il est montré que les nombres de cartes planaires enracinées non séparables à $n+1$ arêtes ou à $i+1$ sommets et $j+1$ faces sont

$$\frac{2(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!} \quad \text{ou} \quad \frac{(2i+j-2)!(i+2j-2)!}{(2i-1)!(2j-1)!i!j!}.$$

Parmi les formules de W.T. Tutte pour les cartes planaires enracinées, citons encore la formule donnant le nombre de cartes biparties à n arêtes, et celle donnant le nombre de cartes non séparables cubiques (dont tous les sommets sont de degré trois) à n sommets :

$$\frac{3 \cdot 2^n (2n)!}{n!(n+2)!} \quad \text{et} \quad \frac{2^n (3n)!}{(n+1)!(2n+1)!}.$$

Ces formules, dont la simplicité est frappante, sont des points singuliers : à quelques rares exceptions près (dont nous proposons une famille infinie nouvelle au chapitre 3), les nombres de cartes sont loins d'être toujours donnés par d'aussi belles expressions closes.

Plusieurs preuves de la première de ces formules ont été données. Ainsi, après les deux premières preuves de W.T. Tutte [137, 141] d'autres ont été obtenues par A.B. Lehmann [105], R. Cori [38] et D. Arquès [4]. Néanmoins, aucune de ces preuves ne donne d'intuition directe permettant de «voir apparaître» la formule.

Au contraire, le lemme cyclique de la section précédente, donne une preuve intuitive de la formule pour les arbres binaires complets : le binomial $\binom{2n+1}{n}$ compte évidemment des mots, et la division par $2n+1$ traduit la conjugaison.

Remarquons que les formules de W.T. Tutte énoncées plus haut ont toutes une parenté certaine avec les nombres de Catalan. En effet, réécrivons les plus simples d'entre elles :

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n!(n+2)!} &= \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}, \\
\frac{3 \cdot 2^n (2n)!}{n!(n+2)!} &= \frac{3 \cdot 2^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}, \\
\frac{2(3n)!}{(n+1)!(2n+1)!} &= \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} \binom{3n}{n}, \\
\frac{2^n (3n)!}{(n+1)!(2n+1)!} &= \frac{2^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)} \binom{3n}{n}.
\end{aligned}$$

Nous avons mis en valeur ici une forme commune à ces quatre formules. Nous reconnaissons comme facteur les nombres d'arbres binaires ou ternaires. Apparaissent aussi un terme exponentiel, mais surtout un terme linéaire au dénominateur *qui se trouve être le nombre de feuilles (en comptant la racine) des mêmes arbres dont les nombres sont en facteur !*

[2]cf. section 1.1 pour les définitions de différentes familles de cartes.

À la lumière de ces premières observations réécrivons une autre formule de W.T. Tutte, *a priori* plus complexe. Le nombre de cartes biparties à $\ell+1$ sommets, $n+1$ arêtes et avec n_i faces de degré $2i$ (les faces d'une carte bipartie sont toujours de degré pair et la formule d'Euler donne $n = \ell - 1 + n_1 + \cdots + n_k$) est

$$\frac{2(n!)}{(\ell+1)!} \prod_{i\geq 1} \binom{2i-1}{i}^{n_i} \frac{1}{n_i!} = \frac{2}{(\ell+1)\ell} \binom{\ell-1+n_1+\cdots+n_k}{\ell-1, n_1, \ldots, n_k} \prod_{i\geq 1} \binom{2i-1}{i}^{n_i},$$

où nous reconnaissons en facteur la formule (1), qui donne le nombre des arbres plans comptés par F. Harary, G. Prins et W.T. Tutte que nous avons calculé à la section précédente (page 54). Au dénominateur apparaît le facteur $\ell+1$ qui est précisément le nombre de feuilles de ces arbres.

Au chapitre 3 nous démontrons que les cartes planaires de la famille des m-constellations, sont comptées selon leur nombre n *d'étoiles*, par la formule

$$\frac{(m+1)m^{n-1}}{[(m-1)n+2][(m-1)n+1]} \binom{mn}{n},$$

dans laquelle apparaissent cette fois les nombres d'arbres m-aires, divisé par $(m-1)n+2$, leur nombre de feuilles.

Enfin, la formule énoncée plus haut, qui donne le nombre de cartes non séparables à $i+1$ sommets et $j+1$ faces, contient elle aussi un nombre d'arbres divisé par leur nombre de feuilles, comme nous le verrons plus loin.

Il me reste maintenant à espérer que le lecteur est intrigué comme je l'ai été par ces «coïncidences» ! Je vais essayer dans la prochaine section de les expliquer simplement. Remarquons que nous suivons ici une démarche *a posteriori* typique de la combinatoire bijective. Cette démarche repose sur le postula suivant : *les formules d'énumération, lorsque elles sont simples, nous renseignent sur la structure des objets énumérés et «doivent» s'expliquer simplement.* En regardant les formules, nous sommes amenés à introduire des objets combinatoires qui en rendent compte naturellement et à chercher des relations entre ces nouveaux objets simples et les objets d'origine.

Mais pour commencer, il nous faut connaître encore quelques petites propriétés des cartes et de leur aptitude à se transformer en de multiples variantes. Une élégante introduction à ces jeux de transformations locales équivalentes est donnée dans la thèse de L. Grandboulan [80, section II.2] (voir aussi [143]). Nous nous contentons ici de quelques aspects bien connus.

À une carte planaire enracinée, nous allons associer une unique carte —*sa carte radiale*— dont tous les sommets sont de degré quatre. Par extension nous appelons carte radiale toute carte planaire enracinée dont tous les sommets sont de degré quatre (plutôt que *quartique* qui est vraiment trop laid). Cet abus de langage est justifié par le

Lemme 2.3 *Les cartes planaires enracinées à n arêtes sont en bijection avec les cartes radiales à n sommets.*

Démonstration. La construction, due semble-t-il à W. T. Tutte est illustrée par la figure 2.2. Elle rappelle la construction du graphe dérivé des arêtes (line graph) :

Soit C une carte planaire enracinée. Chaque arête de C possède deux extrémités, deux côtés et quatre *coins*. La carte radiale R de C a les arêtes de C pour sommet et les coins de C pour

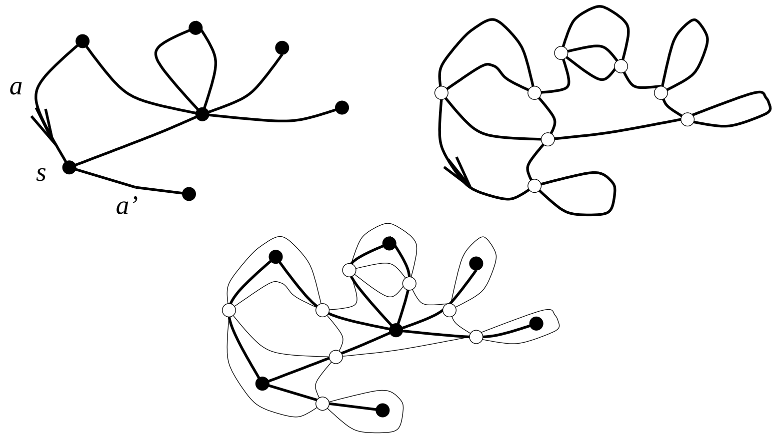


FIG. 2.2: Une carte planaire et sa carte radiale.

arêtes : chaque sommet de R est relié à ses quatre voisins par les quatre coins de l'arête de C auquel il correspond. Si C est enracinée sur une arête a qui arrive en un sommet s, alors soit a' l'arête suivant a dans le sens direct autour de s. On enracine R par l'arête qui joint a à a'.

Inversement soit R une carte radiale enracinée. Associons à R une unique carte planaire enracinée C. Comme tous les sommets de R sont de degré quatre, ses faces peuvent être coloriées en deux couleurs, de façon à ce que deux faces voisines ne soient pas de même couleur. On place un sommet de C dans la face qui borde l'arête racine de R à gauche, ainsi que dans toutes les faces de la même couleur. À travers chaque sommet s de R, on crée une arête qui joint les deux sommets de C voisins de s. Finalement on enracine C sur l'arête qui traverse le sommet racine de R et laisse sa face racine sur la droite. $\square$

2.1.3 Les cartes planaires sont des arbres conjugués

Nous pouvons maintenant essayer de rendre compte des formules de W.T. Tutte. Nous commençons par la formule pour les cartes planaires enracinées quelconques, puis nous traitons quelques autres exemples. Le but du jeu est, dans un premier temps, uniquement de «construire» ces formules, non de les prouver.

Cartes planaires quelconques

Dans la formule

$$\frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}$$

apparaît le nombre d'arbres binaires complets à n nœuds.

Considérons donc l'arbre binaire complet planté de la figure 2.3(a), qui a $n = 8$ nœuds[3] et $n + 2 = 10$ feuilles, en comptant la racine. Le nombre d'arbres binaires complets plantés avec n

[3]On désigne par *nœuds* les sommets internes, par opposition aux *feuilles* qui sont les sommets externes.

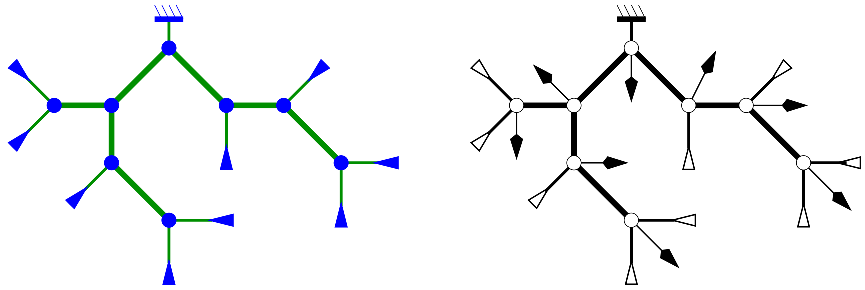


FIG. 2.3: (a) Un arbre binaire complet planté. (b) Un arbre bourgeonnant.

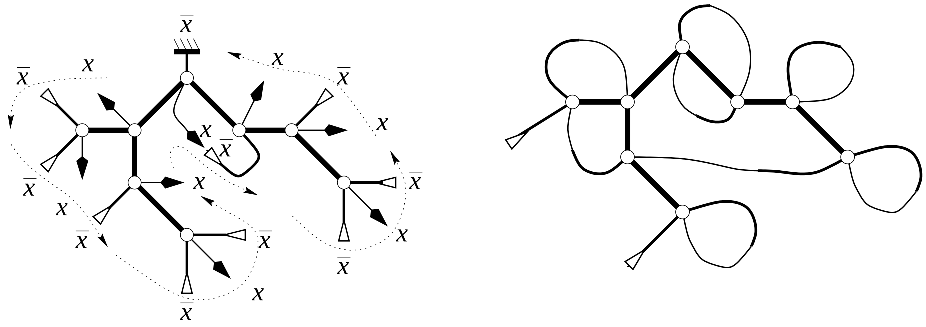


FIG. 2.4: (a) Appariement d'une feuille et d'un bourgeon. (b) Clôture partielle de l'arbre.

nœuds est

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Sur chacun des n nœuds de cet arbre, ajoutons un *bourgeon*. Tous les sommets ont alors degré quatre, comme on le voit sur la figure 2.3(b). Comme il y a trois façons d'ajouter un bourgeon sur un nœud, le nombre d'arbres *bourgeonnants* ainsi formés est

$$\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

À un arbre bourgeonnant nous associons son *mot de bord* : pour cela, on étiquette les bourgeons x et les feuilles $\bar{x}$ et on effectue un parcours préfixe gauche de l'arbre ; le mot de bord est obtenu en notant les étiquettes des bourgeons et des feuilles au fur et à mesure du parcours (on note l'étiquette de la feuille racine en dernier). Ainsi pour l'arbre de la figure 2.4(a), on obtient le mot

$$x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}xx\bar{x}\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}$$

Comme nous ne retenons que les feuilles au cours du parcours, il est équivalent de dire que le mot de bord est obtenu en tournant autour de l'arbre dans le sens direct. Un arbre bourgeonnant à n nœuds possède n bourgeons et $n+2$ feuilles.

Définissons l'opération fondamentale de nos bijections : *la clôture partielle d'un arbre bourgeonnant*. Pour cela, on considère le mot de bord comme un mot circulaire et lorsqu'un x est immédiatement suivi d'un $\bar{x}$, on *apparie* le bourgeon et la feuille associés, en formant une arête ; on recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux feuilles, on les appelle les *feuilles libres* de l'arbre (figure 2.4(b)). Au cours de l'opération de *clôture partielle* ainsi définie, une nouvelle face est fermée par chaque appariement d'arêtes. Sur le mot précédent, les appariement sont

$$x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}xx\bar{x}\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}$$

On voit que cet exemple est mal choisi car aucun des appariements ne «passe par dessus la racine» en utilisant le mot de bord vu comme mot cyclique.

Si on pose $\delta(x) = 1$ et $\delta(\bar{x}) = -1$, alors, d'après le lemme cyclique, les deux feuilles libres sont précisément les deux derniers minima de gauche à droite du mot de bord et le mot circulaire se factorise en deux mots de Lukacievicz :

$$x\bar{x}\bar{x} \quad x\bar{x}\bar{x} \quad x\bar{x}xx\bar{x}\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}$$

Ceci nous amène à définir la conjugaison d'arbres.

Définition 2.4 *Deux arbres sont* conjugués *s'ils sont obtenus l'un à partir de l'autre en changeant de feuille racine.*

Bien entendu, les classes de conjugaison sont simplement les arbres non plantés. Mais l'idée de conjugaison d'arbres fournit une analogie fructueuse avec la conjugaison des mots. Remarquons tout de suite la

Proposition 2.5 *Les mots de bord de deux arbres bourgeonnants conjugués sont conjugués. Les feuilles libres d'un arbre bourgeonnant sont définies indépendamment du choix de la racine.*

Par analogie encore avec les mots, définissons les arbres équilibrés, qui sont le pendant des mots de Lukacievicz.

Définition 2.6 *Un arbre bourgeonnant est un arbre* équilibré *si son mot de bord est un produit de mots de Lukacievicz (i.e. si la feuille racine est libre).*

Le corollaire du lemme cyclique appliqué à la conjugaison d'arbres est alors le

Corollaire 2.7 *Le nombre e_n d'arbres bourgeonnants équilibrés est*

$$\frac{2}{n+2} \cdot \frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Démonstration. Nous appliquons le lemme cyclique exactement comme pour compter les produits de mots de Lukacievicz (corollaire 2.2). Comptons de deux manières les triplets (A, x, y) formés d'un arbre A non planté muni de bourgeons et de deux feuilles x et y telle que y soit une feuille libre de A et x une feuille quelconque qui peut être égale à y.

- Les triplets sont de la forme (A_x, y) où A_x est un arbre bourgeonnant (planté) et y une des deux feuilles libres. Leur nombre est donc $2 \cdot \frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n}$.
- Les triplets sont aussi de la forme (A_y, x) où A_y est un arbre bourgeonnant équilibré et x l'une des $n+2$ feuilles. Leur nombre est donc $(n+2)e_n$.

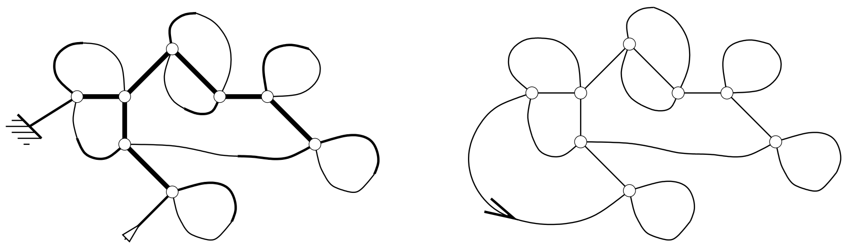


FIG. 2.5: (a) Clôture partielle d'un conjugué équilibré. (b) Clôture complète.

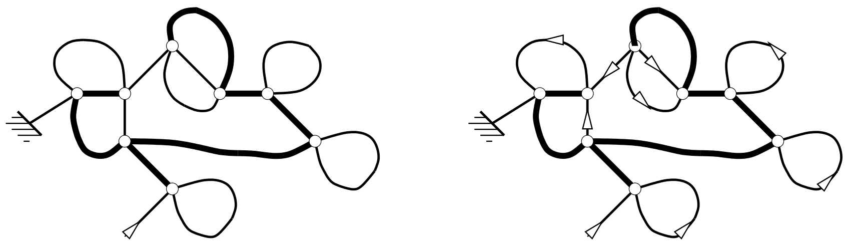


FIG. 2.6: (a) Un autre arbre couvrant. (b) Orientation induite.

Le corollaire suit en comparant les deux nombres obtenus. □

Restreignons maintenant la construction amorcée précédemment aux arbres équilibrés. Après la première étape de clôture, l'une des deux feuilles libres est alors la racine. Formons pour finir une arête orientée de la feuille racine vers la seconde feuille libre. Nous obtenons ainsi une carte planaire enracinée à n sommets qui sont tous de degré quatre. On reconnaît sur la figure 2.5(b) la carte radiale de la carte de la figure 2.2. Nous avons construit une application qui envoie un arbre équilibré sur une carte radiale enracinée. Nous l'appelons *clôture complète*. Contrairement à la clôture partielle, la clôture complète n'est définie que pour les arbres équilibrés.

Pour terminer notre «construction» de la formule de W.T. Tutte, énonçons le

Théorème 2.8 *L'opération de clôture complète définit une bijection des arbres bourgeonnants équilibrés à n nœuds vers les cartes radiales à n sommets et donc vers les cartes planaires enracinées à n arêtes.*

Démonstration. Ce théorème est un cas particulier (corollaire 2.17) du théorème 2.16 que nous démontrons à la section suivante. □

Nous allons quand même décrire quelques propriétés simples de l'opération de clôture qui permettent de cerner le point important de la construction.

Imaginons un algorithme d'«ouverture» des arêtes d'une carte radiale, qui serait réciproque de l'algorithme de clôture. La première étape en serait visiblement l'ouverture de la racine de la carte et la création de deux feuilles libres. La seconde étape est le choix du bon arbre couvrant. Par exemple, observons les figures 2.6 et 2.7. On choisit un autre arbre couvrant et on oriente correctement les arêtes autour de cet arbre (en mettant les deux feuilles libres de la racine dans

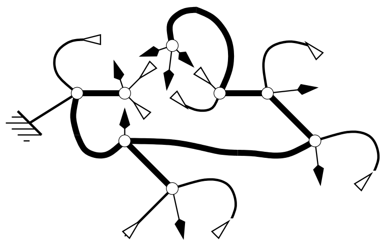


FIG. 2.7: Un arbre *non-bourgeonnant* dont la clôture redonne la carte de la figure 2.5.

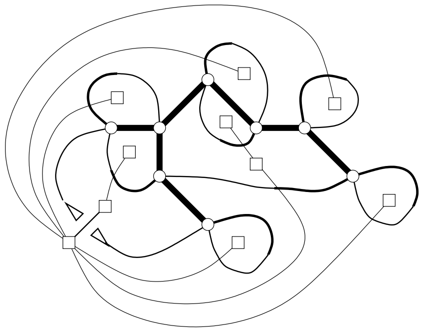


FIG. 2.8: L'arbre couvrant dual.

la face infinie). Alors l'ouverture des arêtes donne un arbre binaire complet planté, qui redonne la carte si on lui applique l'algorithme de clôture. Cet arbre est même équilibré au sens où son mot de bord est produit de deux mots de Lukacievicz ! Cependant il n'est pas bourgeonnant : en effet les bourgeons ne sont pas répartis correctement, *i.e.* un par sommet.

Le théorème peut donc s'énoncer sous la forme suivante : *Parmi tous les arbres couvrants des sommets d'une carte radiale R, un et un seul s'ouvre par rapport à la racine de R en un arbre bourgeonnant* (*i.e.* qui ne possède qu'un bourgeon par sommet). Et toute la difficulté de la réciproque est de trouver cet unique arbre couvrant, ou, de manière équivalente, de caractériser les arêtes de son complémentaire, qui doivent être ouvertes.

La propriété suivante nous dit que les arêtes du complémentaire de n'importe quel arbre couvrant des sommets forment elles-mêmes un arbre couvrant des faces. Par exemple, si on trace sur la carte de la figure 2.4 les arêtes duales de celles qui doivent être ouvertes, on obtient la figure 2.8.

Propriété 2.9 *Soit C une carte planaire et C' la duale*[4] *de C. Notons e' l'arête de C' duale d'une arête e de C et plus généralement, si A est un ensemble d'arêtes de C, A' désigne l'ensemble des arêtes duales.*

Alors si A est un arbre couvrant des sommets de C, le lemme de Jordan implique que $C' \setminus A'$ est un arbre couvrant de C'

Démonstration. En effet le lemme de Jordan, énoncé pour les cartes planaires, dit qu'un cycle

[4] *cf. page 24 ; la carte duale C' d'une carte C est la carte des incidences entre les faces de C : les sommets de C' sont les faces de C, les faces de C' sont les sommets de C et les arêtes de C' sont duales à celles de C.*

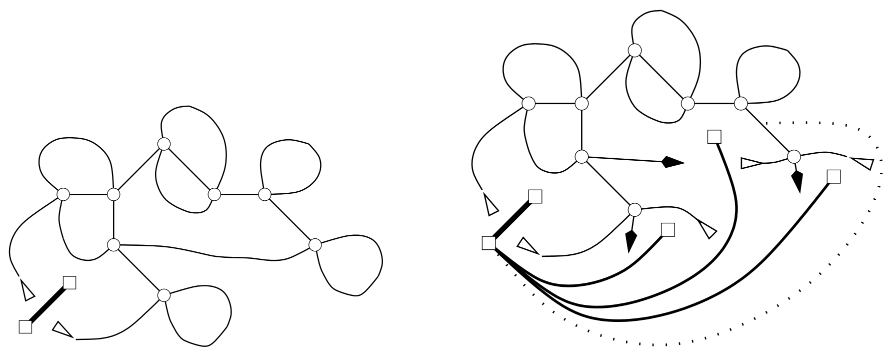


FIG. 2.9: (a) Ouverture de la racine. (b) Un conflit à profondeur 1.

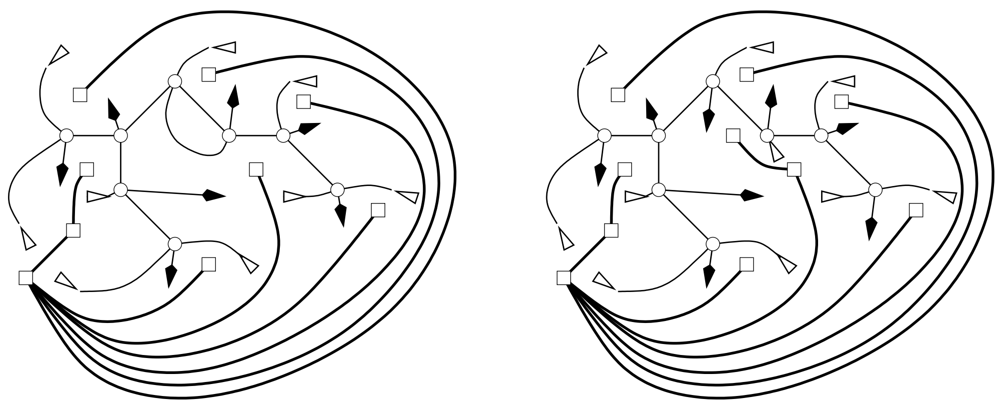


FIG. 2.10: (a) Ouverture à profondeur 1. (b) Ouverture complète, à profondeur 2.

sépare au moins deux faces. Il interdit donc l'existence d'un cycle dans $C' \setminus A'$ car celui-ci, dualement séparerait deux sommets de C et serait donc contraint de croiser l'arbre couvrant A de C. Le décompte des arêtes et la formule d'Euler montre alors que $C' \setminus A'$ est un arbre couvrant de C'. □

Le point fondamental de la démonstration du théorème, qui permet de donner l'algorithme réciproque, est alors le

Lemme 2.10 *Soit R une carte radiale, enracinée en a et R' sa duale, de racine a'. Soit A un arbre couvrant de R ne contenant pas a. D'après la propriété 2.9, $R' \setminus A'$ est un arbre couvrant de R'.*

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- *L'ouverture de R autour de A et par rapport à a donne un arbre bourgeonnant (i.e. n'a qu'un bourgeon par sommet).*
- *L'arbre $R' \setminus A'$ est obtenu par le parcours en largeur de R' à partir de l'arête a', en sens indirect.*

Rappelons l'algorithme de parcours en largeur (en anglais bfs-traversal pour «breadth first search»), effectué à partir d'une arête a', en sens indirect. L'arête a' est orientée dualement à a (*i.e.* la face racine de R' est le sommet racine de R).

1. Les deux sommets incidents à a' sont à profondeur $d = 0$.
2. Supposons les sommets à profondeur d atteints. S'il n'y a aucun sommet à profondeur $d+1$, tous les sommets ont été atteints, le parcours est terminé. Sinon,
   (a) Effectuer un parcours préfixe droit de l'arbre couvrant des sommets à profondeur au plus d, à partir de la gauche de la racine a'.
   (b) Chaque fois qu'une arête joignant un sommet à profondeur $d+1$ encore jamais atteint est rencontrée sur le bord de l'arbre, l'ajouter.
3. Incrémenter d et recommencer en 2.

L'utilisation d'un parcours préfixe droit (point 2.(a)) fait que les conflits entre plusieurs arêtes pouvant atteindre un même sommet, sont réglés. En effet, on donne ainsi la priorité à la première arête qui apparaît sur le bord de l'arbre lorsque l'on tourne autour de l'arbre en sens indirect à partir du coté gauche de la racine.

Les figures 2.9 et 2.10 illustrent l'ouverture des arêtes, qui peut se faire au fur et à mesure de la construction de l'arbre couvrant dual. On retrouve l'arbre bourgeonnant de départ.

La démonstration de ces résultats peut se faire par deux méthodes. La première est récursive et montre directement la bijection, sans réellement étudier les propriétés de l'algorithme réciproque. Nous l'utilisons dans la prochaine section pour traiter (relativement) rapidement le cas des cartes eulériennes qui généralise celui des cartes radiales. La seconde approche nécessite de mieux comprendre le lien entre le parcours en largeur dans la duale et l'arbre équilibré. Nous l'utiliserons au prochain chapitre pour montrer un résultat plus général valable pour les m-constellations.

Cartes planaires biparties

Considérons l'arbre binaire complet planté à n nœuds de la figure 2.11(a). Sur chacune des $n-1$ arêtes internes de cet arbre, ajoutons un sommet noir et un bourgeon, comme le montre la figure 2.11(b). Les sommets noirs, comme les nœuds blancs sont de degré trois. Comme il y a deux façons de placer chacun des $n-1$ bourgeons, le nombre d'arbres *bourgeonnants* ainsi formés est

$$\frac{2^{n-1}}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Le nombre de feuilles blanches est $n+2$ et le nombre de bourgeons $n-1$ de sorte que l'application de l'algorithme de clôture partielle laisse trois feuilles libres (figure 2.12). Le même raisonnement que précédemment donne le nombre d'arbres équilibrés de ce type :

$$\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2^{n-1}}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Nous terminons la construction en ajoutant un sommet blanc et en enracinant la carte ainsi obtenue sur ce sommet, en direction de la feuille libre. Comme l'illustre la figure 2.13, nous avons ainsi défini un algorithme de clôture *complète* qui construit une carte que W.T. Tutte appelle *bi-cubique* pour bipartie cubique. En effet, tous les sommets sont de degré trois, les sommets blancs ne

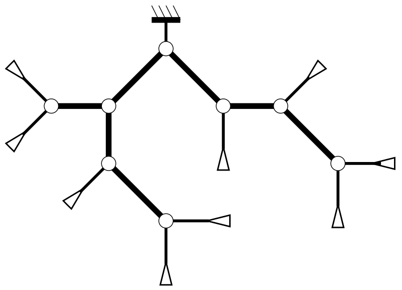


FIG. 2.11: (a) Un arbre binaire complet planté. (b) Un arbre bourgeonnant.

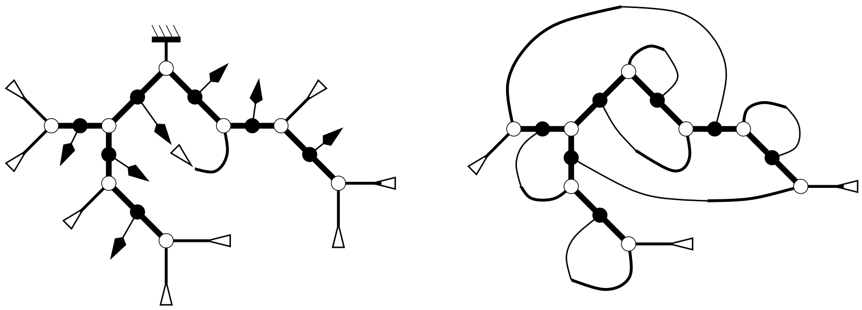


FIG. 2.12: (a) Appariement d'une feuille et d'un bourgeon. (b) Clôture partielle de l'arbre.

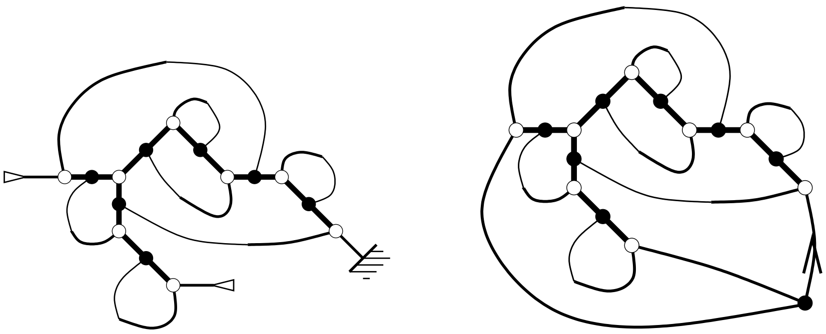


FIG. 2.13: (a) Clôture d'un conjugué équilibré. (b) Clôture complète.

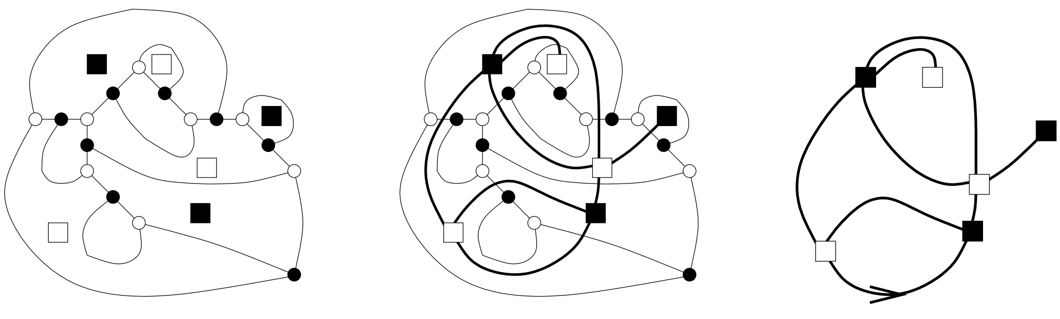


FIG. 2.14: Tri-coloration des faces d'une carte bi-cubique et carte bipartie associée.

sont voisins que de sommets noirs et réciproquement. Les cartes bi-cubiques sont, à la manière des cartes radiales pour les cartes quelconques, un avatar classique des cartes biparties. La figure 2.14 illustre le jeu de transformation locale qui fait passer de l'une à l'autre ; en effet, les faces d'une carte bi-cubique peuvent être coloriée en trois couleurs, de façon à ce que deux faces adjacentes ne soit pas de même couleur, et on construit une carte bipartie en utilisant deux des couleurs pour les sommets et la troisième pour les faces.

Théorème 2.11 *L'opération de clôture complète définit une bijection entre arbres équilibrés à n nœuds et cartes bi-cubiques à $2n$ sommets ou cartes biparties à n arêtes.*

Démonstration. Les cartes biparties à n arêtes sont les 2-constellations à n polygones (cf. définition 3.3 du chapitre 3). Ce théorème est donc un cas particulier ($m = 2$) du corollaire 3.6. $\square$

Qui plus est, l'algorithme réciproque est le même que précédemment, à la simple nuance que les trois faces adjacentes au sommet noir racine doivent être considérées à profondeur 0 pour initialiser le parcours en largeur.

Cartes non séparables

Considérons cette fois l'arbre ternaire complet planté de la figure 2.15(a). De part et d'autre de chaque arête interne, ajoutons un bourgeon sur la droite en regardant vers l'arête, comme le montre la figure 2.15(b). Il n'y a aucun choix à faire pour placer ces bourgeons et le nombre d'arbres *bourgeonnants* ainsi formés est le nombre d'arbres ternaires :

$$\frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}.$$

Le nombre de feuilles est $2n+2$ et le nombre de bourgeons $2(n-1)$ de sorte que l'application de l'algorithme de clôture laisse cette fois quatre feuilles libres (figure 2.16). Le même raisonnement que précédemment donne le nombre d'arbres bourgeonnants équilibrés :

$$\frac{4}{2n+2}\cdot\frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}.$$

Ajoutons un sommet et enracinons la carte ainsi obtenue sur ce sommet, en direction de la feuille libre. Pour obtenir une carte radiale, supprimons alors les arêtes internes de l'arbre ; en effet, un bourgeon a été ajouté aux extrémités de chaque arête interne, de sorte que tous les sommets sont de degré quatre, (figure 2.17). Les opérations de clôture partielle, ajout d'un sommet et oubli des arêtes forment cette fois la clôture complète. Remarquons sur la figure 2.17 que la carte radiale obtenue ne contient pas de *2-cocycle i.e.* pas de couple d'arêtes séparatrices, ou encore, la carte duale ne contient pas de cycle de longueur deux. Nous montrerons que cette propriété est toujours vérifié.

De plus cette propriété est caractéristique des cartes radiales associées aux cartes non séparables.

Propriété 2.12 *La bijection du lemme 2.3 entre cartes planaires quelconques et cartes radiales envoie les cartes planaires non séparables sur les cartes radiales sans 2-cocycle.*

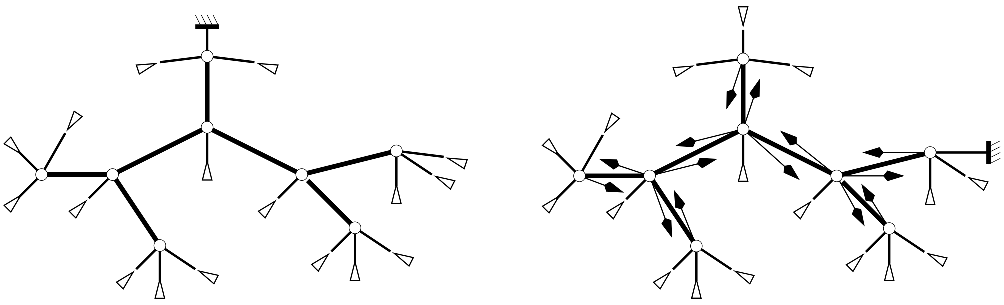


FIG. 2.15: (a) Un arbre ternaire complet planté. (b) Un arbre bourgeonnant.

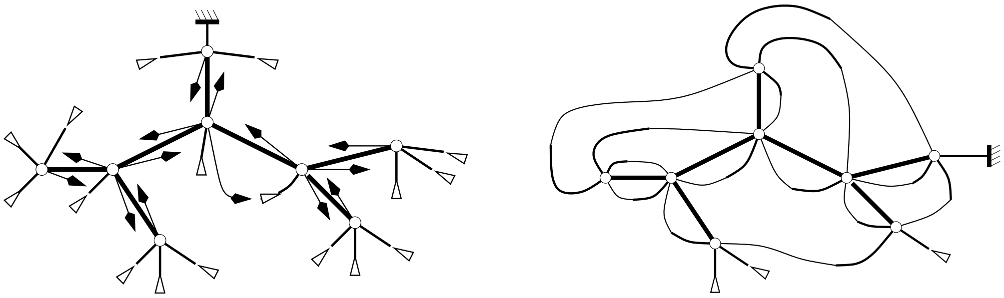


FIG. 2.16: (a) Un appariement. (b) Clôture partielle d'un conjugué équilibré l'arbre.

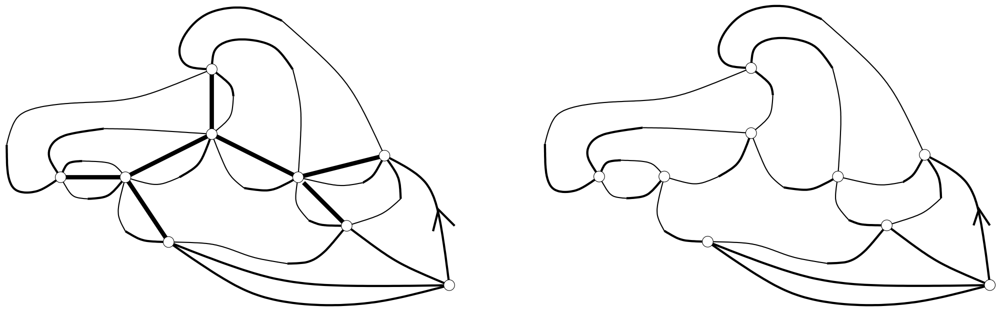


FIG. 2.17: (a) Ajout du sommet supplémentaire. (b) Oubli des arêtes de l'arbre.

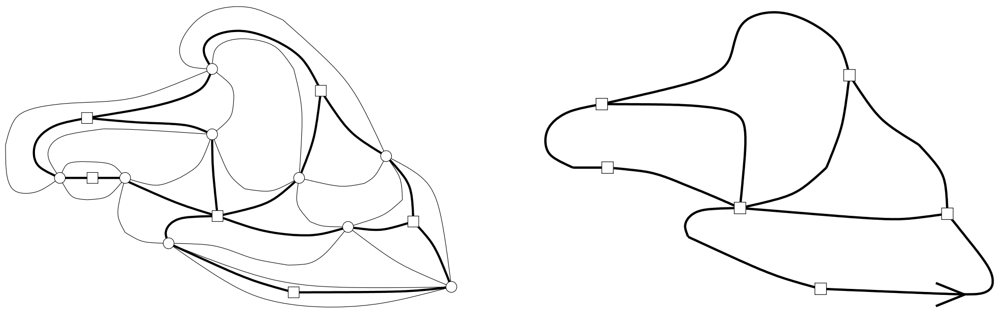


FIG. 2.18: Radiale sans 2-cocycle et carte non séparable associée.

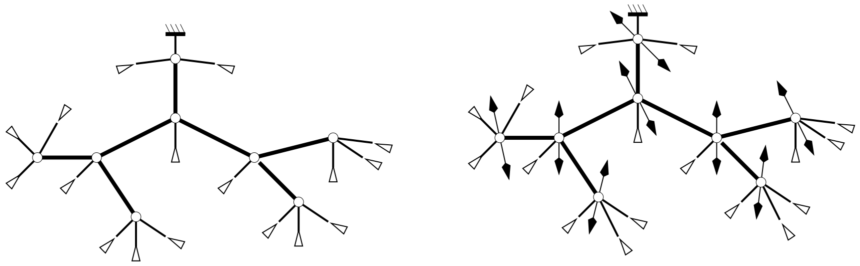


FIG. 2.19: (a) Un arbre ternaire complet planté. (b) Un arbre bourgeonnant.

Démonstration. Soit R la carte radiale d'une carte C. Les 2-cocycles de R correspondent exactement aux incidences doubles entre un sommet et une face de C. Or un sommet de C est séparateur si et seulement s'il existe une face qui lui est incidente deux fois. □

Nous démontrerons plus loin dans ce chapitre le

Théorème 2.13 *L'opération de clôture complète définit une bijection entre arbres bourgeonnants équilibrés à n nœuds et cartes radiales sans 2-cocycle à $n+1$ sommets ou cartes non séparables à $n+1$ arêtes.*

L'algorithme réciproque est cette fois basé sur la notion d'orientation bipolaire, largement étudiée par P. Rosenstiehl, H. de Fraissex et P. Ossona de Mendez. Nous nous appuierons sur certains de leurs résultats pour montrer notre théorème à la section 2.3. Toute la difficulté est de reconstituer les arêtes internes de l'arbre.

Cartes cubiques non séparables

Considérons l'arbre ternaire complet planté de la figure 2.19(a), qui est le même que précédemment. Sur chacune des n arêtes internes de cet arbre, ajoutons deux bourgeons diamétralement opposés, comme le montre la figure 2.19(b). Ensuite, «entre les deux bourgeons», dédoublons chacun de ces sommets de degré 6 à l'aide d'une arête pointillée, qui suit les bourgeons autour des sommets dans le sens direct (figure 2.20). Comme il y a deux façons de placer chacun des n couples de bourgeons, le nombre d'arbres *bourgeonnants* ainsi formés est

$$\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}.$$

Le nombre de feuilles est $2n+2$ et le nombre de bourgeons $2n$ de sorte que l'application de l'algorithme de clôture partielle laisse deux feuilles libres (figure 2.21(a)). Le même raisonnement que précédemment donne le nombre d'arbres bourgeonnants équilibrés de ce type :

$$\frac{2}{2n+2}\cdot\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}.$$

Nous joignons les deux feuilles libres par une arête orientée issue de la racine. Enfin nous oublions les arêtes pointillées de façon à obtenir une carte cubique et à définir l'opération de clôture complète. La carte obtenue sur la figure 2.21(b) est non séparable. Nous montrerons que cette propriété est toujours satisfaite à la section 2.3.4.

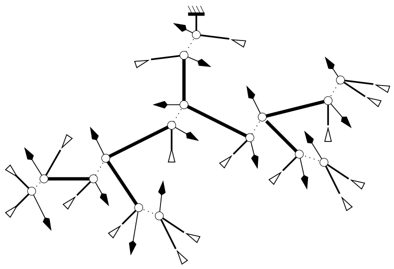


FIG. 2.20: Dédoublement des nœuds.

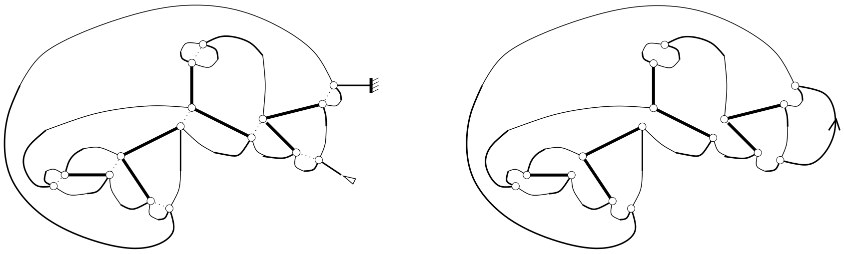


FIG. 2.21: (a) Clôture partielle d'un conjugué. (b) Sommet supplémentaire et oubli des arêtes factices.

Théorème 2.14 *L'opération de clôture complète définit une bijection entre arbres bourgeonnants équilibrés à n nœuds et cartes cubiques non séparables à $2n$ sommets ou, par dualité, triangulations sans boucles à $n+2$ sommets.*

La réciproque et la preuve sont très proches de celles utilisées pour les cartes non séparables ; là encore toute la difficulté est de replacer les arêtes factices.

2.1.4 Remarques et récapitulatif

Plutôt que de continuer à accumuler les exemples, et avant de passer aux démonstrations, formulons quelques remarques générales.

1. Les formules closes simples pour les cartes s'interprètent par la conjugaison d'arbres.
2. Les cartes planaires contiennent chacune un arbre couvrant canonique, choisi *uniformément* dans une famille d'arbres élémentaires. En particulier les propriétés statistiques de ces arbres élémentaires sont valides pour les arbres couvrants canoniques.
3. La conjugaison d'arbres est une méthode constructive, qui permet la génération aléatoire des cartes.
4. Les algorithmes réciproques (dont seul le premier a été décrit), bien que moins intuitifs, permettent de coder de façon optimale les cartes par des arbres simples, *sans étiquette*, en temps linéaire. Ces codages induisent des codages simples et compacts des cartes par des mots.

	Famille	nombre de	nombres de	degrés des
$\mathcal{C}$	cartes quelconques	arêtes	sommets et faces	
$\mathcal{R}$	cartes radiales	arêtes	faces $\oplus$ et $\ominus$	
$\mathcal{C}_2$	cartes biparties	arêtes	sommets blancs et noirs	faces
$\mathcal{E}_2$	cartes eulériennes	arêtes	faces	sommets
$\mathcal{H}$	hypercartes	brins	hyperarêtes et faces	sommets
$\mathcal{B}$	cartes bi-cubiques	arêtes	faces 1 et 2	faces 3
$\mathcal{C}_m$	constellations d'ordre m	polygones	sommets 1 à m	faces
$\mathcal{E}_m$	cartes m-eulériennes	arêtes	faces	sommets
$\mathcal{C}^2$	cartes non séparables	arêtes	sommets et faces	
$\mathcal{R}^2$	radiales sans 2-cocycle	sommets	faces $\oplus$ et $\ominus$	
$\mathcal{Q}^2$	quadrangulations simples	faces	sommets $\oplus$ et $\ominus$	
$\mathcal{CC}^2$	cubiques non séparables	sommets		
$\mathcal{T}^2$	triangulations sans boucles	faces		

TAB. 2.1: Classes d'équivalence de cartes obtenues par conjugaison et paramètres contrôlés.

La seconde remarque sera utilisée à la section 4.5 pour obtenir des bornes sur le diamètre des cartes. La troisième nous donne nos premiers algorithmes de génération à partir desquels travaillent les algorithmes de génération aléatoire *par extraction/rejet* du chapitre 5.

Finalement, nous récapitulons les différentes familles auxquelles la conjugaison d'arbres s'applique. Les démonstrations de la plupart de ces résultats occupent le reste du chapitre. Les constellations, pour lesquelles les formules d'énumération sont nouvelles et les preuves plus difficiles, font l'objet du chapitre 3.

Il est bien entendu que toutes les cartes considérées sont *planaires* et *enracinées*. Dans la table 2.1, nous donnons pour chaque famille de cartes différentes variantes qui s'obtiennent par transformations locales. On peut remarquer que les cartes biparties et cartes eulériennes sont en fait les 2-constellations et cartes 2-eulériennes.

2.2 Cartes eulériennes et arbres équilibrés

Les résultats de cette section sont les premiers résultats de conjugaison d'arbres que j'ai obtenus. Ils répondent à une question posée à plusieurs reprises par E.A. Bender et E. R. Canfield ([8, 11, 12]).

2.2.1 Cartes eulériennes

Nous donnons ici une première preuve complète de la bijection entre cartes radiales et arbres bourgeonnants équilibrés (théorème 2.8). Cette preuve est récursive et s'applique en fait à une famille de cartes un peu plus générale. En effet, nous remplaçons la condition

- tous les sommets sont de degré quatre,

qui définit les cartes radiales, par la condition

- tous les sommets sont de degré pair,

qui définit les cartes *eulériennes*[5].

Le résultat que nous démontrons ici est un cas particulier du théorème 3.5 qui fait l'objet du chapitre 3. La preuve récursive que nous donnons maintenant est plus facile, mais moins profonde (et moins formelle) que la preuve générale du chapitre 3. Nous la donnons quand même pour permettre au lecteur «de se faire la main» sur les arbres équilibrés...

Définissons une nouvelle famille d'arbres bourgeonnants, qui généralise celle des arbres binaires utilisée pour les cartes radiales. Nous appelons arbre *eulérien* un arbre plan planté sur les nœuds duquel sont ajoutés des bourgeons, de sorte que pour tout $i \geq 1$,

– un nœud d'arité initiale i reçoit $i-1$ bourgeons et devient donc de degré $2i$.

Le nombre de façons d'ajouter $i-1$ bourgeons à un nœud d'arité i est $\binom{2i-1}{i}$. Le nombre d'arbres plans plantés avec n_i nœuds d'arité i est donné par la formule d'Harary, Prins et Tutte (formule (1), page 54)

$$\frac{1}{\ell}\binom{\ell-1+n_1+\ldots+n_k}{\ell-1, n_1, \ldots, n_k},$$

dans laquelle $\ell+1$ est égal au nombre de feuilles (racine comprise), *i.e.* $\ell = 1 + \sum (i-1)n_i$, comme le montre un argument de comptage immédiat.

On en déduit le nombre d'arbres eulériens avec n_i nœuds de degré $2i$,

$$\frac{1}{\ell}\binom{\ell-1+n_1+\ldots+n_k}{\ell-1, n_1, \ldots, n_k}\prod_{i\geq 1}\binom{2i-1}{i}^{n_i}.$$

Ces arbres ont, par construction, $\ell-1$ bourgeons, de sorte que l'opération de clôture partielle laisse deux feuilles libres. Nous pouvons alors à nouveau appliquer l'argument du lemme cyclique pour conjuguer nos arbres, définir les arbres eulériens équilibrés et énoncer le

Lemme 2.15 *Le nombre d'arbres eulériens équilibrés (i.e. d'arbres eulériens dont le mot de bord est produit de deux mots de Lukacievicz), avec n_i nœuds de degré $2i$ est*

$$\frac{2}{\ell+1}\cdot\frac{1}{\ell}\binom{\ell-1+n_1+\ldots+n_k}{\ell-1, n_1, \ldots, n_k}\prod_{i\geq 1}\binom{2i-1}{i}^{n_i}.$$

Nous reconnaissons ici le nombre de cartes biparties évoqué page 63, ce qui est bon signe puisque ces cartes sont les cartes duales des cartes eulériennes qui nous intéressent.

Les opérations de clôtures partielle (cf. page 58) et complète (cf. page 70) s'étendent immédiatement aux arbres eulériens équilibrés et nous allons donc démontrer le

Théorème 2.16 *L'opération de clôture complète définit une bijection entre arbres eulériens équilibrés avec n_i nœuds de degré $2i$ et cartes eulériennes avec n_i sommets de degré $2i$, ou, par dualité, cartes biparties avec n_i faces de degré $2i$.*

Corollaire 2.17 (théorème 2.8) *La restriction du théorème précédent à $n_2 = n$ et $n_i = 0$ pour $i \neq 2$, définit une bijection entre les cartes radiales et les arbres bourgeonnants équilibrés de la définition 2.6.*

[5] L'origine de cette terminologie est à chercher du côté des cycles *eulériens* : un cycle eulérien est un cycle qui parcourt une fois et une seule toutes les arêtes et une carte admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair, comme l'avait remarqué Euler.

2.2.2 Application réciproque

Notons ϕ l'application qui associe à un arbre équilibré la carte eulérienne obtenue par clôture complète. Le lemme 2.10 de la section précédente affirme que, pour les cartes radiales, la construction réciproque est donnée par l'ouverture des arêtes de l'arbre d'un parcours en largeur de la carte duale. Cette propriété reste vraie dans le cas des cartes eulériennes. Pour le montrer nous décrivons une variante de l'ouverture des arêtes au fur et à mesure du parcours en largeur du dual (tel qu'illustré sur les figures 2.9 et 2.10).

Rappelons qu'un *pont* est une arête dont la suppression sépare la carte en deux composantes connexes non vides. Définissons l'application ψ qui à une carte eulérienne C associe un arbre équilibré $\psi(C)$ à l'aide de l'algorithme suivant, qui «tourne» autour de C en «ouvrant» les arêtes qui ne sont pas des ponts. Dans la suite de cette section, on considère les cartes comme plongées dans le plan avec la face infinie comme face racine.

Lors d'un parcours de la face infinie en sens direct autour de la carte, les arêtes qui ne sont pas des ponts sont rencontrées une seule fois et sont donc orientées par le parcours. Elles ont une origine et une extrémité. Par définition, l'*ouverture* d'une arête incidente à la face infinie consistera alors à supprimer l'arête et remplacer son origine par un bourgeon et son extrémité par une feuille. Au fur et à mesure de l'application de l'algorithme, des feuilles et des bourgeons vont être créés par ouverture et seront considérés comme des décorations et n'interviennent plus dans la suite de l'algorithme.

L'algorithme est alors

1. Ouvrir l'arête racine e_0 en formant (exceptionnellement) deux feuilles. L'arête courante est la première vraie arête qui suit l'extrémité de e_0 sur la face infinie.
2. Tourner dans la face infinie autour de la carte en sens direct tant que toutes les arêtes ne sont pas des ponts :
   (a) si l'arête courante n'est pas un pont, l'ouvrir.
   (b) la nouvelle arête courante est l'arête qui suit l'extrémité de l'ancienne autour de la face infinie.

Quand cet algorithme s'arrête la carte obtenue est toujours connexe puisque aucun pont n'a été coupé. De plus c'est un arbre car toutes les arêtes restantes sont des ponts. Nous posons $\psi(C)$ égal à cet arbre, planté sur la feuille origine de la racine de C.

Cet algorithme est bien équivalent à celui annoncé par le lemme 2.10 pour les cartes radiales. En effet comme on avance autour de la carte après avoir ouvert une arête e, on fait un tour complet avant de tenter d'ouvrir les arêtes qui ont été ajoutées sur la face infinie par l'ouverture de e. Ceci correspond au parcours *en largeur*. De plus, tourner en sens direct dans la face infinie autour de la carte revient bien à donner la priorité aux arêtes qui apparaissent en premier dans le sens indirect autour de l'arbre couvrant en largeur du dual.

2.2.3 Preuve du théorème

Il nous faut prouver les assertions suivantes,

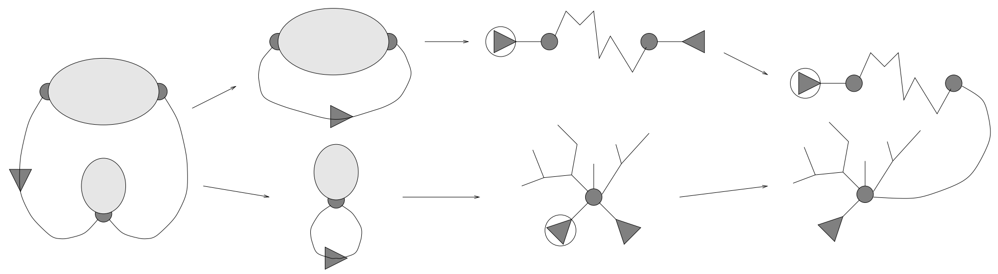


FIG. 2.22: Une étape de la récurrence dans le cas d'un séparateur.

- L'image d'un arbre eulérien équilibré avec n_i sommets de degré $2i$ par ϕ est une carte eulérienne avec n_i sommets de degré $2i$.
- L'image d'une carte eulérienne par ψ est un arbre eulérien équilibré.
- Pour toute carte eulérienne C et tout arbre eulérien A, $\psi(\phi(A)) = A$ et $\phi(\psi(C)) = C$.

Avec la définition de l'opération de clôture, le premier point est immédiat. De même la définition de ψ montre que $\psi(C)$ est un arbre équilibré et que $\phi(\psi(C)) = C$.

Il reste donc à démontrer que pour toute carte eulérienne C,

- l'arbre $\psi(C)$ est eulérien, *i.e.* exactement $i - 1$ bourgeons sont créés par l'ouverture sur un nœud de degré $2i$,
- il existe au plus un arbre eulérien équilibré A tel que $\phi(A) = C$.

Remarquons que si on admet la formule de Tutte, un seul de ces deux points suffit à conclure. Cependant nous démontrons simultanément les deux assertions par récurrence sur le nombre d'arêtes, ce qui redonne la formule de Tutte. La décomposition que nous utilisons correspond à la construction pas à pas de l'arbre couvrant en largeur et à l'ouverture d'une arête à la fois.

Soit C une carte eulérienne à n arêtes, a_0 son arête racine et soit a_1 l'arête suivant a_0 sur la face externe. Comme une carte eulérienne ne peut contenir de pont[6], il nous suffit de considérer trois cas :

- *a_0 et a_1 forment un 2-cocycle (cf. page 25).* Ce cas est illustré par la figure 2.22.

  Soit C_1 et C_2 les deux composantes connexes obtenues de cette manière et C_1' et C_2' les cartes eulériennes obtenues en fermant les deux demi arêtes dans C_1 et C_2. Remarquons que l'arête a_1 appartient forcément à tout arbre couvrant ne contenant pas a_0.

  Supposons que A soit un arbre eulérien équilibré tel que $\phi(A) = C$. Par construction, a_0 n'appartient pas à A donc A contient a_1. En coupant a_1 on obtient deux arbres eulériens A_1 et A_2 qui sont équilibrés car aucune autre arête ne joint C_1 à C_2 et qui vérifient $\phi(A_1) = C_1'$ et $\phi(A_2) = C_2'$. Nous en concluons que A_1 et A_2 existent et sont uniques par hypothèse de récurrence. Donc A existe et il est unique.
- *a_0 et a_1 ne forment pas un 2-cocycle.* Ce cas est illustré par la figure 2.23. Nous avons besoin du lemme suivant.

[6] à cause de la parité des degrés des sommets dans chaque composante

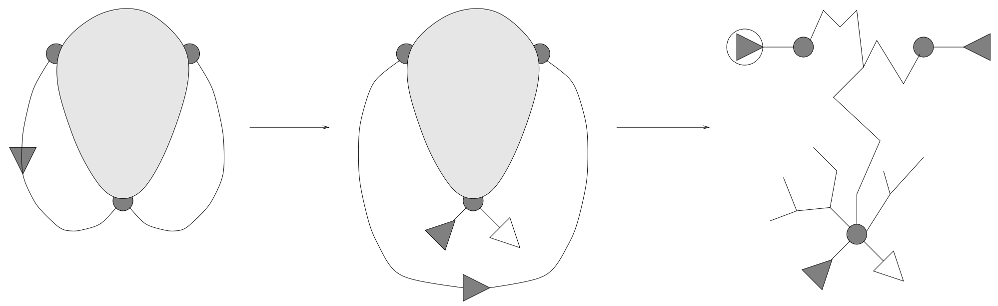


FIG. 2.23: Une étape de la récurrence dans le cas d'un séparateur.

Lemme 2.18 *Soit A un arbre eulérien et a une arête de A. En coupant a on obtient deux arbres A_1 et A_2. Alors, le nombre de feuilles de A_2 qui ne sont pas fermées par des bourgeons de A_2 (i.e. qui sont libres ou fermées par des bourgeons de A_1) est égal à un plus le nombre de bourgeons de A_2 qui ferment des feuilles de A_1.*

La preuve de ce lemme tient en deux lignes : l'arbre A_2 est eulérien et a donc deux feuilles de plus que de bougeons. Il suffit de compter les feuilles et bourgeons de chaque arbre pour conclure.

Considérons maintenant la démonstration du troisième cas et prouvons tout d'abord par l'absurde que a_1 ne peut appartenir à un arbre eulérien équilibré A tel que $\phi(A) = C$.

Supposons le contraire et soit A_1 et A_2 les arbres obtenus à partir de A en coupant a_1, A_1 étant celui qui contient l'origine de a_1 et A_2 son extrémité. Sur le bord de A_1, la feuille extrémité de a_0 précède immédiatement le bourgeon origine de a_1. Comme l'extrémité de a_0 est une feuille libre après la clôture partielle, on en déduit qu'aucune arête ne joint un bourgeon de A_1 à une feuille de A_2 (elle devrait passer «au dessus» de la feuille libre). D'après le lemme, ceci implique qu'au plus une arête joint un bourgeon de A_2 à une feuille de A_1. Avec a_0 et a_1, cette arête formerait alors un 3-cocycle (ou 3-séparateur, ou un cycle de longueur 3 dans la duale qui est bipartie), ce qui est exclu. Donc a_1 n'appartient pas à aucun arbre eulérien équilibré A tel que $\phi(A) = C$.

Coupons maintenant a_0 et a_1 et reformons une arête joignant l'origine de a_0 à l'extrémité de a_1. La carte C' ainsi obtenue a une arête de moins et possède donc un unique arbre eulérien équilibré A' tel que $\phi(A') = C'$. L'unique arbre eulérien équilibré A tel que $\phi(A) = C$ s'obtient à partir de A' en ajoutant la feuille extrémité de a_0 et le bourgeon origine de a_1.

– *la racine a_0 forme un boucle contenant C, i.e. $a_1 = a_0$.* Si C ne contient qu'une arête, a_0, alors $\psi(C)$ est un sommet de degré deux avec deux feuilles libres. Sinon, remarquons que l'algorithme de parcours en largeur donne le même résultat lorsqu'on change l'orientation de l'arête racine. En effet, l'orientation de la racine détermine uniquement lequel des deux sous-arbres issus de la racine sera parcouru en premier à chaque étape, or il ne peut y avoir de conflit, au cours de la construction de l'arbre en largeur, entre les arêtes ajoutées d'un côté et de l'autre de la racine car ceci impliquerait l'existence d'un cycle de longueur impair dans le dual, alors que celui-ci est biparti.

Mais si la racine a_0 forme une boucle qui contient C, alors en échangeant l'orientation de la racine, on obtient une carte C dans laquelle a_0 est une boucle qui définie une face bornée de degré 1. La discussion précédente assure que $\psi(C)$ et $\psi(C')$ ne diffère que par le choix de la feuille libre qui est racine, on peut donc traiter plutôt le cas de C', qui rentre dans le deuxième cas.

2.2.4 Compléments

Nous traitons maintenant une extension du théorème. En plus du degré des sommets et du nombre d'arêtes, deux autres paramètres que nous allons définir sont compatibles avec l'opération de clôture.

Les cartes eulériennes sont duales des cartes biparties. On peut donc associer un signe[7] aux faces d'une carte eulérienne de sorte que les faces positives ne soient adjacentes qu'à des faces négatives et réciproquement. On décide par convention que la face à gauche de la racine est positive.

Par exemple soit R la carte radiale d'une carte C. Alors les faces positives de R correspondent aux sommets de C tandis que les faces négatives de R correspondent aux faces de C.

Or la distribution du nombre de faces négatives et positives peut être transportée et lue directement sur les arbres eulériens ! En effet lors de l'opération de clôture partielle, à chaque fois qu'une arête est créée, une face est «fermée», tandis que l'ajout final de la racine ferme deux faces. Les faces d'une carte eulérienne obtenue par clôture complète d'un arbre eulérien A sont donc en bijection avec les feuilles de l'arbre A. On peut donc reporter le signe des faces sur les feuilles correspondantes et obtenir des arbres eulériens équilibrés *signés*.

La conjugaison d'un arbre signé entre deux feuilles de même signe préserve les signes, tandis qu'entre deux feuilles de signe opposé elle inverse tous les signes. Le nombre d'arbres eulériens signés conjugués à un arbre équilibré avec i feuilles positives est donc i. Mais la décomposition classique des arbres plans plantés s'étend sans problèmes aux arbres signés pour tenir compte du nombre de feuilles positives. Traitons par exemple le cas des cartes radiales. On voit sur la figure 2.24 les différents cas possibles, qui dépendent de la position du bourgeons.

On en déduit immédiatement le système d'équations suivant pour les séries génératrices des arbres bourgeonnants signés de racine positive ($uP(u,v)$) et négative ($vN(u,v)$) selon le nombre de feuilles positives (marquées par u) et négatives (marquées par v) :

$$\begin{aligned} P(u,v) &= v + P(u,v)^2 + 2P(u,v)N(u,v) \\ N(u,v) &= u + N(u,v)^2 + 2P(u,v)N(u,v). \end{aligned}$$

En vertu de la remarque sur le nombre de conjugués, la série génératrice $B(u,v)$ des arbres équilibrés signés plantés sur une feuille positive vérifie

$$\frac{\partial}{\partial u} B(u,v) = P(u,v).$$

[7] On pourrait aussi bien parler de faces blanches et noires.

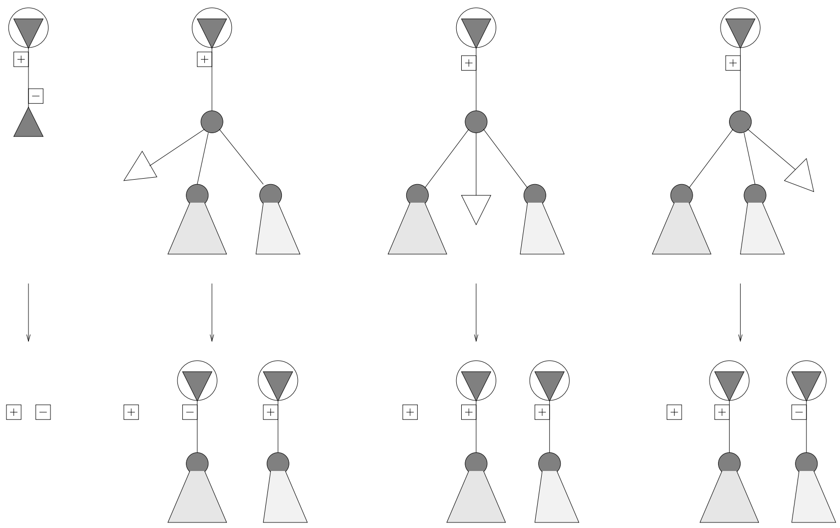


FIG. 2.24: La décomposition de $uP(u,v)$ en $uv + uP(u,v)^2 + 2uP(u,v)N(u,v)$.

Le corollaire 2.17 dit que la série génératrice $B(u,v)$ est aussi la série génératrice des cartes planaires selon le nombre de sommets et d'arêtes. Cette équation est une alternative amusante à l'équation trouvée par D. Arquès dans [3] pour le même paramétrage en termes de $P(u,v)$ et $N(u,v)$:

$$B(u,v) = P(u,v)N(u,v)(1 - 2P(u,v) - 2N(u,v)).$$

Cette série génératrice a été déterminée par W.T. Tutte avant D. Arquès, mais avec un paramétrage légèrement différent.

Plus généralement on obtient ainsi des équations pour les séries génératrices des cartes eulériennes selon les nombres de faces positives et négatives et en donnant des poids f_i aux degrés des sommets (ou pour les cartes biparties selon les nombres de sommets de chaque couleur) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} B(u,v) \quad &= \quad P(u,v), \qquad \text{où} \\
N(u,v) = v \quad &+ \quad \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \binom{i-1}{j-1} N(u,v)^j P(u,v)^{i-j} f_i, \\
P(u,v) = u \quad &+ \quad \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \binom{i-1}{j-1} P(u,v)^j N(u,v)^{i-j} f_i.
\end{aligned}$$

Il semble que ces équations soient nouvelles.

2.3 Non séparabilité et orientations bipolaires

Le cas des cartes non séparables et des cartes cubiques non séparables est un peu plus délicat à traiter, à cause des arêtes qui sont supprimées à la fin de l'algorithme de clôture complète. La preuve se décompose en trois étapes : dans un premier temps, (théorème 2.21) les arbres équilibrés sont mis

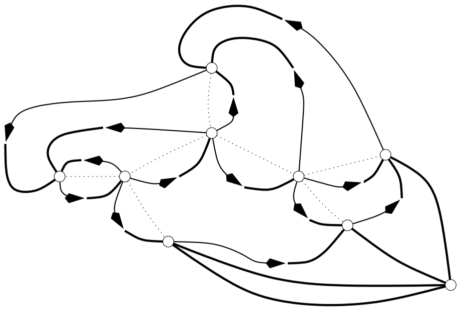


FIG. 2.25: Carte radiale de la figure 2.17 avec l'orientation induite par la clôture.

en bijection avec une famille de cartes radiales *orientées*. Dans un deuxième temps (section 2.3.2) je reprends quelques résultats connus sur *les orientations bipolaires* et finalement ces résultats sont utilisés à la section 2.3.3 pour montrer que les cartes radiales orientées du théorème 2.21 sont exactement les cartes radiales sans 2-cocycle, associées aux cartes non séparables.

La théorie des orientations bipolaires, à laquelle j'ai été initié par H. de Fraissex et P. Ossona de Mendez, permet de simplifier un peu la présentation les preuves. Cependant, par contrecoup, un peu de pratique de ces notions (voir en particulier [45]) peut s'avérer utile pour bien les comprendre. Une extension naturelle des résultats qui suivent concerne le codage par conjugaison d'arbres de diagrammes de contact de segments. Cependant ce problème, issu d'une discussion avec P. Ossona de Mendez, sort un peu du cadre des cartes planaires dans lequel je préfère me tenir.

2.3.1 Conjugaison d'arbres et orientations

Dans la construction de la page 65, on considère un arbre ternaire complet à n nœuds, auquel on ajoute des bourgeons : à chaque extrémité de chaque arête interne, un bourgeon est placé à droite en regardant vers l'arête. Il n'y a donc pas de choix dans l'ajout des bourgeons et leur nombre est $2n-2$. Il reste alors quatre feuilles libres après clôture des arêtes. Nous utilisons le lemme cyclique pour compter les arbres équilibrés, par la même méthode que précédemment (cf. corollaire 2.7).

Lemme 2.19 *Le nombre d'arbres bourgeonnants équilibrés avec n nœuds est*

$$\frac{4}{2n+2}\cdot\frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}.$$

Nous appliquons alors l'algorithme de clôture partielle, suivi de l'adjonction d'un sommet de degré 4, et de l'enracinement de la carte obtenue sur l'arête arrivant à la feuille libre racine de l'arbre. Puis nous supprimons les arêtes internes. Le tout forme l'opération de clôture complète.

Sur l'exemple de la figure 2.25, repris de l'introduction, nous constatons que si on garde la trace des bourgeons, la carte obtenue est munie d'une orientation et que les faces non adjacentes au sommet racine vérifient la condition suivante :

(1) Exactement deux arêtes sont orientées en sens direct autour de la face.

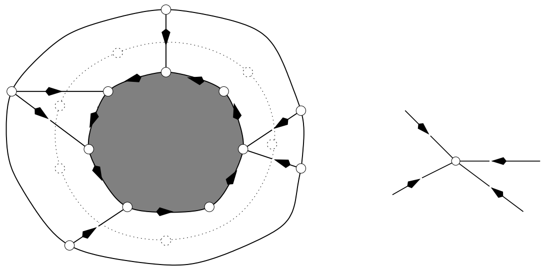


FIG. 2.26: Deux exemples de cocycles interdits dans une orientation minimale.

Définition 2.20 *Étant donnée une carte C et un sommet s, nous dirons qu'une orientation est* s-conforme[8] *si la condition (1) est vérifiée pour toutes les faces non adjacentes à s.*

Une orientation s-conforme de C est minimale *si, hormis le 4-cocycle issu de s, aucun cocycle n'est à la fois* rentrant *et* appuyé sur un cycle de sens direct *(éventuellement vide). La figure 2.26 illustre deux configurations non minimales.*

La notion d'orientation s-conforme est duale de la notion d'orientation *à deux entrantes* utilisée dans [45], ce dont nous nous servirons plus loin. Nous commençons par démontrer le

Théorème 2.21 *L'algorithme de clôture complète définit une bijection entre les arbres bourgeonnants équilibrés avec n nœuds et les cartes radiales à $n+1$ sommets, munies d'une orientation s-conforme. De plus cette orientation est minimale.*

Démonstration. Soit ϕ l'application qui à un arbre équilibré associe la carte radiale obtenue par clôture complète.

Inversement, étant donnée une carte radiale R munie d'une orientation s-conforme minimale, soit $\psi(R)$ l'arbre obtenu par les opérations suivantes (nous démontrerons qu'il s'agit bien d'un arbre) :

- Supprimer le sommet racine.
- Ajouter une arête par face, entre les origines des deux arêtes de sens direct.
- Ouvrir les arêtes orientées, en plaçant un bourgeon à l'origine et une feuille à l'extrémité.

Il nous faut montrer les assertions suivantes :

1. L'image par ϕ d'un arbre équilibré à n nœuds est une carte radiale à $n+1$ sommets, munie d'une orientation s-conforme minimale.
2. L'image par ψ d'une carte radiale munie d'une orientation s-conforme minimale est un arbre bourgeonnant équilibré.
3. Pour toute carte radiale R munie d'une orientation s-conforme minimale et tout arbre A équilibré, $\phi(\psi(R)) = R$ et $\psi(\phi(A)) = A$.

Par définition de ψ, il est clair que $\psi(\phi(A)) = A$.

[8] *Cette terminologie est adoptée faute de mieux...*

Montrons la première partie du point 1. Par construction, $\phi(A)$ est une carte radiale avec le bon nombre de sommets. Après la clôture partielle, une seule arête orientée borde chaque face bornée en sens direct : celle qui la «ferme» lors de la construction des appariements. On en déduit qu'une seule arête interne de l'arbre borde chaque face bornée : celle qui porte le bourgeon de son arête orientée en sens direct. La suppression des arêtes internes apparie donc les faces bornées deux à deux, pour donner des faces bordées par deux arêtes orientées en sens direct. Ainsi la carte $\phi(A)$ est munie d'une orientation s-conforme.

Pour le point 3, on peut remarquer que si $\psi(R)$ est un arbre, il est couvrant et équilibré. On a alors $\phi(\psi(A)) = A$.

Il reste donc à démontrer le

Lemme 2.22 *Soit R une carte radiale munie d'une orientation s-conforme. Alors $\psi(R)$ est un arbre si et seulement si l'orientation est minimale.*

Par définition, si l'orientation n'est pas minimale, il existe un cocycle rentrant appuyé sur un cycle de sens direct. La règle de placement des arêtes internes de l'arbre ne fournit aucune arête joignant la composante intérieure au cocycle à la composante extérieure, ce qui exclut qu'on obtienne un arbre couvrant.

Inversement si l'orientation ne construit pas un arbre, les arêtes internes ajoutées définissent au moins deux composantes connexes. Soit A et B les deux sous-ensembles non vides d'arêtes internes correspondants. Soit F_A (resp. F_B) la réunion des faces qui contiennent les arêtes de A (resp. B). La frontière entre ces deux domaines comporte des sommets couverts par soit uniquement par A, soit uniquement par B. En effet si un sommet x de la frontière est couvert par A, alors l'arête précédente en sens direct autour de A est orientée vers x (sinon une arête de B arriverait en x). Il s'en suit qu'une arête de A arrive au sommet précédent, qui est donc couvert par A. Après avoir fait le tour complet de la frontière, on conclut que A est entouré d'un cycle direct et que les arêtes qui bordent ce cycle à l'extérieur sont rentrantes : l'orientation n'est pas minimale. □

2.3.2 Orientation bipolaires

Les orientations s-conformes qui apparaissent dans le théorème précédent sont liées aux orientations bipolaires des graphes 2-connexes. Ces orientations sont un outil utile de l'algorithmique des graphes comme le montre l'article de synthèse [45]. Elles ont été étudiées en détail dans [119] et nous utiliserons les quelques résultats suivants, tirés de ces deux références. Les ébauches de preuves ne sont là que pour donner un minimum d'intuition sur le sujet.

Définition 2.23 *Soit e une arête orientée d'un graphe G. Une orientation e-*bipolaire *de G est une orientation acyclique de G possédant exactement un puits et une source, tous deux incidents à l'arête e.*

Proposition 2.24 *Soit C une carte planaire, R sa carte radiale, e une arête orientée de C et s le sommet de R associé à e.*

La carte C possède une orientation e-bipolaire, si et seulement si elle est non séparable.

*Les orientations e-bipolaires de C sont en bijection avec les orientations s-*conformes *de R.*

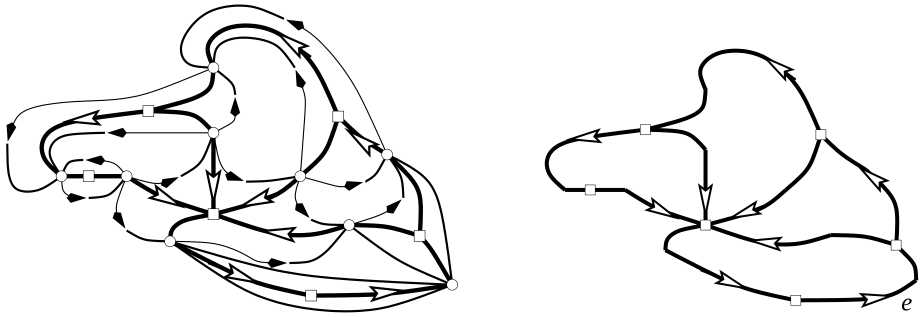


FIG. 2.27: Orientation e-bipolaire associée à l'orientation s-conforme de la figure 2.26.

La figure 2.27 montre l'orientation e-bipolaire de la carte non séparable dont la carte radiale est donnée à la figure 2.26.

Démonstration. Voir [45]. Les auteurs de cet article travaillent avec les quadrangulations ou cartes des angles qui sont les duales des cartes radiales (toutes leurs faces sont de degré quatre). La notion d'orientation s-conforme se traduit alors par celle *d'orientation à deux entrantes*. Nous continuons à utiliser les cartes radiales pour rester proche des arbres équilibrés.

Montrons d'abord la première assertion. Soit C une carte munie d'une orientation e-bipolaire. Il est immédiat que C ne possède pas de boucle. Dans une carte orientée, chaque composante 2-connexe possède soit un puits et une source, soit un cycle. Quand l'orientation est e-bipolaire, les cycles sont exclus et il n'y a qu'un puits et une source adjacente. Il suffit alors de considérer un sommet séparateur x et les deux sous cartes séparées. Au mieux le puits de l'une et la source de l'autre sont en x, mais alors le puits et la source restante ne sont pas adjacents. Réciproquement, l'algorithme de la figure 2.28 fournit une orientation e-bipolaire.

Pour la deuxième assertion, considérons une orientation s-conforme de R, carte radiale de C. L'arête e est orientée par hypothèse. Le sommet x sur lequel arrive e est associé à une face de R et chaque arête de cette face sépare deux arêtes incidentes à x. Si cette arête est de sens indirect autour de x, les deux arêtes sont de même type (entrant ou sortant en x), sinon elles sont de type opposé. Suivant cette règle de proche en proche, on oriente toute la carte C. À l'aide du lemme de Jordan on vérifie qu'aucune contradiction n'apparaît au cours du déroulement de l'algorithme.

Inversement, le lemme de Jordan montre que dans une orientation bipolaire planaire les arêtes entrantes apparaissent consécutivement autour d'un sommet. Mis à part aux extrémités de e nous pouvons donc définir ainsi deux angles *latéraux* par sommet : ces angles sont les deux qui séparent les arêtes entrantes des arêtes sortantes du sommet. Dualement, autour d'une face, les arêtes forment deux chemins confluents et définissent un angle puits et un angle source qui sont les deux uniques angles non latéraux bordant cette face.

Chaque arête a de R joint deux arêtes de C en longeant un angle α de C, autour d'un sommet x de C. Orientons l'arête a dans le sens direct autour de la face x de R si α est latéral, dans le sens indirect sinon.

L'orientation de R obtenue est bien s-conforme car, mis à part autour de s il y a bien deux angles latéraux autour de chaque sommet de C et deux angles non latéraux autour de chaque face de C. Cette construction inverse bien la précédente. □

Le lemme suivant est nécessaire pour ajuster notre notion d'orientation s-conforme *minimale* avec celle de [119, 45]. En effet dans leur définition, une orientation est minimale si elle ne contient aucun cocycle rentrant (sans condition sur le cycle d'appui). Il se trouve cependant que ces deux notions sont équivalentes.

Lemme 2.25 *Toute orientation s-conforme non minimale d'une carte radiale contient un 4-cocycle entrant. De plus ce 4-cocycle arrive sur un cycle de sens direct.*

Démonstration. Seule la première partie de la démonstration est donnée dans [119]. Pour la seconde partie, il suffit de remarquer qu'un 4-cocycle de la carte radiale d'une carte C correspond à une paire de sommets séparateurs de C. On voit alors que l'orientation e-bipolaire de C entre dans la composante par un des sommets et sort par l'autre, d'où on déduit la disposition l'orientation des arêtes du cycle sur lequel arrive le cocycle. □

Définition 2.26 *Une orientation e-bipolaire est* minimale *si l'orientation s-conforme associée est minimale.*

Proposition 2.27 *Toute carte non séparable enracinée (C, e) possède une unique orientation e-bipolaire minimale.*

Démonstration. Voir [45] et [119] pour une théorie plus complète des orientations bipolaires, en particulier dans le cas des cartes planaires 2 et 3-connexes. L'existence d'une orientation bipolaire minimale est basée sur la remarque suivante : *une orientation s-conforme le reste si l'orientation de toutes les arêtes d'un cocycle est changée.* On montre alors qu'un algorithme glouton de changement de sens des cocycles permet de se ramener à une orientation minimale. L'unicité s'obtient naturellement avec la théorie développée dans [119]. Elle se démontre aussi, de manière un peu fastidieuse, par une décomposition récursive des cartes non séparables. □

Enfin la figure 2.28 donne un algorithme linéaire de calcul de l'unique orientation e-bipolaire minimale de C, tiré de [119].

Lemme 2.28 *L'algorithme* `oriente` *fournit en temps linéaire l'orientation bipolaire minimale de la carte non séparable C.*

Démonstration. Voir [119]. Il est clair que cet algorithme est linéaire et qu'il fournit une orientation bipolaire d'une carte non séparable. La minimalité se démontre en vérifiant par récurrence qu'à chaque étape de la boucle principale, aucun cycle n'est créé. □

2.3.3 Cartes non séparables

La proposition 2.24, combinée à l'existence et l'unicité de l'orientation bipolaire minimale donne une bijection entre cartes radiales munies d'une orientation s-conforme minimale et cartes non séparables.

Algorithme `oriente`

`entree` : une carte non séparable planaire enracinée (C, e)

`sortie` : l'orientation e-bipolaire minimale de C

L'algorithme utilise une liste L, initialisée à $[x_0]$ où x_0 est l'origine de e. A chaque sommet x, une arête $n(x)$ est associée à partir du moment où il est rencontré pour la première fois. Au départ, $n(x_0)$ est initialisé à l'arête suivant e dans le sens indirect.

- Tant que la liste L n'est pas vide, soit x son premier élément.
  - Si toutes les arêtes issues du sommet x sont orientées, le supprimer de la liste.
  - Sinon, retirer x de la liste et,
    - partir de $n(x)$ et orienter les arêtes en tournant en sens direct autour de la face bordant $n(x)$ sur sa gauche, jusqu'à atteindre un sommet déjà visité ;
    - si les sommets successivement parcourus sont $x, x_1, \ldots, x_k, y$, avec y déjà vu, ajouter $[x_1, \ldots, x_k]$ en tête de la liste ;
    - pour tout i de $1, \ldots, k$ poser $n(x_i)$ égal à l'arête suivant dans le sens indirect l'arête $x_i x_{i+1}$ qui vient d'être parcourue ;
    - changer $n(x)$ en l'arête suivante dans le sens indirect autour de x et remettre x en tête de liste.

FIG. 2.28: Construction d'une orientation linéaire minimale.

Le théorème 2.21 permet alors d'énoncer le

Théorème 2.29 *L'opération de clôture complète définit une bijection entre arbres équilibrés à n nœuds et cartes non séparables à $n+1$ arêtes, via les cartes radiales à n sommets sans 2-cocycles.*

De même que dans le cas des cartes eulériennes, il est possible de raffiner ce résultat en tenant compte des nombres de sommets et de faces des cartes non séparables, c'est-à-dire des nombres de faces positives et négatives des cartes radiales.

Pour cela on pourrait là aussi donner des signes aux feuilles de l'arbre équilibré, mais il est plus naturel de donner les signes aux arêtes internes : en effet, excepté les quatre faces incidentes au sommet racine, chaque face de la carte radiale contient une arête interne.

La disposition des bourgeons fait alors que le signe d'une arête est donné par sa «direction», verticale ou horizontale (figure 2.29) : si on imagine les sommets représentés par des croix à angle droit, la feuille racine est verticale, les arêtes positives sont verticales et les négatives sont horizontales.

Théorème 2.30 *L'opération de clôture complète définit une bijection entre arbres équilibrés à $i-1$ arêtes internes verticales et $j-1$ horizontales et cartes non séparables à $i+1$ sommets et $j+1$ faces.*

Pour compter les arbres selon leur nombre d'arêtes verticales et horizontales, on met une étiquette 0 aux nœuds liés à leur père par une arête interne verticale et 1 aux nœuds liés à leur père par une arête horizontale. Enfin on impose au fils de la feuille racine de porter l'étiquette 0. Un arbre possède alors $i-1$ arêtes internes verticales et $j-1$ horizontale si et seulement si il possède i

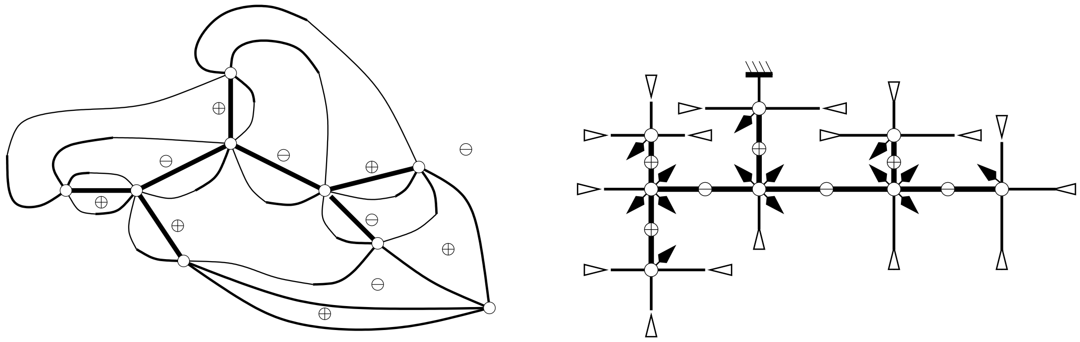


FIG. 2.29: (a) Faces positives et négatives. (b) Arêtes positives verticales et négatives horizontales.

nœuds pairs et $j-1$ nœuds impairs. La parité d'un sommet est alors donnée récursivement par les deux règles suivantes : le fils de la racine est pair et les trois fils gauche, central et droit ont respectivement une parité identique, opposée et identique à leur père, ce qui nous permet, au chapitre 5 (lemme 5.5), de démontrer que le nombre d'arbres ternaires complets plantés à i nœuds pairs et $j-1$ nœuds impairs ou encore à $i-1$ arêtes internes verticales et $j-1$ horizontales est

$$\frac{1}{2j-1}\binom{i+2j-2}{i}\binom{2i+j-2}{j-1} = \frac{(i+2j-2)!(2i+j-2)!}{i!(2j-1)!(j-1)!(2i-1)!}.$$

Comme la conjugaison entre feuilles verticales ne change pas les directions, on peut appliquer le lemme cyclique aux feuilles verticales et obtenir alors le nombre d'arbres équilibrés à $i-1$ arêtes internes positives (ou verticales) et $j-1$ arêtes internes négatives (ou horizontales). Le nombre de feuilles verticales est $2j$, parmi lesquelles 2 sont libres, de sorte qu'on obtient ainsi le

Corollaire 2.31 *Le nombre de cartes non séparables à $i+1$ sommets et $j+1$ faces est*

$$\frac{(2i+j-2)!(i+2j-2)!}{(2i-1)!(2j-1)!i!j!}.$$

2.3.4 Cartes cubiques non séparables

La démonstration de la bijection du théorème 2.14 entre arbres équilibrés et cartes cubiques non séparables est une variation sur le thème des orientations e-bipolaires.

Soit ϕ l'application de clôture complète, qui associe à un arbre équilibré une carte cubique, via la clôture partielle, l'ajout d'une arête racine et l'effacement des arêtes factices. Inversement soit C une carte cubique non séparable d'arête racine e. Munissons la carte C de son unique orientation e-bipolaire minimale (cf. propositions 2.24 et 2.27). La carte radiale R de C est ainsi munie d'une orientation s-conforme minimale. Chaque face bornée de R contient deux arêtes de sens direct, qui définissent deux coins de la carte C. Autour de chaque face de C on obtient ainsi deux coins entre lesquels on ajoute une arête factice. En chaque sommet de C (excepté s) arrive alors une arête factice, on ouvre l'arête qui la précède dans le sens direct autour du sommet pour former un bourgeon. Nous allons montrer que le résultat obtenu est un arbre que nous appelons $\psi(C)$.

Démonstration du théorème 2.14. Il nous faut montrer les assertions suivantes :

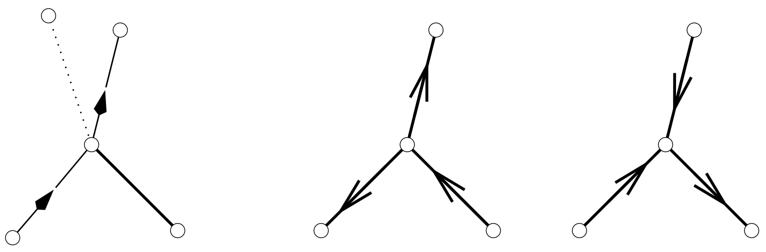


FIG. 2.30: (a) Chaque sommet porte un bourgeon. (b) L'arête portant le bourgeon et la suivante sont de même sens.

1. L'application ϕ associe à un arbre équilibré une carte cubique non séparable, munie d'une orientation bipolaire minimale.
2. L'application ψ associe à une carte cubique, munie d'une orientation bipolaire minimale, un arbre équilibré.
3. Étant donné un arbre équilibré A et une carte cubique non séparable C, $\phi(\psi(A)) = A$ et $\phi(\psi(C)) = C$.

Comme pour les démonstrations précédentes, la seule partie difficile est de montrer l'équivalence entre le fait que $\psi(C)$ est un arbre et la minimalité de l'orientation bipolaire.

En effet pour montrer que la carte $\phi(C)$ est munie d'une orientation bipolaire, il suffit d'appliquer un algorithme glouton d'orientation à partir de la racine : chaque sommet de C porte un bourgeon et on impose que le sens (entrante ou sortante) de l'arête issue du bourgeon soit identique à celui de la suivante et opposé à celui de la précédente. La figure 2.30 illustre les deux cas possibles. Le lemme de Jordan permet de montrer qu'aucune contradiction n'apparaît en cours de route et que l'orientation obtenue est e-bipolaire. On en déduit aussi que $\phi(C)$ est non séparable.

Il faut montrer pour conclure le

Lemme 2.32 *Soit C une carte cubique non séparable, munie d'une orientation e-bipolaire. Alors $\psi(C)$ est un arbre si et seulement si l'orientation est minimale.*

On peut au choix réinterpréter explicitement la minimalité en termes d'orientation bipolaire (*i.e.* il faut parler de composantes inversibles, cf. [119]) ou travailler à nouveau sur la carte radiale de C pour continuer à utiliser notre définition de minimalité. Dans les deux cas, on conclut en vérifiant, comme pour le lemme 2.22, que l'existence de deux composantes dans $\phi(C)$ correspond à une violation de la minimalité. □

Chapitre 3

Constellations et formule d'Hurwitz

Dans ce chapitre nous utilisons l'idée de conjugaison d'arbres pour étudier les *constellations* planaires. Cette approche nous permet de généraliser à la fois un théorème d'A. Hurwitz et le résultat de W.T. Tutte sur les cartes eulériennes que nous avons redémontré au chapitre précédent. Non seulement la conjugaison d'arbres est l'ingrédient principal qui nous permet de compter et de construire les constellations, mais les méthodes plus classiques (combinatoire et analytique comme au chapitre 1 ou algébrique comme au chapitre 7) ne semblent pas pouvoir donner le résultat dans ce cas.

Après l'exposé de nos résultats (section 3.1), nous introduisons les arbres m-eulériens et donnons les bijections (section 3.2). Ensuite nous détaillons la preuve et nous donnons une extension qui en découle (sections 3.3 et 3.4).

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec M. Bousquet-Mélou [29].

3.1 Constellations

Nous présentons d'abord nos résultats en terme de *factorisations de permutations*, ce qui nous permet de les relier à un théorème d'A. Hurwitz. Dans un deuxième temps, nous définissons les *constellations* pour replacer nos résultats dans la lignée de ceux de W.T. Tutte. Enfin nous faisons une courte digression sur le lien entre constellations non enracinées et revêtements de la sphère.

3.1.1 Factorisations de permutations et théorème d'Hurwitz

Soit σ_0 une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Une *factorisation ordonnée* de σ_0 est un m-uplet $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ de permutations de $\mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m = \sigma_0$.

L'énumération des factorisations ordonnées d'une permutation fait l'objet de nombreuses études. Ses motivations variées font que diverses conditions peuvent être imposées aux facteurs. Voici quelques conditions souvent rencontrées dans la littérature.

– **Le type cyclique des facteurs.** On peut imposer à chaque facteur σ_i de faire partie d'une classe de conjugaison donnée de $\mathfrak{S}_n$; ceci revient à calculer des *constantes de structure* du groupe symétrique. Une formule très générale peut être donnée en termes de caractères (voir le chapitre 7 et [129, p.68]). Comme la *longueur transpositionnelle* (*i.e.* le nombre d'inversion) des permutations est sous-multiplicative, on voit que la constante de structure est nulle si la condition suivante n'est pas satisfaite :

$$\sum_{i=1}^{m} [n - c(\sigma_i)] \geqslant n - c(\sigma_0),$$

où $c(\sigma_i)$ désigne le nombre de cycles de σ_i (qui ne dépend que de sa classe de conjugaison). De manière équivalente[1],

$$\sum_{i=1}^{m} c(\sigma_i) \leqslant n(m-1) + c(\sigma_0). \tag{1}$$

- **La condition de minimalité générale.** On peut se concentrer sur le cas extrême :

  $$\sum_{i=1}^{m} c(\sigma_i) = n(m-1) + c(\sigma_0), \tag{2}$$

  qui est minimal en termes des longueurs transpositionnelles des facteurs. Ce problème revient à calculer les constantes de structure extrémales, connues sous le nom anglais de *top connection coefficients* [73]. Le résultat le plus connu dans ce cadre concerne le cas où tous les facteurs sont des transpositions et σ_0 est un n-cycle (*i.e.* un cycle de longueur maximale). La condition (2) s'écrit $m = n - 1$ et le nombre de factorisation de ce type est n^{n-2}, qui est aussi le nombre d'arbres de Cayley [47, 116, 78].
- **La condition de transitivité** impose que le groupe engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ agisse transitivement sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cette condition étend la condition de transitivité des couples (α, β) qui code les cartes (cf. section 1.1.2) et s'interprète comme une condition de connexité pour les objets topologiques associés. Cette condition est largement étudiée et nous l'imposerons dans tout ce chapitre.
- **La condition de minimalité transitive.** La borne supérieure sur $\sum c(\sigma_i)$ donnée par (1) n'est plus optimale sous la condition de transitivité. Par exemple, toute factorisation transitive d'une permutation σ_0 en m transpositions vérifie l'inégalité suivante [76, 133] :

  $$m \geqslant n + c(\sigma_0) - 2 \tag{3}$$

  qui est plus restrictive que l'inégalité $m \geqslant n - c(\sigma_0)$ donnée par (1). De (3), on déduit facilement l'inégalité suivante, valide pour toutes les factorisations transitives de σ_0 [111] :

  $$\sum_{i=1}^{m} c(\sigma_i) \leqslant n(m-1) - c(\sigma_0) + 2, \tag{4}$$

  qui est plus restrictive que (1). Cette inégalité peut s'exprimer en terme du *genre* des objets topologiques associés et généralise en ce sens la formule (1) donnée page 23 pour les cartes combinatoires.

[1] La condition (1) est nécessaire, mais pas suffisante, pour que la constante de structure correspondante soit non nulle.

Nous allons maintenant nous concentrer sur les factorisations *minimales transitives*. Le cas où tous les facteurs sont des transpositions a été résolu au siècle dernier par A. Hurwitz [88] (voir aussi [76, 133]).

Théorème 3.1 (Hurwitz) *Soit $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$. Soit σ_0 une permutation de $\mathfrak{S}_n$ avec d_i cycles de longueur i, pour $i \geqslant 1$. Alors le nombre de m-uplets $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ de* transpositions *de $\mathfrak{S}_n$ tels que :*

- $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m = \sigma_0$,
- *le groupe engendré par $\tau_1, \ldots, \tau_m$ agit transitivement sur $\{1, 2, \ldots, n\}$,*
- $m = n + c(\sigma_0) - 2$, *où $c(\sigma_0)$ désigne le nombre de cycles de σ_0,*

est

$$H_{\sigma_0} = n^{c(\sigma_0)-3}(n + c(\sigma_0) - 2)! \prod_{i \geqslant 1} \left[\frac{i^i}{(i-1)!}\right]^{d_i}.$$

En termes de factorisations, le résultat principal de ce chapitre est l'énumération des factorisations minimales transitives *pour des facteurs de type cycliques quelconques.* Après avoir énoncé notre théorème nous montrons qu'il implique celui d'Hurwitz. Par contre, il ne semble pas facile d'utiliser ce dernier résultat pour en déduire directement le nôtre.

Théorème 3.2 *Soit $n \geqslant 1$. Soit σ_0 une permutation de $\mathfrak{S}_n$ avec d_i cycles de longueur i, pour $i \geqslant 1$. Pour $m \geqslant 0$, soit $G_{\sigma_0}(m)$ le nombre de m-uplets $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ de permutations de $\mathfrak{S}_n$ tels que :*

- $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m = \sigma_0$,
- *le groupe engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ agit transitivement sur $\{1, 2, \ldots, n\}$,*
- $\sum_{i=0}^m c(\sigma_i) = n(m-1) + 2$, *où $c(\sigma_i)$ désigne le nombre de cycles de σ_i.*

Alors pour $m \geqslant 2$,

$$G_{\sigma_0}(m) = m \; \frac{[(m-1)n - 1]!}{[(m-1)n - c(\sigma_0) + 2]!} \; \prod_{i \geqslant 1} \left[i \binom{mi-1}{i}\right]^{d_i}.$$

Nous dirons qu'une factorisation ordonnée est *propre* si aucun de ses facteurs n'est l'identité. Le principe d'inclusion-exclusion implique que le nombre de m-factorisations transitives minimales propres de σ_0 est, pour $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 0$,

$$F_{\sigma_0}(m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} G_{\sigma_0}(k). \tag{5}$$

Remarquons qu'une factorisation propre $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ vérifie $\sum_{i=0}^m c(\sigma_i) \leqslant c(\sigma_0) + m(n-1)$. Si elle est aussi transitive et minimale, alors $\sum_{i=0}^m c(\sigma_i) = n(m-1) + 2$ et donc, $m \leqslant n + c(\sigma_0) - 2$. De plus, le choix $m = n + c(\sigma_0) - 2$ impose à $c(\sigma_i)$ d'être $n-1$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, de sorte que chaque facteur est une transposition. Ceci montre que le nombre de factorisations minimales transitives en transpositions est

$$H_{\sigma_0} = F_{\sigma_0}(d)$$

où $d = n + c(\sigma_0) - 2$.

Il nous faut donc calculer $F_{\sigma_0}(d)$. Remarquons que, pour tout $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$ fixé, le théorème 3.2 nous donne explicitement un polynôme $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, de degré $d = n+c(\sigma_0)-2$ telle que $G_{\sigma_0}(m) = P(m)$ pour tout $m \geqslant 0$ (*i.e.* pour σ_0 fixé $G_{\sigma_0}(m)$ *est* un polynôme en m). De plus, si on définit l'opérateur de différence finie Δ par $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$, la formule (5) se réécrit en :

$$F_{\sigma_0}(m) = \Delta^m P(0).$$

Mais de manière générale, pour tout polynôme de degré d et de coefficient dominant p_d, $\Delta^d P(0) = d! p_d$ (en effet, $\Delta^d(x^d) = d!$ et $\Delta^d(x^k) = 0$ si $k < d$). Ceci implique que H_{σ_0} est, à une factorielle près, le coefficient dominant de $P(x)$:

$$\begin{aligned} H_{\sigma_0} &= F_{\sigma_0}(d) \\ &= \Delta^d P(0) \\ &= d![x^d]P(x) \\ &= (n + c(\sigma_0) - 2)!\, n^{c(\sigma_0)-3} \prod_{i \geqslant 1} \left[\frac{i^i}{(i-1)!}\right]^{d_i}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité nous donne exactement le théorème d'Hurwitz.

3.1.2 Constellations

Nous donnons maintenant une interprétation en termes de cartes aux factorisations de permutations. Cette interprétation étend le lien entre cartes combinatoires et cartes topologiques décrit à la section 1.1.2. Commençons par définir les constellations. Dans ce chapitre nous ne considérons que des constellations *planaires*, bien qu'il soit possible d'étendre la définition en genre supérieur.

Définition 3.3 *Soit $m \geqslant 2$. Une m-constellation est une carte* planaire *dont les faces sont coloriées en noir ou en blanc de sorte que*

- *toutes les faces adjacentes à une face blanche sont noires et inversement.*
- *les faces noires sont de degré m.*
- *les faces blanches ont un degré multiple de m.*

Nous parlerons de *polygones* pour désigner les faces noires d'une constellation. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les constellations que nous considérons sont toujours enracinées. Remarquons qu'il est possible d'étiqueter les sommets d'une m-constellation avec les entiers $1, 2, \ldots, m$ de sorte que les sommets de tous les polygones soient étiquetés $1, 2, \ldots, m$ en sens direct. Par convention, nous choisissons d'étiqueter 1 et 2 l'origine et l'extrémité de l'arête racine. Ceci détermine *l'étiquetage canonique* de la constellation (cf. figure 3.1).

À l'objection que nos constellations ne ressemblent pas beaucoup à celles qui illuminent nos cieux, nous répondrons que la terminologie[2], qui est due à A. Zvonkin, est plus naturelle si on remplace chaque polygone par une étoile (cf. figure 3.2) : nous obtenons alors un ensemble connexe d'étoiles, qui rappelle sans conteste une constellation [84].

[2] Remarquons que A. Jacques utilisait le mot «constellation» dans le sens où nous employons le mot «carte» [100].

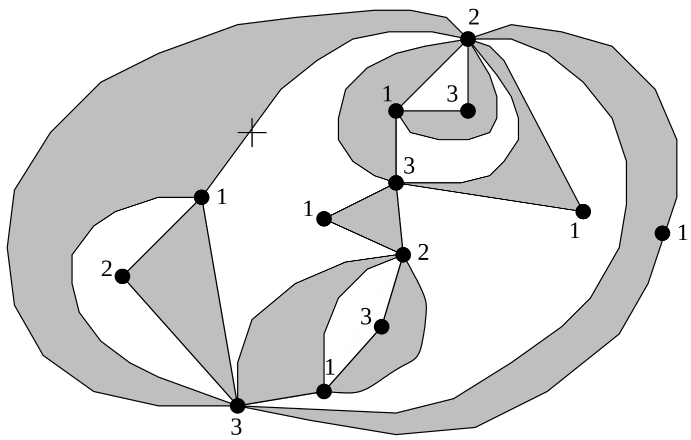


FIG. 3.1: Une 3-constellation enracinée et son étiquetage canonique.

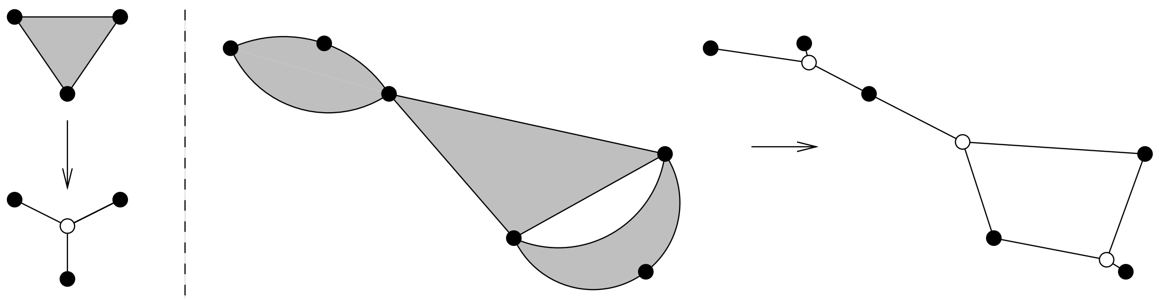


FIG. 3.2: Ainsi naissent les constellations.

Le lien entre constellations et factorisations est décrit par la

Proposition 3.4 *Soit $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$. Il existe une bijection entre m-uplets $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ de permutations de $\mathfrak{S}_n$ tels que :*

- *le groupe engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ agit transitivement sur $\{1, 2, \ldots, n\}$,*
- *$\sum_{i=0}^{m} c(\sigma_i) = n(m-1) + 2$, où $\sigma_0 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$,*

et les m-constellations enracinées à n polygones, numérotés de 1 à n de façon à ce que le polygone contenant l'arête racine ait 1 comme numéro. De plus, si la constellation possède d_i faces blanches de degré mi, alors σ_0 possède d_i cycles de longueur i.

Démonstration. Soit C une m-constellation enracinée formée de n polygones numérotés de 1 à n. Rappelons qu'il y a aussi un étiquetage canonique canonique des sommets de C par $1, 2, \ldots, m$. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, chaque polygone est adjacent à exactement un sommet étiqueté i : ainsi, en tournant en sens indirect autour des sommets étiquetés i, on définit une permutation des n polygones que l'on note σ_i, et que l'on identifie à une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Comme la constellation est connexe, le groupe engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ agit transitivement sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

De plus, soit W une face blanche de degré mi : elle est bordée de i sommets étiquetés m. Soit $B_1, B_2, \ldots, B_i$ les i polygones noirs adjacentes à W par une arête étiquetée $(1, m)$, ordonné en sens direct autour de W. Alors la permutation[3] $\sigma_0 = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m$ envoie B_j sur B_{j+1} pour $1 \leqslant j \leqslant i$ (avec $B_{i+1} = B_1$). Ainsi, chaque cycle de σ_0 correspond à une face blanche de C et le type cyclique de σ_0 est donné par les degrés des faces blanches.

Finalement, le nombre de sommets de C est $v = \sum_{i=1}^m c(\sigma_i)$, le nombre de ses faces est $f = n + c(\sigma_0)$ et le nombre de ses arêtes est $e = nm$. La constellation C est dessinée sur la sphère, de sorte que la formule d'Euler (cf. lemme 1.2) $s + f = e + 2$ s'écrit $\sum_{i=0}^m c(\sigma_i) = n(m-1) + 2$.

Inversement, soit $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ un m-uplet de permutations ainsi que spécifié par la proposition. Considérons des polygones noirs à m côtés, dont les sommets sont étiquetés de 1 à m dans le sens direct et des polygones blancs à mi côtés pour $i \geqslant 1$, dont les sommets sont étiquetés $1, 2, \ldots, m, 1, 2, \ldots, m$, *etc.* dans le sens indirect. Prenons n polygones noirs, numérotés de 1 à n et $c(\sigma_0)$ polygones blancs, parmi lesquels d_i sont de degré mi. Le m-uplet $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ donne des relations d'incidence entre ces $n + c(\sigma_0)$ polygones. En respectant ces relations, on recolle les polygones entre eux en identifiant des arêtes. Un peu de topologie générale ([114, chap.1]), nous permet d'affirmer que ceci donne un unique plongement cellulaire dans une surface compacte sans bord. La condition $\sum_{i=0}^m c(\sigma_i) = (m-1)n + 2$ garantit, via la formule d'Euler, que la surface est la sphère et donc que nous avons construit une constellation planaire. □

Exemple. À partir de la constellation étiquetée C de la figure 3.3, on obtient $\sigma_1 = (1)(2,3)$, $\sigma_2 = (1,2,3)$ et $\sigma_3 = (1,3)(2)$. On vérifie alors que $\sigma_0 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (1)(2)(3)$, en accord avec le fait que C a trois faces blanches de degré 3.

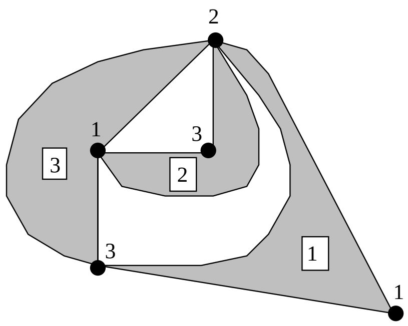


FIG. 3.3: Une 3-constellation dont les polygones sont étiquetés.

Il y a $(n-1)!$ manières différentes de numéroter les polygones d'une constellation enracinée à n polygones et $n!/\prod_{i\geqslant 1}\left[i^{d_i} d_i!\right]$ permutations ont exactement d_i cycles de longueur i. On en déduit que la proposition 3.4 implique l'équivalence entre le théorème 3.2 et le théorème 3.5 suivant, auquel nous allons maintenant nous consacrer.

Théorème 3.5 *Soit $m \geqslant 2$. Le nombre de m-constellations C avec d_i faces blanches de degré mi,*

[3]Nous multiplions les permutations de droite à gauche, comme nous composons les fonctions.

pour $i \geqslant 1$, est

$$C_m(d_1, d_2, \dots) = m(m-1)^{f-1} \frac{[(m-1)n]!}{[(m-1)n-f+2]!} \prod_{i \geqslant 1} \frac{1}{d_i!} \binom{mi-1}{i-1}^{d_i},$$

où $n = \sum i d_i$ est le nombre de polygones, et $f = \sum d_i$ le nombre de faces blanches de C.

Nous en déduisons immédiatement les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.6 *Soit $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$. Le nombre de m-constellations à n polygones est*

$$C_m(n) = \frac{(m+1)m^{n-1}}{[(m-1)n+2][(m-1)n+1]} \binom{mn}{n}.$$

Démonstration. Nous utilisons une transformation locale simple qui met en bijection les m-constellations et les $(m+1)$-constellations dont les faces blanches sont de degré $m+1$ (de sorte que $d_i = 0$ pour $i \neq 0$). Le corollaire découle alors du théorème 3.5, en remplaçant m par $m+1$ et en posant $d_1 = n$, $d_i = 0$ pour $i \geqslant 2$.

Pour décrire cette bijection, nous utilisons l'étiquetage canonique des sommets. Nous ajoutons au centre de chaque face blanche un nouveau sommet étiqueté $m+1$ et nous y attachons le centre de chaque arête $(m, 1)$ qui borde la face (cf. figure 3.4). Ainsi nous obtenons une $(m+1)$-constellation dont les faces blanches sont de degré $m+1$ (puisque chacune d'entre elles contient exactement un sommet étiqueté $m+1$). Cette construction est «visiblement» inversible. □

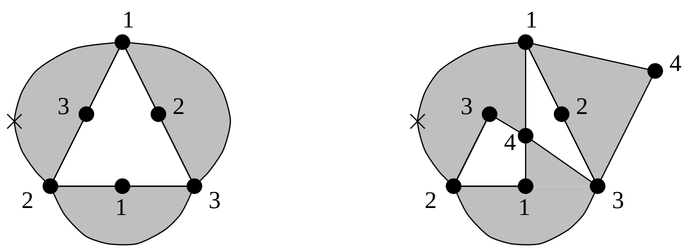


FIG. 3.4: D'une 3-constellation à une 4-constellation dont toutes les faces sont de degré 4.

Les constellations planaires avec une seule face blanche sont parfois appelées *cactus* [26, 72] et au chapitre 7 nous étudions leurs analogues en genre supérieur. Pour $d_n = 1$, $d_i = 0$ du $i \neq n$ le théorème 3.5 donne le nombre de m-cactus à n polygones.

Corollaire 3.7 *Pour $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$, le nombre de m-cactus à n polygones est*

$$\frac{1}{(m-1)n+1} \binom{mn}{n}.$$

Remarques

1. Les cactus correspondent aux factorisations ordonnées d'un n-cycle de $\mathfrak{S}_n$, que nous étudions au chapitre 7.

2. I.P. Goulden et D.M. Jackson ont donné dans [72] une belle formule close pour le nombre de factorisations minimales ordonnées $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ d'un n-cycle telles que chaque facteur σ_i appartienne à une classe de conjugaison fixée de $\mathfrak{S}_n$. En termes de cactus, ceci revient à fixer le degré des sommets de chaque couleur. Le corollaire 3.7 se déduit de leur résultat par une sommation ou en réutilisant leur équation fonctionnelle en ne tenant compte que des nombres de polygones. Au chapitre 7 nous proposons une généralisation au genre quelconque de cette formule de Goulden et Jackson.

3. Remarquons que $\frac{1}{(m-1)n+1}\binom{mn}{n}$ est le nombre d'arbres m-aire avec n sommet. Une bijection simple entre m-cactus et arbres m-aire a été proposée par Michel Bousquet [27]. La conjugaison d'arbres que nous utilisons ici pour prouver le théorème 3.5 fournit une bijection différente entre ces objets (cf. section 3.2).

3.1.3 Cartes m-eulériennes

Nous appelons *cartes m-eulériennes* les cartes duales des m-constellations. La définition des constellations induit la caractérisation suivante des cartes m-eulériennes (cf. figure 3.5).

Définition 3.8 *Une carte planaire est* m-eulérienne *si elle est bipartie (avec des sommets noirs et blancs) et si*

- *le degré des sommets noirs est m.*
- *tous les sommets blancs ont un degré multiple de m.*

La terminologie se justifie par le cas $m = 2$: dans une carte 2-eulérienne tous les sommets noirs sont de degré deux. Ils se fondent donc avec les deux arêtes qui les bordent pour ne laisser que des sommets blancs, tous de degré pair. Les cartes 2-eulériennes sont donc exactement les cartes eulériennes du chapitre 2.

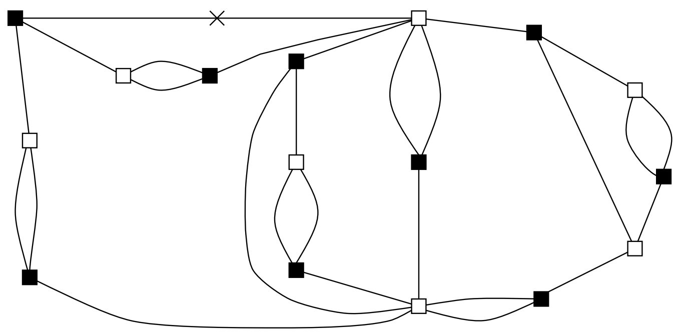


FIG. 3.5: Une carte 3-eulérienne, duale de la 3-constellation de la figure 3.1.

Naturellement, il est équivalent de compter les cartes m-eulériennes ou les m-constellations. En particulier, le théorème 3.5 donne le nombre de cartes m-eulériennes avec d_i sommets blancs de degré mi, pour $i \geqslant 1$. Pour $m = 2$, nous retrouvons le théorème 2.16.

3.1.4 Revêtements ramifiés et constellations non enracinées

Cette section est indépendante du reste du chapitre. Nous y donnons quelques détails supplémentaires sur le rapport entre constellations et revêtements ramifiés de la sphère. Au passage nous comptons le nombre de constellations non enracinées dont les sommets sont étiquetés $1, \dots, m$ en sens direct autour de chaque face.

Soit f une application continue de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{S}_2$, où $\mathbb{S}_2$ est la sphère de dimension deux. Supposons que toutes les valeurs sur la sphère image aient un voisinage U tel que $f^{-1}(U)$ soit une union d'ouverts disjoints sur lesquels f est topologiquement équivalent à l'application complexe z^i autour de $z = 0$, pour un certain entier i strictement positif. Une telle application f est appelée *revêtement ramifié* (de la sphère par elle-même). Une valeur w sur la sphère image est de *type* $(d_i)_{i \geqslant 1}$ si exactement d_i de ses préimages ont un voisinage de la forme z^i pour $i \geqslant 1$. Elle est *régulière* si $d_i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$, et *critique* (ou de ramification) sinon. Une valeur critique est *simple* si son type vérifie $d_2 = 1$ et $d_i = 0$ pour $i \geqslant 3$. La somme $\sum_i i d_i$ est constante sur toutes les valeurs et est appelée le *degré* de f.

Soit $w_0, w_1, \dots, w_m$ des points distincts sur la sphère image. Soit $\mathcal{P}$ une courbe, homéomorphe à un cercle, qui rencontre les points $w_1, \dots, w_m$ dans cet ordre, mais évite w_0. Si un revêtement ramifié f a ses valeurs critiques dans $\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$, alors $f^{-1}(\mathcal{P})$ est une m-constellation non enracinée, dans laquelle on étiquette i les sommets de $f^{-1}(w_i)$, pour $i \geqslant 1$. Inversement, étant donné une m-constellation C, il existe, à homéomorphisme de la sphère de définition près, un unique revêtement ramifié f dont les valeurs critiques appartiennent à $\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ et tel que $f^{-1}(\mathcal{P})$ soit isomorphe à C. Cette bijection entre constellations non enracinées et revêtements ramifiés est essentiellement due à A. Hurwitz [88], qui l'exprime en termes de factorisations de permutations. Une présentation plus détaillée de cette correspondance est donnée dans [58]. Dans le reste de cette section, nous considérons les revêtements ramifiés à homéomorphisme de la sphère de définition près *i.e.*, les constellations non enracinées.

À l'aide de cette bijection, A. Hurwitz déduit du théorème 3.1 le résultat suivant : étant donné $m+1$ points distincts $w_0, w_1, \dots, w_m$ de $\mathbb{S}_2$, le nombre de revêtements ramifiés pour lesquels w_0 est une valeur critique de type $(d_1, d_2, \dots)$ et $w_1, \dots, w_m$ sont des valeurs critiques simples est

$$\frac{H_{\sigma_0}}{\prod_{i \geqslant 1} i^{d_i} d_i!},$$

où σ_0 désigne n'importe quelle permutation avec d_i cycles de longueur i. La preuve donnée par A. Hurwitz s'appuie implicitement sur le fait que les constellations enracinées correspondantes n'ont pas d'automorphismes non triviaux. En effet, cette remarque permet de dire facilement que le nombre de façons de numéroter les polygones est $\prod_{i \geqslant 1} i^{d_i} d_i!$ et ramène leur énumération à celle des factorisations de permutations de type cyclique $(d_i)_{i \geqslant 1}$.

Dans le cas général les constellations peuvent avoir des automorphismes non triviaux et la suppression de l'arête racine induit des difficultés supplémentaires pour l'énumération. Cependant une technique de réduction, due à V.A. Liskovets et basée sur la notion de carte quotient [106, Théorème 3.1], s'applique sans modifications aux constellations. Nous ne l'appliquons ici qu'aux

m-constellations à n polygones, mais la même méthode permet de déduire de nos résultats des formules (plus complexes) pour le nombre de constellations non enracinées suivant les degrés des faces.

Théorème 3.9 *Le nombre de m-constellations non enracinées avec n polygones est*

$$\widetilde{C}_m(n) = \frac{1}{n}\left[C_m(n) + \sum_{\ell | n, \ell < n} \phi(n/\ell)\binom{\ell(m-1)+2}{2} C_m(\ell)\right],$$

où ϕ désigne la fonction d'Euler et $C_m(n)$ le nombre de m-constellations enracinées à n polygones, donné par le corollaire 3.6.

À l'aide de la correspondance décrite plus haut, nous pouvons énoncer ce théorème en termes de revêtements : Soit $w_0, w_1, \dots, w_m$ des points distincts de $\mathbb{S}_2$. Alors $\tilde{C}_m(n)$ est le nombre de revêtements ramifiés de degré n, dont les valeurs critiques appartiennent à l'ensemble $\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$. Remarquons que le nombre de revêtements ramifiés dont les types de tous les points critiques sont donnés a été exprimé par A.D. Mednykh en fonction des caractères du groupe symétrique [115].

Plus généralement on peut étudier les revêtements ramifiés de la sphère par une surface de Riemann S quelconque. Dans ce contexte, le revêtement f est souvent muni d'une structure complexe. Le cas $m = 2$ est le plus étudié ; il est connu sous le nom de théorie des *dessins d'enfants* (cf. [102] et les références qui s'y trouvent).

3.2 Constellations et conjugaison

Dans ce paragraphe nous décrivons une bijection entre les constellations et certains arbres. La technique de la conjugaison d'arbres donne alors le résultat énumératif. La preuve que la construction donnée est bien une bijection sera fournie au paragraphe suivant.

3.2.1 Arbres eulériens

Rappelons que parmi les sommets d'un arbre on distingue les nœuds (sommets internes) et les feuilles (de degré un). Nous utiliserons deux paramètres supplémentaires pour les sommets d'un arbre : le *degré interne* d'un sommet est le nombre de nœuds qui lui sont adjacents et sa *profondeur* est sa distance à la feuille racine.

Dans toute la suite nous allons nous concentrer sur les propriétés de la famille d'arbres suivante :

Définition 3.10 *Un arbre dont les sommets sont noirs ou blancs, planté sur une feuille noire, est* m-eulérien *si*

- *tous les voisins d'un sommet blanc sont noirs, et inversement,*
- *chaque nœud noir a un degré m et un degré interne* 1 *ou* 2*,*
- *chaque nœud blanc a un degré mi, pour un certain $i \geqslant 1$, et a exactement $i-1$ nœuds voisins de degré interne* 1.

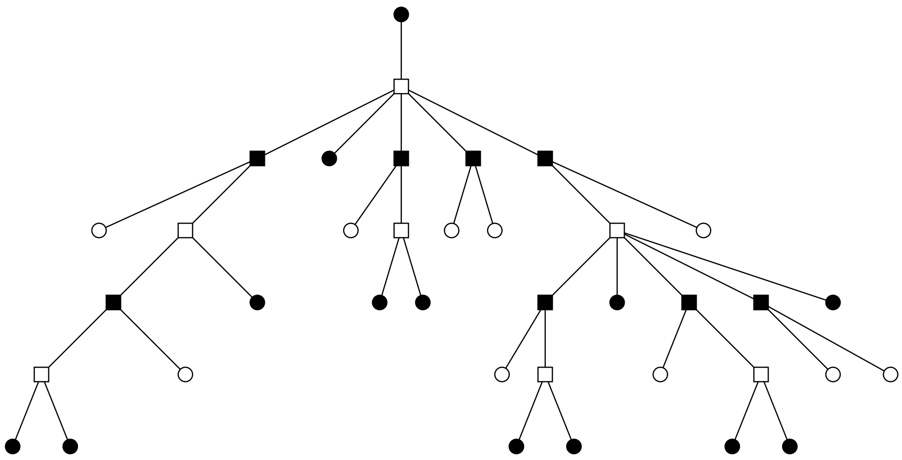


FIG. 3.6: Un arbre 3-eulérien (les feuilles sont représentées par des cercles, les nœuds par des carrés). Les feuilles blanches s'interprètent comme les bourgeons du chapitre précédent.

Remarquons qu'un arbre m-eulérien avec d_i nœuds blancs de degré mi a $f = \sum d_i$ nœuds blancs et $n = \sum id_i$ nœuds noirs.

Proposition 3.11 *Soit $m \geqslant 2$. Le nombre d'arbres m-eulériens ayant pour $i \geq 1$, d_i sommets blancs de degré mi, est donné par :*

$$E_m(D) = (m-1)^{f-1} \frac{[(m-1)n]!}{[(m-1)n-f+1]!} \prod_{i \geqslant 1} \frac{1}{d_i!} \binom{mi-1}{i-1}^{d_i}, \tag{6}$$

où $n = \sum id_i$ et $f = \sum d_i$. Ces arbres ont f nœuds blancs, $n-1$ nœuds noirs, $(m-1)n-f-m+2$ feuilles blanches, et $(m-1)n-f+2$ feuilles noires.

Démonstration. Un arbre m-eulérien avec d_i sommets blancs de degré mi s'obtient de la façon suivante :

1. On part d'un arbre plan planté T_1 avec des nœuds blancs et des feuilles noires, tel que tous les sommets soient de degré égal à 1 modulo $m-1$. Plus précisément, soit d_i le nombre de nœuds de degré $(m-1)i+1$, pour $i \geqslant 1$. La formule d'Harari, Prins et Tutte (formule 1, page 54) nous donne le nombre d'arbres de ce type :

$$T(d_1, d_2, \dots) = \frac{[(m-1)n]!}{[(m-1)n-f+1]!} \prod_{i \geqslant 1} \frac{1}{d_i!},$$

où $n = \sum id_i$ et $f = \sum d_i$.

2. Au milieu de chaque arête interne de T_1, nous ajoutons un nœud noir de degré total m. À ce nœud on relie $m-2$ feuilles blanches, qui peuvent être disposées de $m-1$ façons différentes. Comme T_1 a $f-1$ arêtes internes, le nombre d'arbres T_2 ainsi obtenus est $(m-1)^{f-1}T(d_1, d_2, \dots)$.

3. À chacun des d_i sommets blancs de T_2 qui sont de degré $(m-1)i+1$, on ajoute $i-1$ fils noirs réliés à $m-1$ feuilles blanches. La disposition de ces fils peut être choisie de $\binom{mi-1}{i-1}$ manières différentes, et cette observation conclut la preuve. □

Soit T un arbre m-eulérien. Comme au chapitre 2, définissons l'opération de *clôture partielle* de l'arbre T, les feuilles blanches jouent le rôle de bourgeons. L'ordre préfixe gauche induit un ordre cyclique sur ses feuilles. Par exemple, à partir de la racine, nous obtenons pour l'arbre de la figure 3.6 le mot (cyclique) $\bar{x}x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}\bar{x}xxx\bar{x}\bar{x}\bar{x}x\bar{x}\bar{x}xx\bar{x}x$, où $\bar{x}$ (resp. x) désigne une feuille noire (resp. blanche). Maintenant apparions les lettres x et $\bar{x}$ de ce mot comme s'il s'agissait de parenthèses ouvrantes et fermantes :

$$\bar{x}\ \ x\ \bar{x}\ \bar{x}\ \ x\ \bar{x}\ \bar{x}\ x\ \bar{x}\ \bar{x}\ x\ x\ \ x\ \bar{x}\ \ \bar{x}\ \bar{x}\ x\ \ \bar{x}\ \bar{x}\ x\ x\ \bar{x}\ \ x$$

Plus précisément, au pas 1, toutes les lettres x qui sont suivies d'une lettre $\bar{x}$ sont appariées avec cette occurrence de $\bar{x}$. Puis nous oublions les lettres appariées et recommençons jusqu'à ce qu'aucun appariement ne soit plus possible. Apparions du même coup les feuilles de T (cf. figure 3.7). Comme il y a plus de feuilles noires que de blanches, il reste à la fin des feuilles noires —exactement m— qui ne sont pas appariées. Nous les appelons des feuilles *libres*.

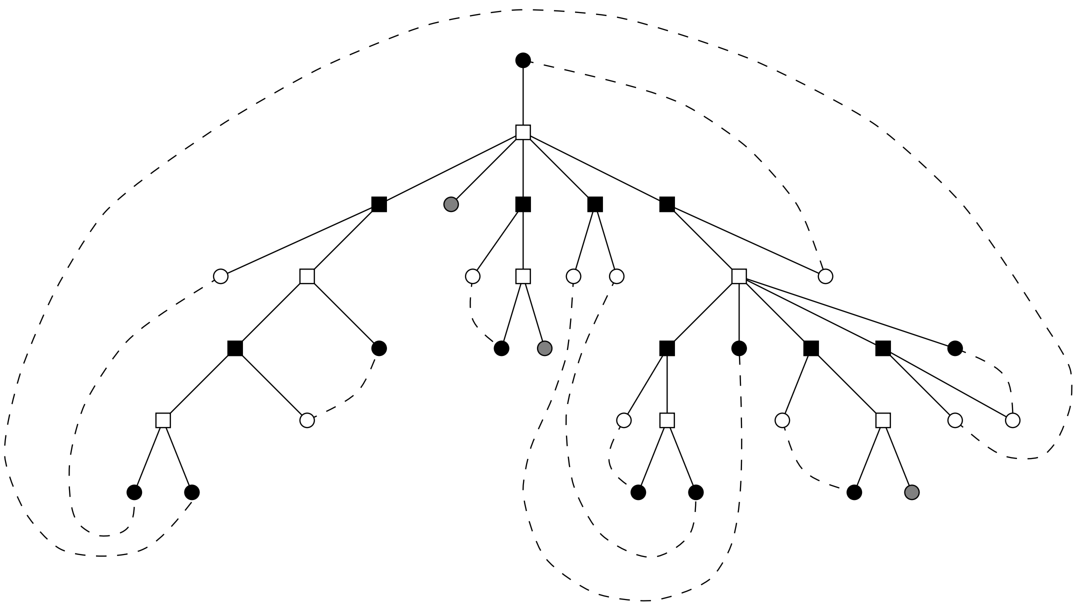


FIG. 3.7: Appariement des feuilles de l'arbre 3-eulérien de la figure 3.6.

Définition 3.12 *Un arbre m-eulérien est* équilibré *si sa feuille racine reste libre après l'appariement.*

Proposition 3.13 *Soit $m \geqslant 2$. Le nombre d'arbres m-eulériens équilibrés ayant d_i nœuds blancs de degré mi pour $i \geqslant 1$ est*

$$\frac{m}{(m-1)n - f + 2} \cdot E_m(D),$$

où $n = \sum i d_i$ et $f = \sum d_i$.

Démonstration. Soit A le nombre donné par (6). Alors mA compte aussi bien les arbres m-eulériens avec une feuille libre distinguée, ou, en plantant l'arbre sur cette feuille, les arbres m-eulériens équilibrés avec une feuilles noire distinguée. Nous concluons en remarquant qu'un arbre m-eulérien avec d_i nœuds blancs de degré mi a $(m-1)n - f + 2$ feuilles noires. □

Remarquons que les expressions données au théorème 3.5 et à la proposition 3.13 sont identiques. Le théorème 3.5 se déduit donc de la proposition Proposition 3.13 une fois construite une bijection entre arbres eulériens équilibrés et constellations.

3.2.2 Des arbres aux constellations, l'application Φ

La transformation d'un arbre eulérien équilibré T en une constellation $C = \Phi(T)$ est facile à décrire. De fait, le plus gros du travail a déjà été fait et est analogue à la clôture du chapitre 2. La construction est illustrée par la figure 3.8.

Nous construisons une première carte planaire E_1 en ajoutant des arêtes entre les feuilles appariées de T. Ainsi nous obtenons les arêtes discontinues de la figure 3.8a. Exactement m feuilles noires restent libres. Par construction, elles sont toutes dans la même face de E_1 ; dans la suite, nous allons régulièrement considérer E_1 comme une carte dans le plan (plutôt que sur la sphère) en adoptant la convention que les feuilles libres sont dans la face infinie.

Nous ajoutons dans la face infinie de E_1 une étoile supplémentaire, dont le centre est noir et qui possède m arêtes. Chaque arête se termine par une feuille blanche. Nous apparions ces m feuilles blanches avec les m feuilles libres de l'arbre (ce sont les arêtes pointillées de la figure 3.8a) dans l'ordre cyclique pour obtenir une carte planaire. Nous marquons l'arête pointillée qui termine sur la feuille racine de l'arbre. Finalement nous effaçons toutes les feuilles et remplaçons les arêtes discontinues et pointillées par de vraies arêtes. Par construction la carte obtenue est une carte m-eulérienne enracinée E. La duale de E est une constellation C qui définit l'image $\Phi(T)$ de T.

Remarquons que la carte eulérienne associée à l'arbre de la figure 3.8 est la carte de la figure 3.5 et que sa duale est la constellation de la figure 3.1.

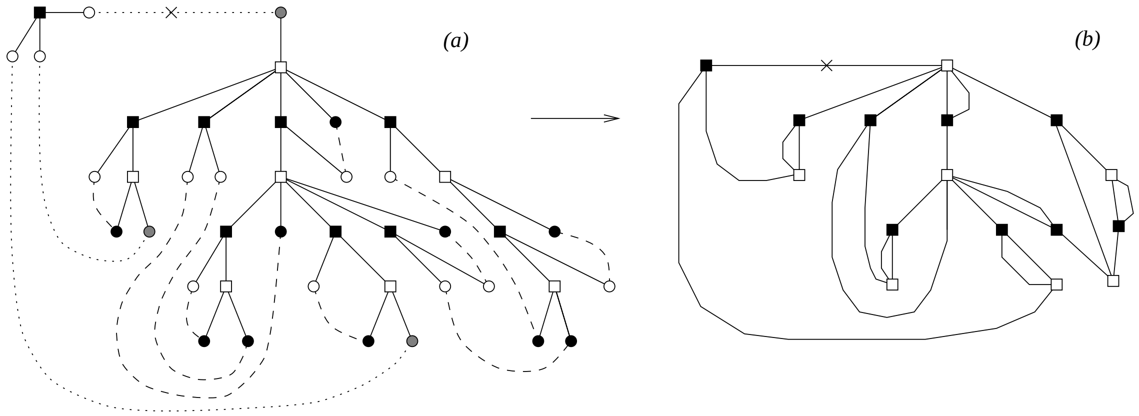


FIG. 3.8: D'un arbre 3-eulérien équilibré à une carte 3-eulérienne.

Nous voulons démontrer que la transformation Φ est une bijection entre arbres m-eulériens équilibrés et m-constellations. Quelle peut être la bijection inverse ? Imaginons que l'on parte d'une m-constellation enracinée C (ou de sa duale E, qui est m-eulérienne) et que nous essayions de construire l'arbre m-eulérien T associé. Il nous faut choisir —de manière adaptée— un ensemble S d'arêtes de E, ajouter deux sommets sur chacune d'entre elles et effacer la partie de l'arête qui relie ces deux sommets ; il nous faut obtenir ainsi deux composantes connexes : une étoile à m branche et un arbre m-eulérien équilibré. Ainsi, la difficulté principale de la bijection inverse est de décrire l'ensemble S des arêtes de E qu'il nous faut *ouvrir*.

Considérons à nouveau la carte eulérienne de la figure 3.8b. La comparaison avec la figure 3.8a nous indique quel doit être l'ensemble S. Traçons l'ensemble S' des arêtes duales des arêtes de S (figure 3.9, lignes grasses). Nous observons que S' est constitué du polygone racine de la constellation C, sur lequel m arbres, notés $T_1, \ldots, T_m$ sont plantés. Ces m arbres couvrent les sommets de C. Nous verrons qu'il s'agit là d'un phénomène général : la description de la bijection inverse de Φ se réduit à définir une certaine forêt couvrante de la constellation, que nous appelons sa forêt couvrante en largeur.

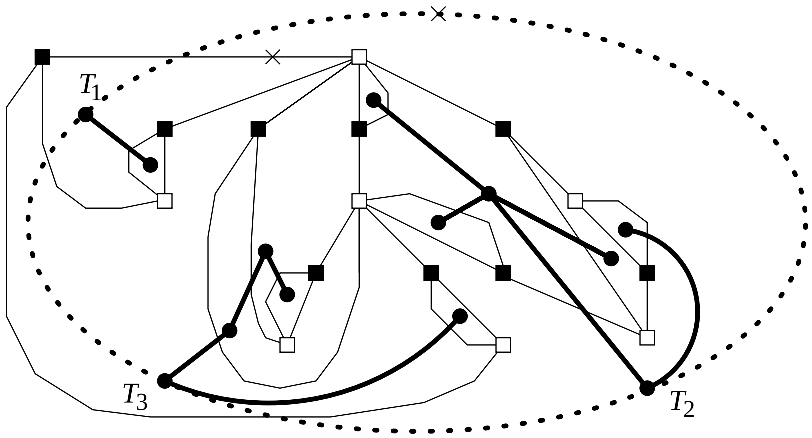


FIG. 3.9: Les arêtes duales des arêtes discontinues et pointillées de la figure 3.8a.

3.2.3 Des constellations aux arbres : la transformation Ψ

Soit C une constellation enracinée ; dessinons la dans le plan de façon à ce que la face infinie soit le polygone racine. Orientons les arêtes de C dans le sens indirect autour des faces blanches (notons $\bar{C}$ cette constellation orientée). Nous définissons le *rang* $r(v)$ d'un sommet v comme la longueur du plus court chemin (orienté) de $\bar{C}$ allant d'un sommet du polygone racine de v (figure 3.10). Attention à ne pas mélanger le rang de v avec son étiquette $\ell(v) \in \{1, 2, \ldots, m\}$, donnée par l'étiquetage canonique défini à la section 3.1. Le lemme suivant indique comment construire la forêt couvrante de la constellation. Le principe est simple : nous commençons par le polygone racine et avançons par un parcours en largeur, de droite à gauche. Il peut être utile de s'exercer sur l'exemple de la figure 3.10.

Lemme 3.14 *Soit C une constellation enracinée. Il existe une unique forêt couvrante F de C, faite de m arbres T_a, $1 \leqslant a \leqslant m$, vérifiant les quatre propriétés suivantes.*

0. *L'arbre T_a est planté sur le sommet étiqueté a du polygone racine.*
1. *L'orientation des arêtes de F induite par les arbres T_a (de la racine vers les feuilles) coïncide avec celle de la carte orientée $\bar{C}$.*
2. *Le rang augmente d'un le long de chaque arête de F. En d'autres termes la profondeur d'un sommet de T_a est donnée par son rang.*

Soit u un sommet de C. Les propriétés 1 et 2 impliquent que u appartient à T_a, où $a = \ell(u) - r(u) \bmod m$.

3. *Supposons $r(u) > 0$. Tous les sommets étiquetés $\ell(u) - 1$ et de rang $r(u) - 1$ apparaissent dans le même arbre T_a, où $a = \ell(u) - r(u) \bmod m$. Si on les visite dans l'ordre préfixe droit, le premier à être adjacent à u est le père de u dans T_a.*
4. *Soit v le père de u dans T_a. Soit e l'arête de T_a qui lie v à son père. Si on visite les arêtes de C adjacentes à v en ordre indirect, à partir de e, la première qui termine en u appartient à T_a.*

Cette forêt couvrante sera appelée la forêt couvrante en largeur *de C.*

Démonstration. Nous construisons F itérativement, en ajoutant au pas k tous les sommets de rang k (figure 3.10). Au pas 0, pour $1 \leqslant a \leqslant m$, l'arbre T_a est réduit au sommet étiqueté a qui appartient au polygone racine. Plantons l'arbre T_a en l'attachant à ce sommet par une demi-arête supplémentaire arrivant dans la face infinie de C.

Supposons qu'après k pas, la forêt obtenue ne couvre pas encore C. Soit u un sommet de rang $k+1$. Tous les sommets de rang k étiquetés $\ell(u) - 1$ appartiennent au même arbre T_a. Nous choisissons le père v de u suivant la propriété (3) du lemme, et l'arête de T_a joignant v à u suivant la propriété (4). □

Une fois la forêt couvrante de C construite, l'arbre eulérien $\Psi(C)$ est facile à obtenir. Soit S' l'ensemble des arêtes de C qui appartiennent soit à la forêt couvrante soit au polygone racine. Soit E la carte duale de C, et S l'ensemble d'arêtes duales à S'. Sur chaque arête e de S, ajoutons deux sommets puis effaçons les parties de e qui joignent ces deux sommets. Nous affirmons que ceci produit une étoile à m branches et un arbre m-eulérien équilibré, que nous plantons sur l'arête racine de E.

Exemple. À partir de la constellation de la figure 3.10, on obtient l'arbre de la figure 3.8a.

La prochaine section est consacrée à la preuve du théorème suivant, qui, d'après la proposition 3.13, implique le théorème 3.5.

Théorème 3.15 *La transformation Φ est une bijection des arbres m-eulériens équilibrés sur les m-constellations. La bijection inverse est Ψ. De plus, si $\Phi(T) = C$ et si T a d_i sommets blancs de degré mi, alors C a d_i faces blanches de degré mi.*

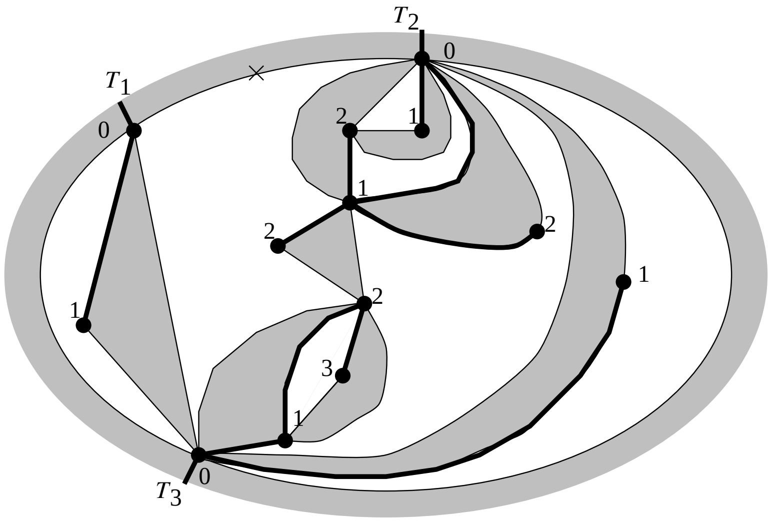


FIG. 3.10: Une 3-constellation enracinée : les rangs des sommets et la forêt couvrante en largeur.

Remarquons que la dernière assertion est claire. Cependant c'est là l'unique partie du théorème qui soit évidente.

Remarque. Qu'arrive-t-il aux cactus ? D'après le théorème 3.15, un m-cactus formé de n polygones est envoyé par Ψ sur un arbre m-eulérien équilibré avec un unique nœud blanc, de degré mn (figure 3.11). Visitons ses enfants de gauche à droite, en écrivant une lettre x pour chacun des $n-1$ nœuds noirs et une lettre $\bar{x}$ pour chacune des $n(m-1)$ feuilles blanches rencontrées. Nous obtenons ainsi un mot $x_1 \cdots x_{nm-1}$. Comme l'arbre est équilibré ce mot est le code préfixe d'un arbre m-aire complet à n nœuds et $(m-1)n+1$ feuilles ; nous définissons ainsi une bijection entre m-cactus à n polygones et arbres m-aires complets à n nœuds, qui diffère de celle trouvée par Michel Bousquet [27].

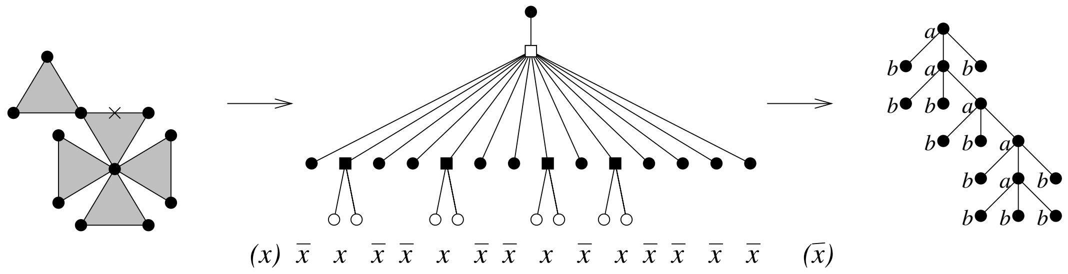


FIG. 3.11: La restriction de notre bijection aux cactus.

3.3 Preuve de ce que Φ est une bijection

Pour démontrer le théorème 3.15, il nous faut prouver les trois assertions suivantes :

- $\Psi \circ \Phi = id$,
- la transformation Ψ construit toujours un arbre eulérien équilibré,
- $\Phi \circ \Psi = id$.

Nous prouvons d'abord le premier point à la section 3.3.1, puis les deux suivants à la section 3.3.2. Afin d'uniformiser les notations dans la suite, nous adoptons les conventions suivantes.

- **Les constellations** : Soit C une constellation enracinée. Nous considérons C comme une carte dans le plan en choisissant d'utiliser le polygone racine comme face infinie. Nous désignons par $\bar{C}$ la version orientée de C (cf. section 3.2.3). Une face finie de C sera notée B ou N, suivant qu'elle est blanche ou noire. Si la face est de degré mi, ses sommets seront notés $v_1, v_2, \ldots, v_{mi}$, dans le sens indirect. Le rang de v_k sera r_k, et l'arête (sur la face) qui joint v_k à v_{k+1} sera e_k.
- **La forêt couvrante en largeur** : Étant donnée une constellation C, sa forêt couvrante en largeur sera appelée F. Cette forêt contient m arbres, notés $T_1, \ldots, T_m$, de manière à ce que T_a contienne le sommet de la face infinie étiqueté a, pour $1 \leqslant a \leqslant m$. Les arêtes de F et du polygone forment un ensemble noté S'.
- **Les cartes eulériennes** : si C est une constellation, sa carte duale est notée E. L'ensemble dual à S' est S.
- **Les arbres eulériens** sont notés T.
- Soit a et b deux entiers ; la notation $a \equiv b$ signifie que a et b sont égaux modulo m.

Avant d'entrer dans les détails de la preuve, nous avons besoin d'une caractérisation alternative de la carte E_1 obtenue en appariant les arêtes d'un arbre eulérien équilibré T (cf. section 3.2.2). La carte E_1 est l'unique carte dans le plan qui est obtenue en ajoutant des arêtes à T comme suit :

– chaque arête e de $E_1 \setminus T$ lie une feuille blanche w de T à une feuille noire ; de plus, l'arbre T est *à gauche* de e, dans le sens suivant : la carte formée de T et e a deux faces et

si on tourne autour de w en sens direct, on rencontre
successivement la face infinie, l'arête e, et la face bornée. (7)

– chaque feuille blanche de T est incidente à exactement une arête de $E_1 \setminus T$; chaque feuille noire à au plus une arête de $E_1 \setminus T$;

– les m feuilles noires de T qui ne sont pas voisines d'une arête de $E_1 \setminus T$ sont dans la face infinie.

3.3.1 $\Psi \circ \Phi = id$

L'assertion ci-dessus est équivalente à la

Proposition 3.16 *Soit T un arbre eulérien équilibré, $C = \Phi(T)$ la constellation correspondante, et E la carte duale de C. Soit S l'ensemble des arêtes de E qui n'étaient pas dans T, et soit S' l'ensemble d'arêtes duales. Alors les éléments de S' sont les arêtes du polygone racine et de la forêt couvrante en largeur de C.*

Démonstration. Comme T est un arbre, il définit une unique face et donc, la figure formée des arêtes de S' est connexe. De plus les arêtes du polygone racine appartiennent à S' : ce sont les duales des arêtes joignant T à l'étoile supplémentaire (les arêtes discontinues de la figure 3.8a). Le polygone racine est le seul cycle de S', car tout cycle de S' sépare deux composantes connexes non vides de la figure formée de T et de l'étoile supplémentaire. Soit G le plus petit sous graphe de C contenant les arêtes de S' qui ne sont pas dans le polygone racine ainsi que tous les sommets du polygone racine. Les remarques précédentes montrent que G est une forêt couvrante de C faite de m arbres $T_1, \ldots, T_m$, tels que T_a est planté sur le sommet étiqueté a du polygone racine. Nous voulons prouver que G est la forêt couvrante en largeur de C, c'est-à-dire qu'il satisfait les quatre propriétés du lemme 3.14.

La première propriété du lemme est garantie par la propriété (7) définie plus haut. Soit e' une arête de T_a, et e sa duale. En combinant le fait que l'arbre T est sur la gauche de e et qu'il ne croise pas T_a, nous obtenons que l'orientation de e' donnée par T_a coïncide avec son orientation dans $\bar{C}$ (figure 3.12).

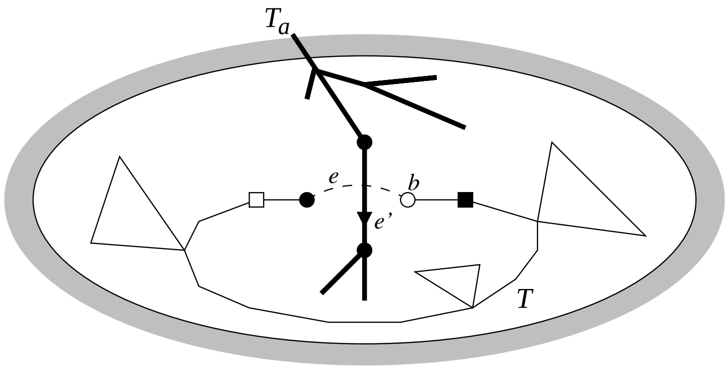


Fig. 3.12: L'orientation descendante dans T_a coïncide avec l'orientation dans $\bar{C}$.

Nous allons prouver trois autres propriétés du lemme 3.14 par un argument de comptage. Commençons par quelques généralités. Soit e' une arête (orientée) de $\bar{C}$ liant w à u, et supposons que e' n'appartienne pas à S'. Soit e l'arête duale à e'. Alors e est une arête de l'arbre T. Ajoutons sur e deux nouveaux sommets (figure 3.13). L'arête e' sépare T en deux arbres T' et T'', respectivement plantés sur une feuille noire et sur une feuille blanche. La définition d'un arbre eulérien (cf. définition 3.10) étant locale, on a :

– si l'extrémité noire de e a un degré interne de 2, alors T' est un arbre m-eulérien. En particulier, il a m feuilles noires de plus que de feuilles blanches ;

– sinon, T' n'est pas m-eulérien, et a $2m$ feuilles noires de plus que de feuilles blanches.

Dans les deux cas, la différence entre le nombre de feuilles noires et blanches de T' est αm, avec $\alpha = 1$ ou 2.

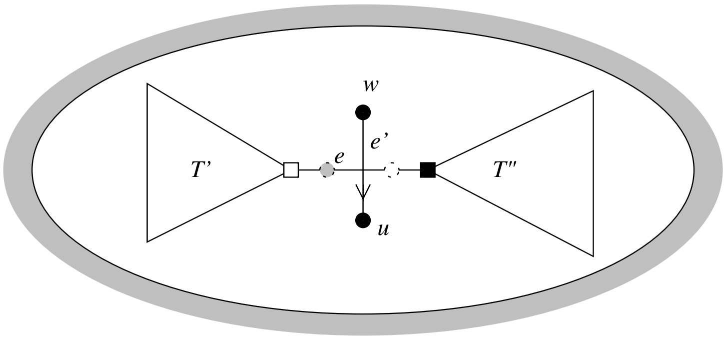


FIG. 3.13: Une arête de C n'appartenant pas à S' sépare T en deux arbres.

Prouvons maintenant par récurrence sur le rang que tous les sommets de C vérifient les propriétés $2, 3$, et 4 du lemme 3.14. Clairement il n'y a rien à prouver pour $k = 0$. Supposons donc les propriétés vraies pour tous les sommets de rang inférieur à $k > 0$. Soit u un sommet de rang k. Soit T_a l'arbre de G qui contient u. D'après la première propriété du lemme 3.14 (que nous avons démontrée), la profondeur de u dans T_a est $k + d$, avec $d \geqslant 0$.

Démontrons tout d'abord par l'absurde que $a \equiv \ell(u) - r(u)$. Supposons $\ell(u) - r(u) \equiv b \not\equiv a$. Par définition du rang, il existe une arête orientée e' de $\bar{C}$ qui va d'un sommet w de rang $k-1$ étiqueté $\ell(u) - 1$ à u. Par hypothèse, w est à la profondeur $k-1$ dans l'arbre T_b (puisque $b \equiv \ell(w) - r(w) \equiv \ell(u) - r(u)$), et donc l'arête e' ne peut appartenir à S' (cf. figure 3.14). Les arêtes de T_b qui sont sur le chemin joignant la racine de T_b à w sont duales des arêtes (discontinues) qui apparient des feuilles noires de T' à des feuilles blanches de T''. Donc le nombre de feuilles noires de T' appariées à une feuille blanche de T'' est $k-1$. De même, le nombre de feuilles blanches de T' appariées à une feuille noire de T'' est $k+d$. Soit r le nombre de feuilles noires libres de T qui sont dans T'. Bien sûr, $r \leqslant m$. La différence entre le nombre de feuilles noires et blanches de T' est $(k-1) + 1 + r - (k+d) = \alpha m$, ce qui donne $r = d + \alpha m \geqslant m$. Ceci implique que $r = m$: toutes les feuilles libres de T sont donc dans T'. Mais ceci n'est pas possible : comme $a \neq b$, au moins une feuille noire de T'' est libre. Donc $\ell(u) - r(u) \equiv a$.

Montrons maintenant que u est à la profondeur k dans T_a, *i.e.*, que $d = 0$. Soit e' une arête orientée de $\bar{C}$ allant d'un sommet w de rang $k-1$ étiqueté $\ell(u) - 1$ à u. Par hypothèse, w est à la profondeur $k-1$ dans T_a. Si e' appartient à T_a, alors u est à la profondeur k dans T_a. Sinon, soit x l'ancêtre commun de u et w dans T_a le plus profond et supposons que sa profondeur soit δ (figure 3.15). Une fois encore, en comptant les feuilles blanches et noires de T' on obtient $(k-1-\delta)+r+1-(k+d-\delta) = \alpha m$, et donc $r = d+\alpha m$. Comme $r \leqslant m$, ceci implique que $d = 0$.

L'égalité $r = d + \alpha m$ donne aussi $\alpha = 1$ et $r = m$. Ceci implique que T' est sur la face infinie de la carte formée par T_a et l'arête e'. En particulier, si le père v de u dans T_a n'est pas w, alors v arrive *avant* w dans l'ordre préfixe droit de T_a (figure 3.15). De même si $v = w$ (figure 3.16), l'arête de T_a qui lie v et u arrive avant e'.

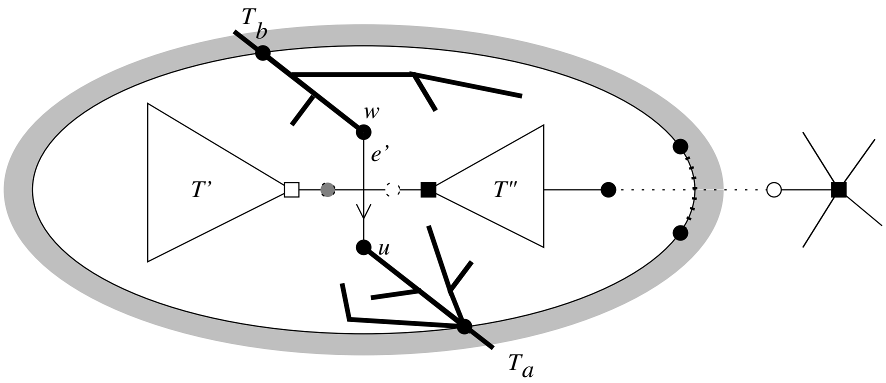


FIG. 3.14: Si on suppose $a \neq b$.

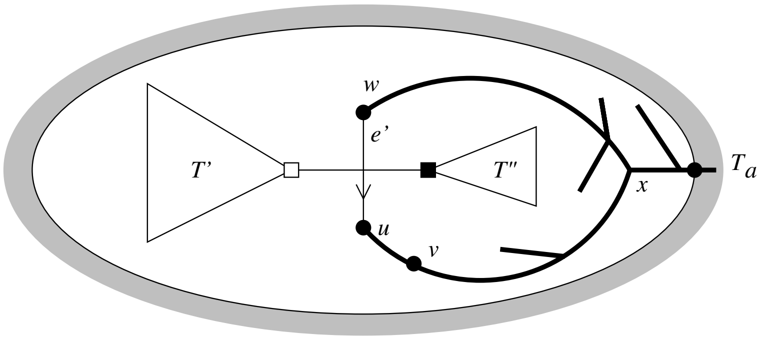


FIG. 3.15: La forêt G vérifie la troisième propriété du lemme 3.14.

□

3.3.2 Ψ donne un arbre eulérien équilibré et $\Phi \circ \Psi = id$

Proposition 3.17 *Soit C une m-constellation. L'application de l'algorithme Ψ décrit à la section 3.2.3 fournit un arbre m-eulérien équilibré T tel que $\Phi(T) = C$.*

Lemme 3.18 *Le graphe $T = \Psi(C)$ est un arbre planté.*

Démonstration. Le sous graphe de C formé des arêtes de S' (*i.e.*, la forêt couvrante en largeur F et les arêtes du polygone racine) est connexe. Ainsi, étant donnés deux sommets de C, il existe un chemin formé d'arêtes de S' qui les joint. En termes de la carte eulérienne E, ceci signifie que nous pouvons joindre n'importe quel couple de faces de E par un chemin qui ne coupe pas le graphe U obtenu en ouvrant les arêtes de S. Ceci implique que U ne définit qu'une seule face et donc qu'il s'agit d'une forêt.

Le nombre de composantes connexes de cette forêt est $v(U) - e(U)$, où $v(U)$ et $e(U)$ désignent respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de U. Pour déterminer ces nombres, il nous faut savoir combien d'arêtes de C ont été ouvertes, c'est-à-dire, la cardinalité de S'. Comme F est une

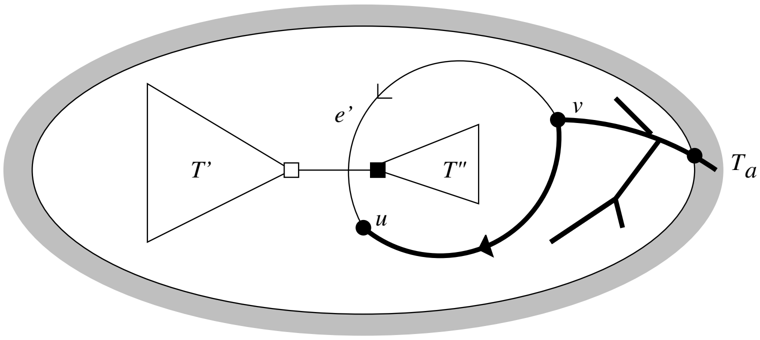


FIG. 3.16: La forêt G vérifie les quatre propriétés du lemme 3.14.

forêt couvrante de C faite de m arbres, F contient $v(C) - m$ arêtes. Donc, l'ensemble S' a la cardinalité $v(C)$. Nous obtenons $v(U) = v(E) + 2v(C)$ et $e(U) = e(E) + v(C)$. Donc,

$$\begin{aligned} v(U) - e(U) &= v(E) + v(C) - e(E) \\ &= v(E) + f(E) - e(E) \\ &= 2 \end{aligned}$$

où $f(E)$ désigne le nombre de faces de E, et où la dernière égalité est une conséquence de la formule d'Euler.

Ainsi la forêt U contient exactement deux arbres : l'un d'eux est l'étoile à m branches et l'autre est $T = \Psi(C)$. □

Certaines propriétés de $T = \Psi(C)$ sont évidentes : il est bicolorié, et ses nœuds ont le même degré que dans E. En particulier, tous les nœuds noirs de T sont de degré m, tandis que le degré de chaque sommet blanc est multiple de m. Il nous reste donc à démontrer que les conditions énoncées dans la définition 3.10 sont remplies. Ceci fait l'objet des lemmes 3.20 et 3.21.

La propriété 3.19, qui est claire géométriquement (voir figure 3.17), jouera un rôle important dans la preuve. Elle signifie que, lorsqu'on visite les sommets d'une face de C en sens indirect, on rencontre successivement des sommets de l'arbre T_1, puis de l'arbre T_2, et ainsi de suite jusqu'à l'arbre T_m.

Propriété 3.19 *Soit f une face bornée (blanche ou noire) de C de degré mi. Il est possible de nommer ses sommets $v_1, \ldots, v_{mi}$, dans le sens indirect, de façon à ce qu'il existe une suite $1 = k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_m \leqslant k_{m+1} = mi + 1$ telle que pour $1 \leqslant j \leqslant m$,*

$$\{k : v_k \in T_j\} = \{k_j, k_j + 1, \ldots, k_{j+1} - 1\}.$$

Établissons tout d'abord les propriétés des sommets noirs de l'arbre $T = \Psi(C)$.

Lemme 3.20 *Soit v un nœud noir de T. Alors v est de degré interne 1 ou 2.*

Démonstration. Traduisons l'assertion ci-dessus en termes de la constellation C : Soit N un polygone de C, différent du polygone racine. Alors, au plus deux de ses arêtes n'appartiennent pas à la forêt couvrante F.

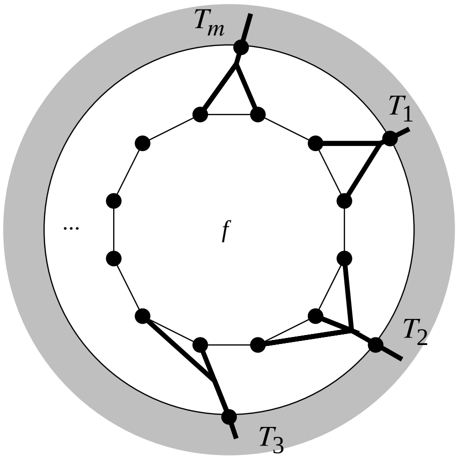


FIG. 3.17: Les arbres $T_1, \ldots, T_m$ apparaissent en sens indirect autour des faces de C.

Remarquons que, si u et v sont deux sommets adjacents de N, pris dans le sens indirect, alors, par définition du rang, $r(u) \leqslant r(v) + 1$. Il nous faut distinguer deux cas, suivant qu'il existe ou non une arête de N n'appartenant pas à F et telle que l'inégalité précédente soit une égalité.

Premier cas : il existe dans N une arête e, qui n'appartient pas F, dont les sommets extrémités u et v, (v suivant u dans le sens indirect), sont tels que $r(u) = r(v) + 1$. Nous appelons e une arête *spéciale*.

Comme $\ell(u) \equiv \ell(v) + 1$, les sommets u et v appartiennent au même arbre T_a de la forêt F. Soit w le père de u dans T_a. Alors w est de rang $r(v)$ et est étiqueté $\ell(v)$. D'après les propriétés vérifiées par T_a (cf. lemme 3.14),

- soit $w \neq v$ et w arrive premier dans l'ordre préfixe droit sur T_a (figure 3.18a),
- soit $w = v$ et l'arête e' qui lie v et u dans T_a arrive avant e quand on visite les arêtes de C qui sont voisines de v en sens indirect, à partir de l'arête qui lie v à son père dans T_a (figure 3.18b).

Les deux cas impliquent qu'il ne peut y avoir une seconde arête spéciale dans N. De plus, nous remarquons que tout sommet x de N appartient à T_a, *i.e.*, satisfait $\ell(x) - r(x) \equiv a$. En particulier, deux sommets distincts de N ont des rangs différents. Appelons les sommets de N, $v_1, \ldots, v_m$, dans le sens indirect, de sorte que $r_1 < r_k$ pour $1 < k \leqslant m$. Comme $r_k \leqslant r_{k+1} + 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$, nous concluons par récurrence sur i que $r_{m-i} = r_1 + i + 1$ pour $0 \leqslant i < m - 1$.

Soit e_i l'arête de N qui lie v_i et v_{i+1}, pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Supposons que l'arête spéciale e soit e_j (figure 3.19). Comme e_j est la seule arête spéciale, le fait que $r_k = r_{k+1} + 1$ pour $2 \leqslant k \leqslant m$ implique que les arêtes $e_2, \ldots, e_{j-1}$ et $e_{j+1}, \ldots, e_m$ appartiennent à F. Ainsi, le polygone N a au plus deux arêtes (e_1 et e_j) qui n'appartiennent pas à F.

Second cas : toute arête de e de N n'appartenant pas à F vérifie $r(u) < r(v) + 1$, où u et v sont les deux sommets extrémités de e, pris dans le sens indirect.

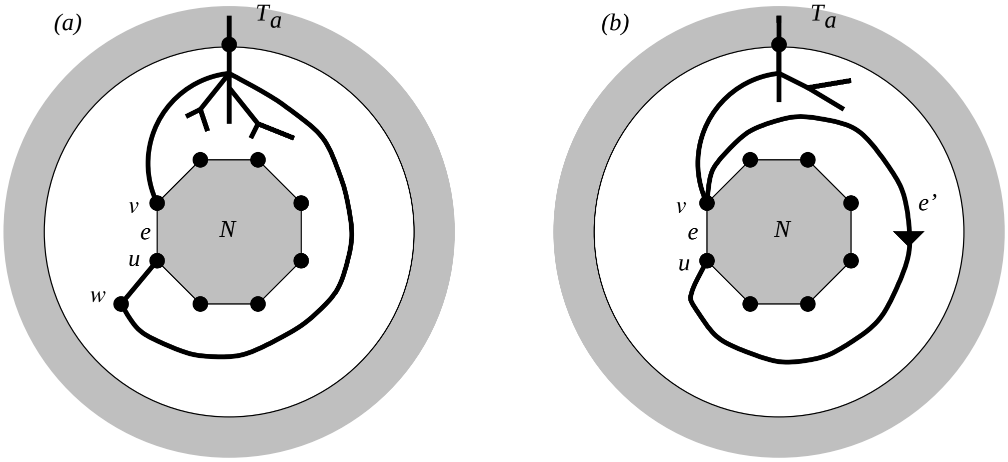


FIG. 3.18: L'allure d'une arête spéciale.

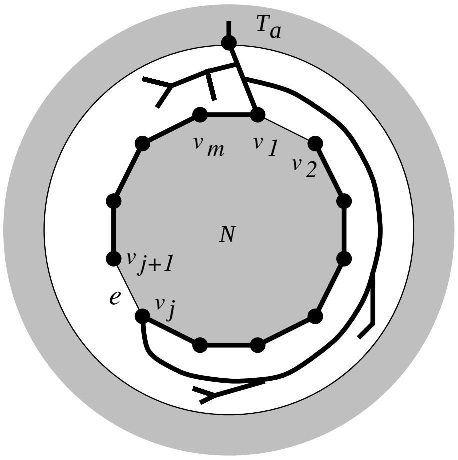


FIG. 3.19: Un polygone dans le premier cas du lemme 3.20.

Dans ce cas, nous allons prouver notre lemme par l'absurde. Supposons qu'au moins trois arêtes de N n'appartiennent pas à F. Soit $v_1, \ldots, v_m$ les sommets de N (en sens indirect), et soit e_i l'arête de N qui lie v_i et v_{i+1}, pour $1 \leqslant i \leqslant m$. On peut supposer que les trois arêtes qui n'appartiennent pas à F, sont e_1, e_i et e_j avec $1 < i < j \leqslant m$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, nous avons $r_k \leqslant r_{k+1} + 1$. De plus, l'inégalité est stricte par hypothèse quand $k \in \{1, i, j\}$. Donc :

$$r_1 < r_2 + 1 \leqslant r_3 + 2 \leqslant \cdots \leqslant r_i + i - 1 < r_{i+1} + i \leqslant \cdots \leqslant r_j + j - 1 < r_{j+1} + j \leqslant \cdots \leqslant r_1 + m.$$

Soit $p = \ell(v_1)$ l'étiquette de v_1. Alors pour $1 \leqslant k \leqslant m$, l'étiquette de v_k est $p - k + 1$ modulo m. Nous avons

$$\begin{aligned} p - r_1 > p - 1 - r_2 \geqslant \cdots \geqslant p - i + 1 - r_i > p - i - r_{i+1} \geqslant \cdots \\ \cdots \geqslant p - j + 1 - r_j > p - j - r_{j+1} \geqslant \cdots > p - m - r_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Rappelons qu'un sommet v appartient à l'arbre T_a si et seulement $a \equiv \ell(v) - r(v)$. Soit T_a (resp. T_b, T_c) l'arbre de F qui contient v_1 (resp. v_i, v_j), et supposons que v_1 a été choisi avec $a \geqslant b$ et $a \geqslant c$. Il existe trois entiers k, k', k'' tels que $p - r_1 = a + km$, $p - i + 1 - r_i = b + k'm$ et $p - j + 1 - r_j = c + k''m$. D'après (8), nous avons $a + km > b + k'm > c + k''m > a + (k-1)m$. Ceci impose $k = k' = k''$ et $a > b > c$, en contradiction avec la propriété 3.19. □

Nous démontrons maintenant les propriétés des sommets blancs de l'arbre $\Psi(C)$.

Lemme 3.21 *Soit v un nœud blanc de $T = \Psi(C)$, dont le degré est mi. Exactement $i - 1$ des nœuds qui lui sont adjacents ont un degré interne égal à* 1.

Démonstration. Traduisons l'assertion ci-dessus en termes de la constellation C. Soit B une face blanche de C de degré mi. Toute arête e de B appartient à un unique polygone noté $N(e)$. Soit κ le nombre d'arêtes e de B qui vérifient la condition suivante :

$$e \text{ est la seule arête de } N(e) \text{ qui n'appartient pas à la forêt } F. \tag{9}$$

Nous voulons prouver que $\kappa = i - 1$.

1. Commençons par montrer que κ est au plus i. Soit $v_1, \ldots, v_{mi}$ les sommets de B, dans le sens indirect. Pour $1 \leqslant k \leqslant mi$, soit e_k l'arête de B qui lie v_k et v_{k+1}, et soit r_k le rang de v_k. Alors $r_{k+1} \leqslant r_k + 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant mi$. De plus, si e_k vérifie la condition (9), alors $r_k = r_{k+1} + m - 1$. Ainsi nous pouvons écrire $r_k \geqslant r_{k+1} + a_k$, où $a_k = m - 1$ si e_k vérifie (9) et $a_k = -1$ sinon. Nous avons

$$r_1 \geqslant r_2 + a_1 \geqslant r_3 + a_1 + a_2 \geqslant \cdots \geqslant r_{mi} + a_1 + \cdots + a_{mi-1} \geqslant r_1 + a_1 + \cdots + a_{mi}, \tag{10}$$

ce qui implique que $a_1 + \cdots + a_{mi} \leqslant 0$. Comme κ arêtes de B vérifient (9), nous avons $a_1 + \cdots + a_{mi} = \kappa(m-1) - (mi - \kappa) = m(\kappa - i)$, et donc $\kappa \leqslant i$.

2. Éliminons maintenant l'hypothèse $\kappa = i$. Si $\kappa = i$, alors toutes les inégalités de (10) deviennent des égalités. En d'autres termes, pour toute arête e_k de B qui ne vérifie pas (9), on a $r_{k+1} = r_k + 1$. Comme $\ell_{k+1} \equiv \ell_k + 1$, le lemme 3.14 montre que tous les sommets de B appartiennent au même arbre T_a de F.

Prenons v_1 un sommet de B de rang minimal : $r_1 \leqslant r_k$ pour tout k. Séparons les sommets de B en deux classes : les sommets gauches et droits, selon les règles suivantes (figure 3.20).

- Par convention, v_1 est un sommet droit ; soit e_0 une arête de T_a terminant en v_1.
- Si v_k arrive avant v_1 dans l'ordre préfixe droit sur T_a, alors v_k est un sommet droit.
- Si v_k est dans le sous arbre de T_a de racine v_1 et si la branche de T_a qui va de v_1 à v_k commence par une arête e située entre e_0 et e_1 (en sens indirect), alors v_k est un sommet droit.
- Dans tous les autres cas, v_k est un sommet gauche.

Remarquons que, si v_k et v_ℓ sont respectivement des sommets droit et gauche, alors v_k arrive avant v_ℓ dans l'ordre préfixe droit de T_a. De plus, si e_j vérifie (9) et si v_j est un sommet droit, alors $j \neq mi$ et v_{j+1} est un sommet droit. Soit $j = \max\{k : v_k \text{ est un sommet droit}\}$. Alors e_j ne peut

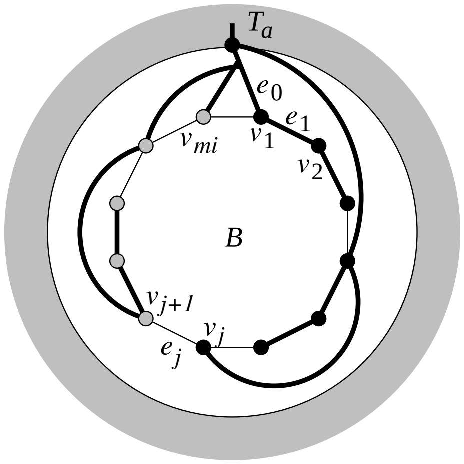


FIG. 3.20: Sommets gauches et droits d'une face blanche.

vérifier (9). Ceci implique que $r_{j+1} = r_j + 1$. Au passage remarquons qu'on obtient aussi $j \neq mi$, puisque r_1 est minimal ; en d'autres termes, v_{j+1} est un sommet gauche.

Le père v_{j+1} dans T_a est un sommet v, de rang r_j. Si $v \neq v_j$, alors, par construction de T_a, v arrive avant v_j dans l'ordre préfixe droit de T_a, et il en va de même de v_{j+1}. Ceci contredit le fait que v_{j+1} est un sommet gauche. Si $v = v_j$, alors $j = 1$, car v_1 est le seul sommet de B qui puisse avoir des fils gauches. Par construction de T_a, les arêtes de T_a qui lient v_1 et v_2 sont situées entre e_0 et e_1, ce qui fait de v_2 un sommet droit, et donne une contradiction. Donc $\kappa \leqslant i - 1$.

3. Retournons maintenant à l'arbre $T = \Psi(C)$. Soit d_i le nombre de sommets blancs de T de degré mi. Pour $j \in \{1, 2\}$, appelons b_j le nombre de nœuds noirs de T de degré interne j. Nous avons démontré qu'un nœud blanc de T de degré mi a au plus $i - 1$ nœuds voisins de degré interne 1. Ceci implique que $b_1 \leqslant \sum_i (i-1)d_i$. Nous allons montrer cette inégalité est en fait une égalité : $b_1 = \sum_i (i-1)d_i$, et ceci terminera la preuve du lemme.

Soit ℓ_b (resp. ℓ_w) le nombre de feuilles noires (resp. blanches) de T. Nous savons que $\ell_b = \ell_w + m$. Comptons de deux façons différentes les arêtes de T, en utilisant le fait que chacune d'entre elle a une extrémité blanche et une extrémité noire. Nous trouvons :

$$\ell_w + m \sum_i id_i = \ell_b + m(b_1 + b_2),$$

et donc $b_1 + b_2 = -1 + \sum_i id_i$. Maintenant, tous les nœuds blancs de T sauf un, sont de degré interne deux ; on obtient ainsi $\sum d_i = 1 + b_2$, et finalement $b_1 = -1 + \sum id_i + 1 - \sum d_i = \sum(i-1)d_i$. □

Nous avons donc prouvé que l'arbre $T = \Psi(C)$ est m-eulérien. Pour terminer la preuve de la proposition 3.17, il reste à démontrer le

Lemme 3.22 *L'arbre m-eulérien $T = \Psi(C)$ est équilibré, et $\Phi(T) = C$.*

Démonstration. Modifions légèrement la construction qui mène de C à $T = \Psi(C)$: après avoir ajouté une paire de sommets sur chaque arête e de S, effaçons la partie centrale de e (qui lie les deux nouveaux sommets) si e est duale d'une arête du polygone racine de C. Sinon, remplaçons simplement la partie centrale de e par une arête discontinue. Il nous faut montrer que les arêtes discontinues définissent l'appariement des feuilles de T. Ceci impliquera que la feuille racine de T, qui n'est incidente à aucune arête discontinue, est une feuille libre de T, *i.e.*, que T est un arbre eulérien équilibré. Dans le même temps cela démontrera que $\Phi(T) = C$.

Ce que nous voulons donc prouver est que les arêtes discontinues vérifient les propriétés données au début de la section 3.3. La seule propriété difficulté vient de (7), qui dit que T est sur la gauche des arêtes discontinues quand on les parcourt de leur extrémité blanche à leur extrémité noire.

Soit e une arête discontinue : sa duale e' appartient à un arbre T_a de la forêt couvrante en largeur F. Rappelons que T_a ne coupe pas T. D'après la propriété 1 du lemme 3.14, l'arbre T est sur la gauche de e (figure 3.12). □

3.4 Extensions

Le théorème principal (théorème 3.5) est évidemment une extension du corollaire 3.6. À l'aide de notre bijection, nous pouvons donner des équations pour un problème d'énumération qui étend le corollaire 3.6 dans une direction différente. Pour tout $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+1}$, soit $a_{\mathbf{i}}$ le nombre de m-constellations avec i_{m+1} faces blanches et i_k sommets étiquetés k pour $1 \leqslant k \leqslant m$ (en effet, si chaque polygone contient un sommet étiqueté k, pour $1 \leqslant k \leqslant m$, le nombre de sommet étiqueté k n'est pas le nombre de polygones pour autant). Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$, $\mathbf{x}^{\mathbf{i}} = x_1^{i_1} \cdots x_{m+1}^{i_{m+1}}$, et définissons la fonction génératrice $g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ correspondante. Alors

$$g(\mathbf{x}) = \int u_1(\mathbf{x}) dx_1 \tag{11}$$

où, pour tout $1 \leqslant k \leqslant m+1$,

$$u_k(\mathbf{x}) = \prod_{i \in [1, m+1],\ i \neq k} \left(x_i + \sum_{j \neq i} u_j(\mathbf{x}) \right). \tag{12}$$

Pour obtenir ce résultat, nous commençons par remarquer que, d'après la preuve du corollaire 3.6, le serie $g(\mathbf{x})$ compte les $(m+1)$-constellations qui n'ont que des faces de degré $m+1$. Via notre bijection, celles-ci correspondent aux arbres $(m+1)$-eulériens équilibrés dont tous les nœuds sont de degré $m+1$. L'équation (11) exprime la série génératrice des arbres eulériens équilibrés en fonction de celle des arbres eulériens *généraux*. Enfin la décomposition classique des arbres plans s'applique aux arbres eulériens et donne (12).

Chapitre 4

Statistiques des cartes planaires

Nous étudions ici deux statistiques sur les cartes planaires. La première est *la taille du noyau*. La section 4.1 présente nos résultats en s'attachant plus particulièrement à leur pertinence pour les algorithmes de génération aléatoire. Après avoir montré que la distribution limite *bimodale* étudiée par E.A. Bender *et al.* sur un exemple est valable pour de nombreuses familles de cartes (sections 4.2 et 4.3), nous en étudions une version à deux variables (section 4.4) : les nombres de sommets et de faces du noyau 3-connexe d'une carte non séparable avec n sommets et m faces.

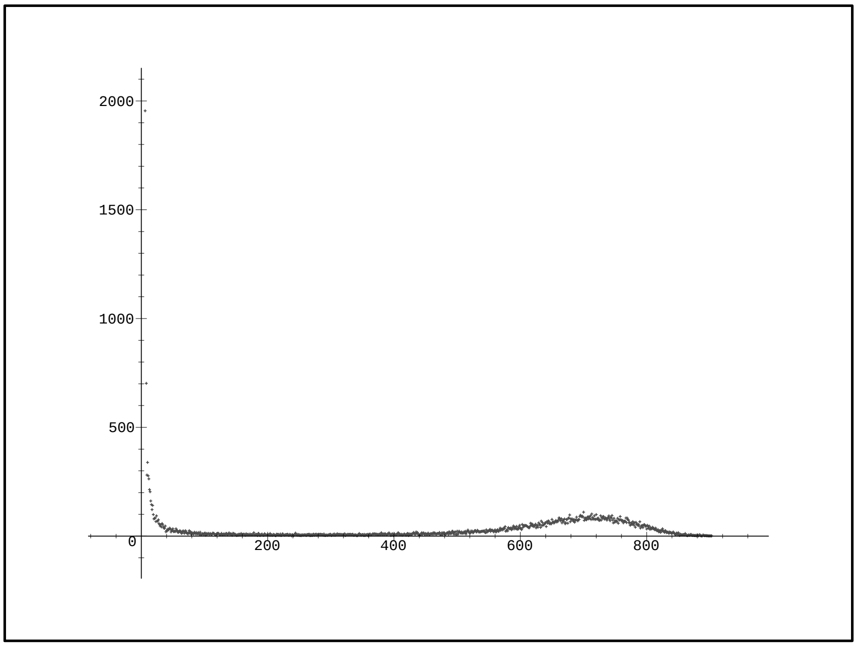
Le second paramètre des cartes planaires que nous étudions est *le diamètre* ; à la section 4.5, nous donnons une borne en utilisant la conjugaison d'arbres et des résultats de P. Flajolet *et al.* [59]. Ensuite nous complétons l'étude par des données expérimentales. Ces résultats préfigurent les études expérimentales rendues possibles par nos générateurs aléatoires.

4.1 Taille du noyau et génération aléatoire

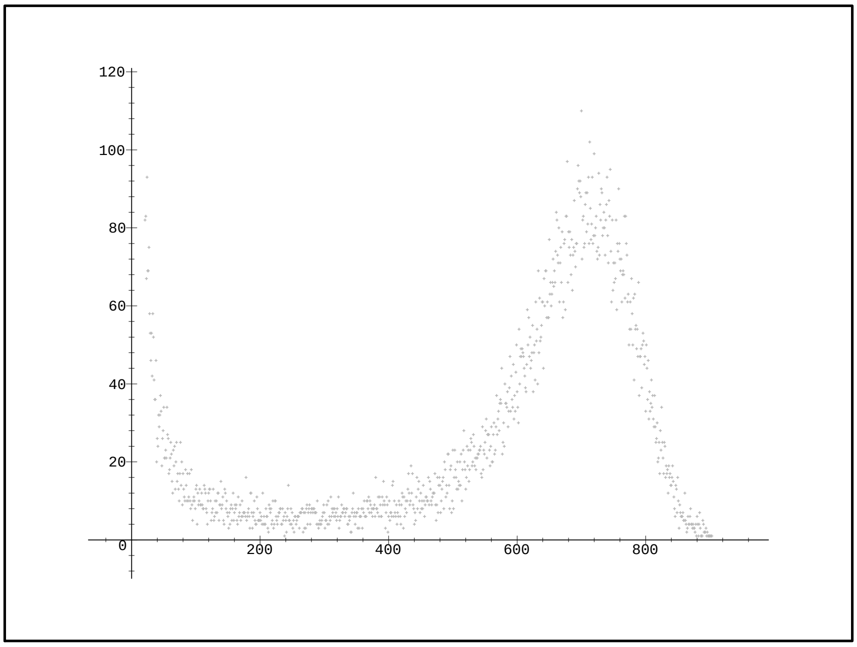
Les algorithmes de génération aléatoire de graphes planaires 3- et 4-connexes que nous développons au chapitre 5 sont basés sur l'extraction du noyau d'une carte planaire. Par exemple, l'algorithme qui permet de tirer un graphe 3-connexe de taille supérieure à 50000 procède de la façon suivante : on tire par conjugaison d'arbres une carte planaire 2-connexe de taille suffisamment grande et on extrait son noyau[1] 3-connexe. On obtient ainsi un graphe planaire 3-connexe choisi quasi-uniformément[2] parmi les graphes de même taille. Si le graphe obtenu n'est pas assez grand, on recommence, jusqu'à avoir un graphe de la taille voulue (on peut exiger une valeur précise ou simplement donner un intervalle de valeurs acceptées). Il s'agit bien entendu seulement d'un pseudo-algorithme, car rien ne permet d'affirmer qu'il terminera.

L'efficacité d'un tel pseudo-algorithme dépend essentiellement de la statistique *taille du noyau* : si la taille moyenne des noyaux est assez grande, il ne sera pas nécessaire de choisir des cartes non séparables trop grandes pour avoir une probabilité raisonnable de terminer. Idéalement, la taille du noyau doit croître linéairement avec la taille de la carte dont on l'extrait. Après avoir

[1] cf. la section 1.5.1 et en particulier la figure 1.15
[2] cf. corollaire 5.13.



a. Distribution expérimentale complète.



b. Distribution expérimentale pour $k > 15$.

FIG. 4.1: Nombre de noyaux de taille $k > 0$ dans 100000 cartes de taille 2000.

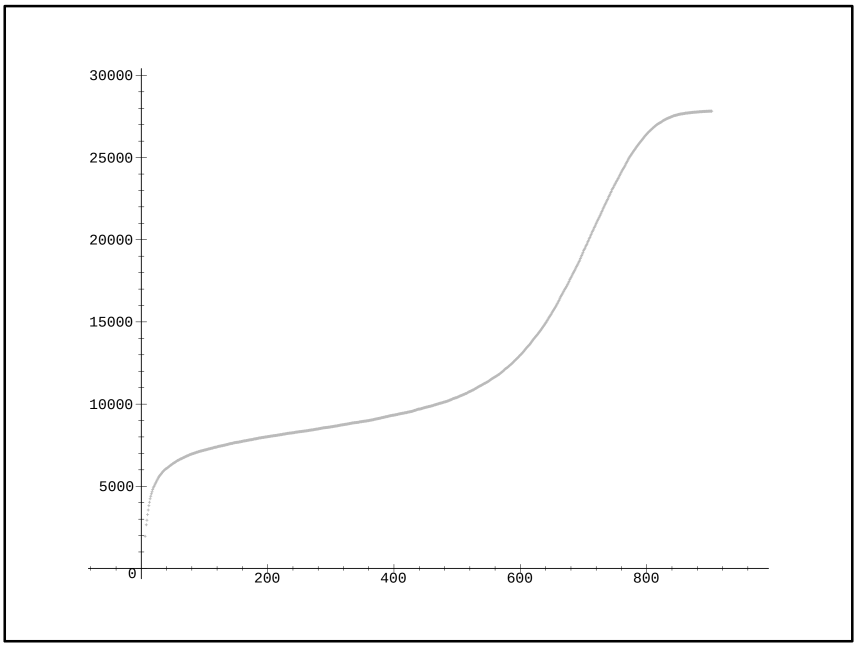


FIG. 4.2: Fréquences cumulées de l'expérience de la figure 4.1.

programmé les générateurs aléatoires du chapitre 5, j'ai donc observé le comportement expérimental de cette statistique. Pour différentes valeurs de N, on tire un grand nombre de cartes de taille N, et on observe la taille de leur noyau. Les premières observations montrent immédiatement un comportement linéaire de la moyenne. Cependant, la variance est très élevée et on obtient très fréquemment des noyaux de taille inférieure à 10 (par exemple on observe que la probabilité d'obtenir un tétraèdre, le plus petit graphe 3-connexe, se rapproche de 2% quand N devient grand).

La conjonction de ces deux phénomènes (moyenne linéaire, probabilité limite strictement positive pour chaque valeur finie) est assez surprenante[3] et, à ma connaissance, n'a pour l'instant été observée pour aucune autre statistique combinatoire.

Observons maintenant plus précisément les résultats expérimentaux. La figure 4.1 montre un résultat typique : après avoir tiré 100000 cartes de taille 2000, on trace l'histogramme du nombre de noyaux de taille k. Avec les algorithmes du chapitre 5 cette expérience prend moins d'une heure sur un PC ordinaire.

On remarque immédiatement deux zones privilégiées : la première pour les très petites cartes et la deuxième autour de $k = 700$. Cette dernière valeur est particulièrement intéressante, contrairement à la moyenne expérimentale, environ 475, qui ne décrit visiblement pas bien le phénomène. Le graphe des fréquences cumulées (figure 4.2) permet de mieux comprendre ce qui se passe : à peu près 72% des cartes n'ont pas de noyau et ne sont donc pas représentées ; sur environ 28000 cartes restantes, on peut voir qu'environ 7000 cartes (soit un peu moins du quart) ont un noyau minuscule, alors que la plupart des autres (soit un peu moins des trois quarts) ont un noyau de

[3]au point que j'ai longtemps cherché une erreur dans mon extracteur de noyau !

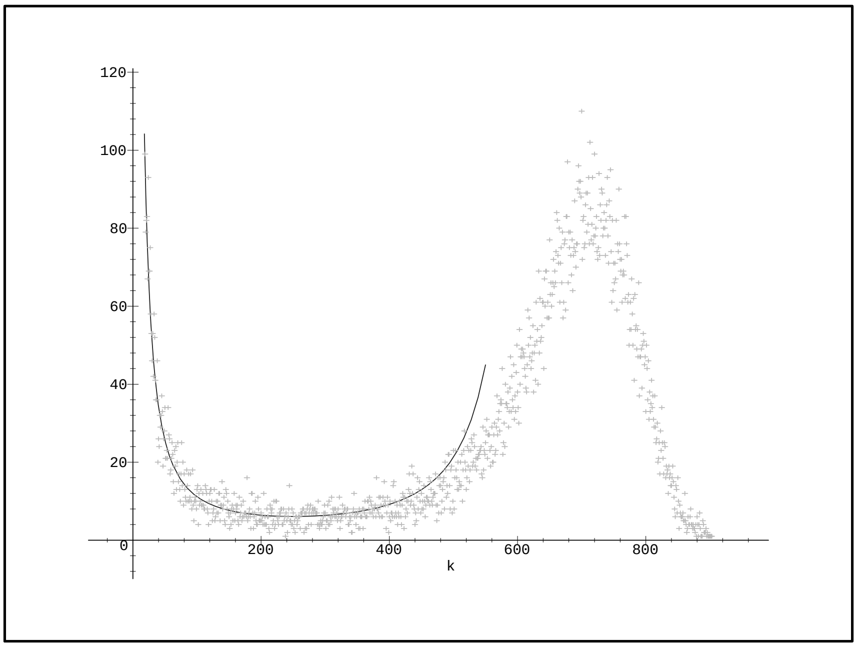


FIG. 4.3: Comparaison des résultats de la figure 4.1 avec la courbe théorique dans l'intervalle $]0, \frac{1}{3}[$.

taille entre 600 et 800, c'est-à-dire grossièrement du tiers de la taille de la carte d'origine (2000).

L'étude expérimentale pour d'autres valeurs de n donne des résultats similaires et confirme que le noyau d'une carte de taille n est la plupart du temps, soit très petit, soit voisin de $n/3$, alors que la taille moyenne est de l'ordre de $n/4$.

Ces résultats permettent d'*accorder* (au sens musical du terme) nos générateurs aléatoires : ainsi si on souhaite tirer un graphe 3-connexe planaire de taille k, c'est en tirant des cartes 2-connexes de taille $3k$ qu'on obtiendra satisfaction le plus rapidement !

L'objectif de la suite de cette section est de confirmer ces résultats expérimentaux. Nous obtenons en effet une description théorique de la distribution de la taille du noyau pour différentes familles de cartes. Par exemple pour les cartes non séparables enracinées et leurs noyaux 3-connexes, notons $p_n(k) = \Pr(\nu(C_n) = k)$ la probabilité que le noyau d'une carte non séparable C_n de taille n soit de taille $\nu(C_n) = k$. Alors nous montrons les résultats suivants :

– le paramètre $\nu(C_n)/n$ a deux points d'accumulation, 0 ou 1/3, *i.e.* pour toute fonction $\lambda(n) = o(n^{1/3})$ tendant vers l'infini

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left[\left|\frac{\nu(C_n)}{n} - \alpha\right| < \frac{\lambda(n)}{n^{1/3}}\right] = \begin{cases} \frac{16}{81} & \text{si } \alpha = \frac{1}{3}, \\ \frac{65}{81} & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

– en dehors de ces deux valeurs le comportement est, uniformément pour α dans un compact,

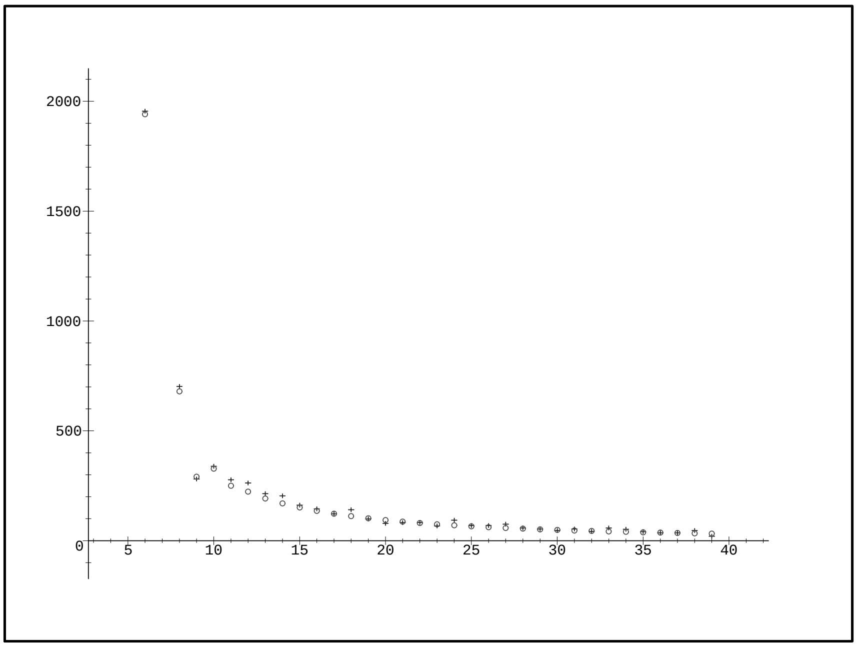


FIG. 4.4: Comparaison des résultats de la figure 4.1 (croix) avec la courbe théorique limite (rond) dans la partie «loi limite discrète».

avec $c_0 = \frac{32}{243\sqrt{\pi}} \approx 0.074$, (cf. figure 4.3)

$$\Pr\left[\nu(C_n) = \lfloor \alpha n \rfloor\right] = \begin{cases} \left[\dfrac{c_0}{\alpha^{3/2}(1/3-\alpha)^{5/2}} + o(1)\right] n^{-3/2} & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{3}, \\ O(\exp(-cn)) & \text{si } \alpha > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

– le paramètre $\nu(C_n)$ admet une «loi limite partielle» discrète, *i.e.* pour chaque valeur fixée k la limite des probabilités existe mais leur somme vaut seulement $65/81$, en vertu des alinéas précédents, (cf. figure 4.4)

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr[\nu(C_n) = k] = \frac{k g_k}{4^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} c k^{-3/2},$$

où g_k est le nombre de cartes planaires 3-connexes de taille n. Par exemple

$$p_n(6) = \Pr[\nu(C_n) = 6] \to 0.02.$$

Des résultats analogues sont valides pour les autres familles de cartes que nous considérons.

Le théorème suivant résume les résultats qui sont utiles pour la génération aléatoire.

Théorème 4.1 *Soit $\lambda(n) = o(n^{1/3})$ une fonction de n tendant vers l'infini et $I_n(\alpha)$ l'intervalle $\alpha n \pm n^{2/3}\lambda(n)$. On note pour un schéma de composition donné, P_f la probabilité limite d'être dans le mode discret et P_ν celle que la taille du noyau ν soit proche du second mode $\alpha_0 n$, i.e.*

$$\begin{aligned} P_f &= \lim_{n\to+\infty} \Pr(\nu(C_n) < \lambda(n)), \\ P_\nu &= \lim_{n\to+\infty} \Pr(\nu(C_n) \in I_n(\alpha_0)). \end{aligned}$$

cartes	noyau	α_0	P_f	P_ν
quelconques	non séparables	1/3	2/3	1/3
quelconques	s. boucle	2/3	P_1	$1 - P_1$
s. boucle	simples	2/3	P_2	$1 - P_2$
biparties	bip. simples	5/9	P_3	$1 - P_3$
non séparables	3-connexes	1/3	16/81	65/81
cubiques n. s.	cub. 3-c	1/2	P_4	$1 - P_4$
cubiques 3-c.	cub. 4-c	1/2	37/64	27/64

TAB. 4.1: Taille du noyau.

Les valeurs de α_0, P_f et P_ν sont données pour différentes familles de cartes dans le tableau 4.1.

En fait cette distribution curieuse se comprend plus naturellement si l'on introduit le paramètre $m(C_n)$, taille *maximale* d'une composante 3-connexe dans une carte non séparable de taille n (resp. 4-connexe dans une triangulation 3-connexe). En effet on a alors

Corollaire 4.2 *Pour toutes les familles du tableau 4.1,*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr(m(C_n) \in I_n(\alpha_0)) \quad = \quad 1.$$

À la lumière de ce corollaire, on voit que l'apparition des petits noyaux est simplement due à l'enracinement ! Quasiment toutes les cartes ont une plus grande composante du même ordre de grandeur, mais l'enracinement de la carte a une probabilité finie de «rater» cette composante.

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation des séries génératrices et de la méthode du col. Après avoir observé les résultats expérimentaux, j'ai tout d'abord prouvé que la moyenne a bien un comportement linéaire. Ensuite j'ai commencé à étudier la distribution d'abord en cherchant à utiliser l'analyse de singularité à la manière de F. Flajolet, M. Soria, M. Drmota [63, 52, 53, 51]. À ce moment j'ai trouvé un article de E.A. Bender, L.B. Richmond et N.C. Wormald [18] qui traite complètement le cas des composantes 4-connexes dans les triangulations 3-connexes. J'ai suivi leur approche pour étendre ces résultats aux autres familles de cartes, en dégageant ce qui m'a semblé pouvoir se traiter en toute généralité. Ce travail est plus fastidieux que véritablement novateur.

Par contre j'ai aussi pu obtenir un analogue à deux variables de ces résultats pour le cas des cartes non séparables :

Supposons qu'on veuille tirer au hasard un graphe 3-connexe planaire avec environ 500 sommets et 700 faces. Le nombre d'arêtes d'un tel graphe est à peu près 1200, et en vertu du théorème précédent il faut donc tirer une carte non séparable à $3 \times 1200 = 3600$ arêtes. L'algorithme donne alors rapidement un graphe 3-connexe avec à peu près 1200 arêtes, mais quasiment toujours avec environ 600 sommets et 600 faces ! En effet la probabilité qu'un graphe 3-connexe à N arêtes ait n sommets se comporte comme $c_1 N^{-3/2} e^{-c_2\delta^2 N}$ où $n = N(1/2 - \delta)$, comme l'ont montré E.A. Bender et L.B. Richmond dans [16]. Nous appelons le paramètre δ le *déséquilibre* sommets/faces d'une carte planaire. Pour une carte planaire, le déséquilibre δ varie entre $\pm 1/2$, mais pour un graphe planaire 3-connexe, il varie seulement entre $\pm 1/6$. En effet ces graphes sont simples (sans arêtes multiples), de même que leurs duaux. Ceci implique que les faces et les sommets ont un degré supérieur à 3 et donc que $3n \leq 2N$ et $3m \leq 2N$, d'où on déduit que $n/2 \leq m \leq 2n$.

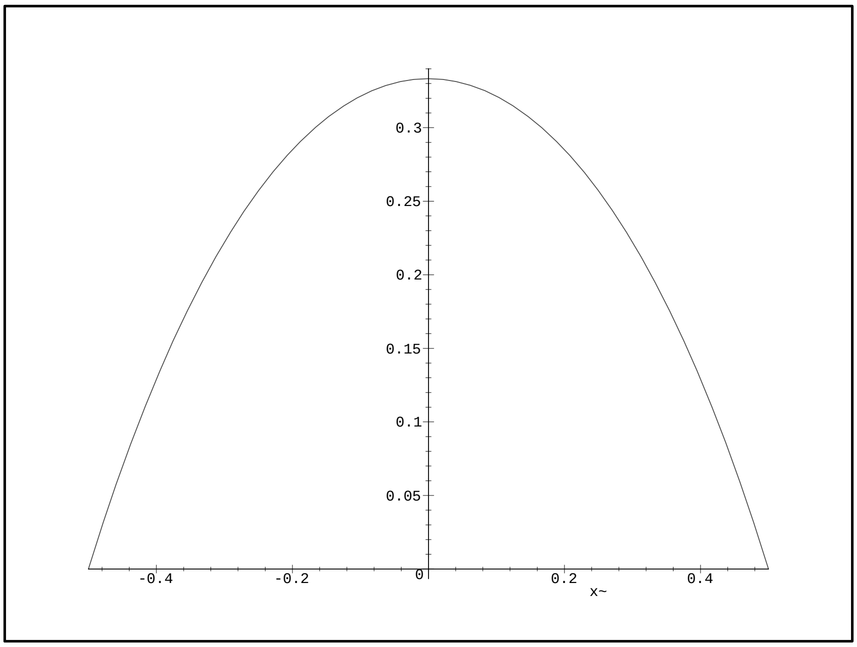


FIG. 4.5: Tracé théorique du rapport limite α_0 en fonction du déséquilibre sommets/faces x.

Le problème de tirer un graphe 3-connexe à 500 sommets, 700 faces est donc d'obtenir un déséquilibre $\delta = 1/2 - 500/1200 = 1/12$. Pour cela, une idée naturelle est de tirer des cartes non séparables ayant elles-mêmes un déséquilibre δ non nul. La question est alors de déterminer la taille et le déséquilibre de la carte non séparable qui nous donnera le plus rapidement notre graphe 3-connexe à 1200 arêtes et $\delta = 1/12$. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 4.3 *Soit C une carte planaire non séparable à N arêtes et de déséquilibre $\delta = x$. Notons $\nu(C)$ le nombre d'arêtes de son noyau et y son déséquilibre et posons $\alpha = \nu(C)/N$.*

Alors, pour $-1/2 < x < 1/2$ et $0 < \varepsilon < 1/6$ fixé, si la carte C est choisie uniformément parmi toutes les cartes non séparables planaires enracinées à N arêtes ayant un déséquilibre x, la valeur limite de y est $x/3$:

$$\lim_{N\to+\infty} \Pr(|y - x/3| < \varepsilon) \quad = \quad 1.$$

De plus, α n'a que deux points d'accumulation : 0 ou $\alpha_0(x)$ où (cf. figure 4.5)

$$\alpha_0(x) = \frac{(1-2x)(1+2x)}{3(1-2x/3)(1+2x/3)}.$$

Plus précisément, (cf. figure 4.6)

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} \Pr\left(|\alpha - \alpha_0(x)| < \frac{\lambda(N)}{N^{1/3}}\right) &= \frac{16}{9}\alpha_0(x)^2, \\ \lim_{N\to+\infty} \Pr(\alpha < \lambda(N)) &= 1 - \frac{16}{9}\alpha_0(x)^2, \end{aligned}$$

où $\lambda(N) = o(N)$ désigne n'importe quelle fonction donnée tendant vers l'infini.

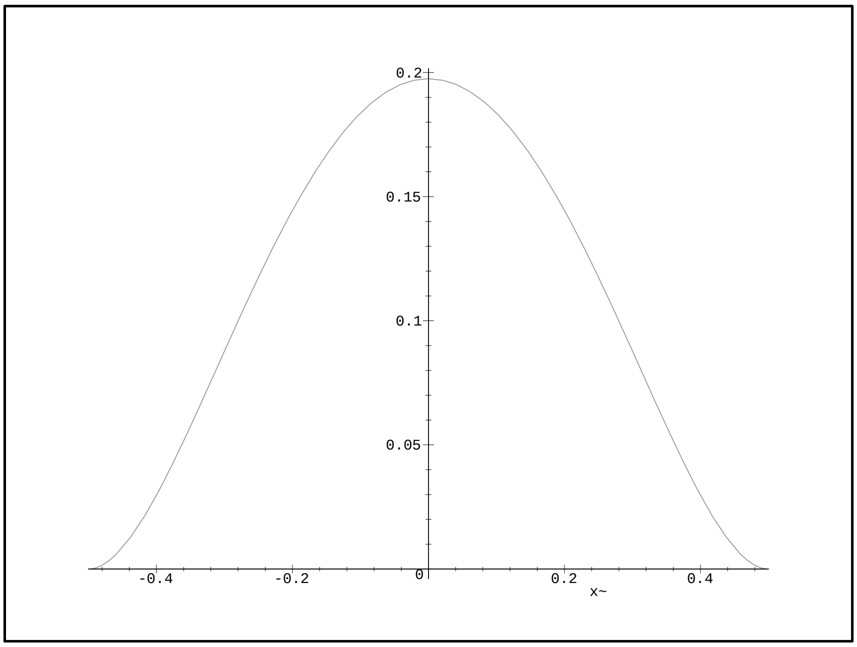


FIG. 4.6: Probabilité limite d'avoir un noyau de taille environ $\alpha_0(x)$, en fonction du déséquilibre sommets/faces x.

Le comportement en dehors de ces valeurs est bien contrôlé :

- *Pour* $|x| < 1/2 - \varepsilon$, $y = x/3 + O(N^{-1/2})$, $\alpha_0(x) - \alpha > (\lambda(N)^2/N)^{1/3}$, αN *tendant vers l'infini, il existe deux fonctions* $c(x, \alpha)$ *et* $d(x, \alpha)$ *algébriques et continues telles que*

$$\Pr(\delta = y) \sim \frac{c(x, \alpha)}{\alpha^3(\alpha_0(x) - \alpha)^{5/2} N^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{\alpha_0} \frac{(y - x/3)^2}{d(x, \alpha)} N\right).$$

- *Pour* $|x| < 1/2 - \varepsilon$, $|y - x/3| > N^{1/2}\lambda(N)$, *ou pour* $\alpha > \alpha_0(x) + (\lambda(N)^2/N)^{1/3}$, *il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\Pr(\delta = y) \sim O(\exp(-c\lambda(N))).$$

Ainsi pour avoir un déséquilibre $y = 1/12$, il nous faut choisir $x = 3y = 1/4$ et $N = 1200/\alpha(1/4) \approx 4670$, pour optimiser nos chances. On utilise alors l'algorithme (linéaire) de génération aléatoire de cartes non-séparables planaires selon nombres de sommets et de faces avec $n = 4670(1/2 - 1/4) = 1170$ et $m = 4670(1/2 + 1/4) = 3000$. La figure 4.7 montre comment le rapport N/K donnant la taille N de la carte à tirer pour obtenir un graphe de taille K évolue en fonction du déséquilibre y recherché. On constate que pour $y = 0$ on retrouve la valeur 3 du cas à une variable. Plus généralement, on retrouve tous les résultats du cas à une variable pour $x \sim 0$, en vertu du résultat de E.A. Bender et L.B. Richmond cité plus haut. Il est aussi clair que quand le déséquilibre augmente trop, les cartes sont de plus en plus coûteuses à obtenir.

La section 4.2 décrit la mise en équation du problème, à partir des idées de W.T. Tutte sur la composition des séries génératrices (section 1.5). Nous y calculons le comportement de la taille

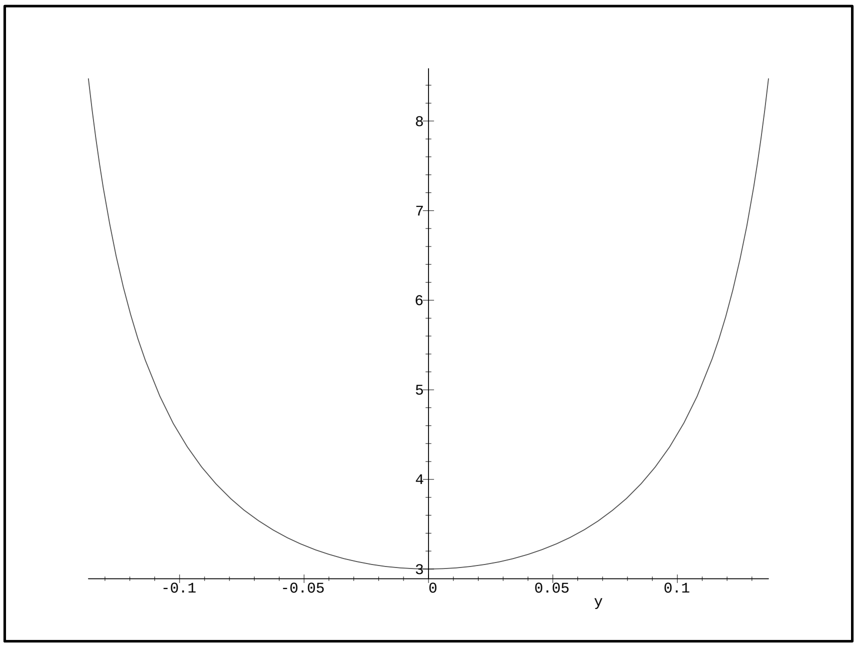


FIG. 4.7: Évolution du rapport taille noyau sur taille carte en fonction du déséquilibre y (sommets/faces du noyau) recherché.

moyenne du noyau. Puis la section 4.3 est consacrée à l'application de la méthode du col pour l'étude des statistiques à une variable. Enfin la section 4.4 présente l'extension des résultats au cas à deux variables, sur un exemple.

4.2 Taille du noyau et composition des séries génératrices

Les équations de composition de la section 1.5 permettent d'étudier le paramètre qui nous intéresse. Nous reprenons le même exemple qui nous a servi à introduire les équations de composition. Nous reviendrons plus loin sur le cas du noyau 3-connexe dans les cartes non séparables.

Soit $\mathcal{F}$ la famille de toutes les cartes planaires enracinées, $\mathcal{G}$ la famille des cartes non séparables et $\mathcal{H} = \mathcal{X}\mathcal{F}^2$ celle des couples de cartes planaires reliées par une arête. La taille d'une carte est son nombre d'arêtes. À la section 1.5, nous avons montré la relation

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ (\mathcal{X}\mathcal{F}^2).$$

Cette relation combinatoire se traduit par l'équation suivante pour les séries génératrices par rapport au nombre d'arêtes :

$$F(x) = G(xF(x)^2),$$

où $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ avec f_n le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes, et $G(x)$ est défini de même avec g_n le nombre de cartes non séparables enracinées.

La question qui nous occupe est d'étudier la distribution de la taille du noyau, c'est-à-dire la probabilité que le noyau G d'une carte F de taille n soit de taille k. Nous introduisons donc $f_{n,k}$ le nombre de cartes de $\mathcal{F}$ de taille n dont le noyau est de taille k. La série génératrice à deux variables de la famille $\mathcal{F}$ selon ces deux paramètres est

$$F(x,u) \quad = \quad \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} f_{n,k}x^n u^k.$$

En posant $H(x) = xF(x,1)^2$, nous avons la relation

$$F(x,u) = G(uH(x)).$$

Ainsi la probabilité que le noyau d'une carte de taille n soit de taille k est

$$p_n(k) = \frac{f_{n,k}}{f_n} = \frac{g_k}{f_n}[x^n](H(x))^k.$$

La taille moyenne du noyau d'une carte de taille n est

$$\bar{k}_n = \sum_k kp_n(k) = \frac{1}{f_n}[x^n]H(x)G'(H(x)).$$

Sous l'hypothèse que G et H sont lagrangiennes[4], l'étude de la moyenne peut se conduire par analyse de singularité :

La première étape est de comparer la singularité dominante r_h de $G(x)$ (et donc de $xG'(x)$) à la valeur $H(r_h)$ de $H(x)$ en sa singularité dominante r_h. Nous constatons dans tous les cas étudiés que $r_g = H(r_h)$. Ce cas de figure est appelé *cas critique* dans la terminologie de F. Flajolet et M. Soria [62]. Le développement de $H(x)G'(H(x))$ s'obtient en composant les deux développements singuliers de $zG'(z)$ et $H(z)$ (les développements de G et H que nous utilisons ont été obtenus à la fin de la section 1.4).

$$\begin{aligned} G(z) &= 4/3 - 4/9(1-27z/4) + 8\sqrt{3}/81(1-27z/4)^{3/2} + O((1-27z/4)^2), \\ zG'(z) &= 4/9 + 4\sqrt{3}/27(1-27z/4)^{1/2} + O(1-27z/4), \\ H(z) &= 4/27 - 4/9(1-12z) + 16/27(1-12z)^{3/2} + O((1-12z)^{3/2}), \end{aligned}$$

de sorte que

$$H(z)G'(H(z)) \quad = \quad 4/9 - 4/9(1-12z)^{1/2} + O(1-12z),$$

et, via le théorème de transfert,

$$[x^n]H(x)G'(H(x)) \sim \frac{2}{9\sqrt{\pi}n^{3/2}}12^n.$$

Le comportement de f_n s'obtient de manière analogue en développant $G(H(z))$ (on retrouve le développement de F) :

$$G(H(z)) = 4/3 - 4/3(1-12z) + 8/3(1-12z)^{3/2} + O((1-12z)^2)$$

[4] cf. section 1.4.

et, via le théorème de transfert,

$$f_n = [x^n]G(H(x)) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi} n^{5/2}} 12^n.$$

Finalement $\bar{k}_n \sim n/9$, *i.e.* la moyenne est linéaire[5].

Remarquons qu'un argument combinatoire, «plus on impose de connexité, (exponentiellement) moins il y a de cartes», donne

$$f_n \asymp h_n \text{ et } g_n \ll h_n$$

et garantit qu'on n'est pas dans un cas super critique (*i.e.* $H(r_h) > r_g$) car on aurait $f_n \asymp g_n$. Par contre, je n'ai pas trouvé d'argument *a priori* qui permette d'expliquer pourquoi dans toutes les compositions que j'ai été amené à considérer, le comportement est critique et non sous critique (*i.e.* $H(r_h) = r_g$ et non $H(r_h) < r_g$). En d'autres termes, pourquoi est-ce naturel qu'il y ait une grosse composante 2-connexe dans une carte ?

Il est tentant d'essayer de persévérer dans l'utilisation de l'analyse de singularité pour étudier la distribution. L'idée est de considérer la série $F(z, u) = G(uH(z))$ dans laquelle u est un paramètre voisin de 1. Il faut alors donner un développement singulier de cette série valable uniformément pour u voisin de 1 et dans un domaine de z permettant l'application des théorèmes d'analyse de singularité. Ces théorèmes de transfert nous donneraient alors une approximation uniforme de la série partielle $f_n(u)$, permettant de l'analyser à son tour. Cependant pour u voisin de 1, deux comportements singuliers se combinent : la singularité de H, pour $z \to r_h$, et la singularité de G pour $uH(z) \to r_g$, c'est-à-dire $z \to r(u)$ avec $r(u)$ l'unique solution (potentielle) de l'équation $uH(z) = r_g$ pour u voisin de 1 et z voisin de r_h. Remarquons que $r(1) = r_h$, de sorte que les deux comportements singuliers ne peuvent être traités séparément.

L'intérêt d'une preuve par analyse de singularité, du type de [53], par rapport à la preuve que nous allons développer, est une plus grande flexibilité : une fois un théorème général énoncé, les conditions à vérifier pour chaque exemple sont minimales. Au contraire nous n'obtenons par la méthode du col qu'un cadre général, suggérant ce qui doit se passer, mais laissant plusieurs vérifications à faire dans chaque cas particulier. De plus notre approche est limitée aux systèmes lagrangiens alors que la distribution observée est sans doute une caractéristique de la composition critique de deux singularités en $(1 - z)^{5/2}$.

Revenons donc à notre problème et, pour aller plus loin, mettons maintenant à profit le caractère lagrangien de nos séries génératrices. Par hypothèse sur $H(x)$, il existe Ψ et ϕ définies en 0 et vérifiant $\phi(0) \neq 0$ telles que

$$H(x) = \Psi(L(x)),$$

où $L(x)$ est l'unique série analytique à l'origine définie implicitement par

$$L(x) = x\phi(L(x)).$$

[5]Ceci suffit à démontrer que la méthode de génération aléatoire par extraction de noyau produit de grosses cartes.

Nous pouvons alors utiliser le théorème d'inversion de Lagrange pour écrire

$$\begin{aligned}[x^n]H^k(x) &= [x^n]\Psi(L)^k = \frac{1}{n}[x^n]x(\Psi(x)^k)'\phi(x)^n, \\ &= \frac{k}{n}[x^n]x\Psi(x)'\Psi(x)^{k-1}\phi(x)^n.\end{aligned}$$

Enfin nous allons utiliser la formule de Cauchy et appliquer la méthode du col pour calculer ce coefficient.

4.3 Méthode du col

Nous commençons par discuter de manière relativement générale les conditions d'application de la méthode du col pour notre problème. Puis nous l'appliquons de manière détaillée à l'exemple de la section précédente, en cherchant à dégager autant que possible les propriétés valables pour tout schéma de composition de cartes. Enfin nous donnons les valeurs des paramètres apparaissant pour les autres exemples qui nous sont utiles pour la génération aléatoire.

Les résultats de cette section s'inspirent fortement de l'article de E.A. Bender, L.B. Richmond et N.C. Wormald [18]. Le caractère générique du calcul peut paraître fastidieux, mais il me semble que les différents ingrédients qui font naître la distribution sont ainsi mieux mis en valeur.

4.3.1 Discussion générique

Soit $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ trois séries. Notre objectif est le calcul de

$$I(n,k) = [x^n]A(x)B(x)^kC(x)^n,$$

pour n tendant vers l'infini et $k = O(n)$. La discussion suivante est classique et nous amène à définir des conditions d'admissibilité «à la Hayman». La formule de Cauchy s'écrit

$$I(n,k) = \frac{1}{2i\pi}\oint A(z)B(z)^kC(z)^n\frac{dz}{z^{n+1}}$$

où l'intégrale porte sur un cercle centré à l'origine et de rayon de convergence inférieur aux rayons de convergence de $A(z)$, $B(z)$ et $C(z)$, que l'on suppose non nuls.

Définissons $F(r,\vartheta)$ comme l'intégrant de la formule suivante :

$$\begin{aligned}I(n,k) &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi} A(re^{i\vartheta})B(re^{i\vartheta})^kC(re^{i\vartheta})^n e^{-ni\vartheta}d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\vartheta)d\vartheta.\end{aligned}$$

Afin de calculer cette intégrale pour n et k grands, nous appliquons la méthode dite du col. Cette méthode, encore appelée méthode de la phase stationnaire, consiste à remarquer que la phase de $F(r,\vartheta)$ *tourne très vite* pour n grand, de sorte qu'en dehors des valeurs de ϑ pour lesquelles la phase est *stationnaire* les contributions sont négligeables. Nous allons choisir un rayon r tel que ce phénomène de stationnarité se produise au voisinage de $\vartheta = 0$ sous la forme d'un maximum global de $|F(r,\vartheta)|$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné et r_0 le minimum des rayons de convergence de $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$. Alors, pour $0 < r < (1-\varepsilon)r_0$, et si $C(r)$ et $B(r)$ sont non nuls, écrivons les développements suivants au voisinage de $\vartheta = 0$:

$$\begin{aligned}\ln(B(re^{i\vartheta})) &= \ln B(r) + i\beta_1(r)\vartheta - \beta_2(r)\vartheta^2 - i\beta_3(r)\vartheta^3 + O(\vartheta^4),\\ \ln(C(re^{i\vartheta})) &= \ln C(r) + i\gamma_1(r)\vartheta - \gamma_2(r)\vartheta^2 - i\gamma_3(r)\vartheta^3 + O(\vartheta^4).\end{aligned}$$

En particulier, on a $\beta_1(r) = rB'(r)/B(r)$ et $\gamma_1(r) = rC'(r)/C(r)$, et

$$\begin{aligned}L(r,\vartheta) &= \ln(B(re^{i\vartheta})^k C(re^{i\vartheta})^n e^{-ni\vartheta})\\ &= [k\ln B(r) + n\ln C(r)] + i\left(k\frac{rB'(r)}{B(r)} + n\frac{rC'(r)-C(r)}{C(r)}\right)\vartheta\\ &\quad - (k\beta_2(r) + n\gamma_2(r))\,\vartheta^2 - i\,(k\beta_3(r) + n\gamma_3(r))\,\vartheta^3 + O\left(n\vartheta^4\right).\end{aligned}$$

Prenons r égal à une fonction $\rho = \rho(n,k)$ telle que les trois conditions suivantes soient satisfaites pour tous (n,k) dans un certain ensemble $\mathcal{D}(\rho)$:

C1. Annulation du terme linéaire :

$$k\frac{\rho B'(\rho)}{B(\rho)} + n\frac{\rho C'(\rho) - C(\rho)}{C(\rho)} = 0$$

C2'. Positivité :

$$k\beta_2(\rho) + n\gamma_2(\rho) > 0$$

C3. Séparation :

$$0 < \rho < (1-\varepsilon)r_0.$$

Alors, pour $r = \rho$ et (n,k) dans $\mathcal{D}(\rho)$, $L(\rho,\vartheta)$ a un maximum local en $\vartheta = 0$. De plus, pour $n\vartheta^3 = o(1)$,

$$\begin{aligned}B(\rho e^{i\vartheta})^k C(\rho e^{i\vartheta})^n e^{-ni\vartheta} &= B(\rho)^k C(\rho)^n \exp\left[-(k\beta_2 + n\gamma_2)\vartheta^2\right]\\ &\qquad\qquad \exp\left[-i\,(k\beta_3 + n\gamma_3)\,\vartheta^3 + O\left(n\vartheta^4\right)\right]\\ &= B(\rho)^k C(\rho)^n \exp\left[-(k\beta_2 + n\gamma_2)\vartheta^2\right][1 - i(k\beta_3 + n\gamma_3)\vartheta^3 + O(n\vartheta^4)],\end{aligned}$$

où la dépendance en ρ est omise de manière à simplifier les expressions. Posons encore

$$A(re^{i\vartheta}) = A(r) + ia_1(r)\vartheta - a_2(r)\vartheta^2 - ia_3(r)\vartheta^3 + O(\vartheta^4).$$

Alors, toujours pour $n\vartheta^3 = o(1)$,

$$\begin{aligned}F(\rho,\vartheta) &= A(\rho e^{i\vartheta})B(\rho e^{i\vartheta})^k C(\rho e^{i\vartheta})^n e^{-ni\vartheta}\\ &= [A(\rho) + ia_1\vartheta - a_2\vartheta^2 - ia_3\vartheta^3 + O(\vartheta^4)][1 - i(k\beta_3 + n\gamma_3)\vartheta^3 + O(n\vartheta^4)]\\ &\qquad B(\rho)^k C(\rho)^n \exp\left[-(k\beta_2 + n\gamma_2)\vartheta^2\right]\\ &= [A(\rho) + ia_1\vartheta - a_2\vartheta^2 - i((k\beta_3 + n\gamma_3)A(\rho) + a_3)\vartheta^3 + (k\beta_3 + n\gamma_3)a_1\vartheta^4 + O(\vartheta^4 + n\vartheta^5)]\\ &\qquad B(\rho)^k C(\rho)^n \exp\left[-(k\beta_2 + n\gamma_2)\vartheta^2\right].\end{aligned}$$

Supposons maintenant que, quitte à restreindre $\mathcal{D}(\rho)$ à un ensemble $\mathcal{D}_0(\rho)$, la condition *globale* suivante puisse être obtenue pour tous (n,k) dans $\mathcal{D}_0(\rho)$:

C4'. La fonction $f(\vartheta) = |B(\rho e^{i\vartheta})^k C(\rho e^{i\vartheta})^n e^{-ni\vartheta}|$ a un maximum global en $\vartheta = 0$ et il existe une fonction $\vartheta_0(n)$ telle que f soit décroissante sur $[0, \vartheta_0]$ et pour $|\vartheta| \geq \vartheta_0$, $f(\vartheta) \leq f(\vartheta_0)$.

Alors, encore pour $n\vartheta_0^3 = o(1)$,

$$
\begin{aligned}
I(n,k) &= \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_{-\pi}^{\pi} F(\rho,\vartheta)d\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi\rho^n}\left[\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} F(\rho,\vartheta)d\vartheta + O\left(f(\vartheta_0)\sup|A(\rho e^{i\vartheta})|\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\rho^n}B(\rho)^k C(\rho)^n\left[\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}(A(\rho) - a_2\vartheta^2 + (k\beta_3 + n\gamma_3)a_1\vartheta^4)\exp(-(k\beta_2+n\gamma_2)\vartheta^2)d\vartheta\right. \\
&\qquad \left. + O\left(\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}(|\vartheta^4| + n|\vartheta^5|)\exp(-(k\beta_2+n\gamma_2)\vartheta^2)d\vartheta\right) + O\left(\exp(-(k\beta_2+n\gamma_2)\vartheta_0^2)\right)\right]
\end{aligned}
$$

cette dernière égalité étant valide grâce à l'annulation des contributions impaires. Afin de traiter les $O()$ il nous faut imposer que ϑ_0 vérifie $(k\beta_2 + n\gamma_2)\vartheta_0^2 \to +\infty$. Comme nous avons aussi imposé $n\vartheta_0^3 = o(1)$, ceci nous amène à la condition plus restrictive suivante :

C4. La condition (C4') est remplie avec $\vartheta_0 = (n\lambda(n))^{-1/3}$ où $\lambda(n)$ est une fonction donnée satisfaisant $\lambda(n) \to +\infty$ et $\lambda(n) = o(n)$.

C2. La condition (C2') est renforcée en

$$(k\beta_2 + n\gamma_2)(n\lambda(n))^{-2/3} \to +\infty.$$

Sous ces hypothèses, les deux conditions $n\vartheta_0^3 = \lambda(n)^{-1} = o(1)$ et $(k\beta_2 + n\gamma_2)\vartheta_0^2 \to +\infty$ sont remplies et nous pouvons utiliser l'estimation suivante[6], valide pour $\nu\vartheta_0 \to \infty$:

$$\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}|\vartheta|^m \exp(-\nu^2\vartheta^2)d\vartheta = \frac{2}{\nu^{m+1}}\int_0^{\nu\vartheta_0} x^m\exp(-x^2)dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\nu^{m+1}}(1 + O(1/\nu)).$$

Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I(n,k) &= \frac{B(\rho)^k C(\rho)^n}{2\pi\rho^n}\left[A(\rho)\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(k\beta_2+n\gamma_2)^{1/2}} + O\left((k\beta_2+n\gamma_2)^{-1}\right)\right) - \frac{a_2\Gamma(\frac{3}{2})}{(k\beta_2+n\gamma_2)^{3/2}}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{(k\beta_3+n\gamma_3)a_1\Gamma(\frac{5}{2})}{(k\beta_2+n\gamma_2)^{5/2}} + O\left((k\beta_2+n\gamma_2)^{-2} + n(k\beta_2+n\gamma_2)^{-3}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Finalement nous concluons en distinguant deux cas, toujours sous les hypothèses (C1) à (C4) :

1. si $A(\rho) \neq 0$:

$$I(n,k) = \frac{A(\rho)}{2\sqrt{\pi}(k\beta_2+n\gamma_2)^{1/2}}B(\rho)^k\left(\frac{C(\rho)}{\rho}\right)^n(1 + O(n^{-1/3})).$$

2. si $A(\rho) = 0$ et les autres termes ne s'éliminent pas tous :

$$I(n,k) = \frac{(-2a_2\beta_2 + 3a_1\beta_3)k + (-2a_2\gamma_2 + 3a_1\gamma_3)n}{8\sqrt{\pi}(k\beta_2+n\gamma_2)^{5/2}}B(\rho)^k\left(\frac{C(\rho)}{\rho}\right)^n(1 + O(n^{-1/3})).$$

[6]dans [18] cette formule est donnée avec un facteur 2 supplémentaire incorrect dans le membre droit.

4.3.2 Applications aux cartes, un exemple détaillé

Revenons maintenant au cas des compositions de cartes. La discussion suivante suit toujours d'assez près le travail de [18], dont nous mettons en valeur les caractéristiques propres à toutes les familles de cartes. Le coefficient qui nous intéresse est

$$\begin{aligned}
[x^n]H^k(x) &= [x^n]\Psi(L)^k = \frac{1}{n}[x^n]x(\Psi(x)^k)'\phi(x)^n, \\
&= \frac{k}{n}[x^n]x\frac{\Psi(x)'}{\Psi(x)}\Psi(x)^k\phi(x)^n, \\
&= \frac{k}{n}I(n,k),
\end{aligned}$$

pour $A(x) = x\Psi'(x)/\Psi(x)$, $B(x) = \Psi(x)$ et $C(x) = \phi(x)$.

Traitons par exemple le cas des noyaux non séparables dans les cartes quelconques, pour lequel nous avons déjà calculé la moyenne. La série H est la série des cartes enracinées sur un pont dont le paramétrage a été déjà utilisé pour obtenir son développement singulier :

$$\phi(y) = 3(1+y)^2 \quad \text{et} \quad \Psi(y) = \frac{1}{3}y\left(1-\frac{y}{3}\right)^2.$$

La condition (C1) donne les rayons critiques potentiels :

$$k\frac{r\Psi'(r)}{\Psi(r)} + n\frac{r\phi'(r)-\phi(r)}{\phi(r)} = 3k\frac{1-y}{3-y} + n\frac{1-y}{1+y} = 0.$$

On trouve deux solutions, 1 et $3(n-k)/(n+3k)$. Remarquons que la valeur critique $\tau = 1$, solution de $\tau\phi'(\tau) - \phi(\tau)$ est l'un des deux rayons critiques. Ceci est valable pour toutes les familles de cartes lagrangiennes : en effet leur paramétrage est singulier[7] *i.e.* il vérifie $\Psi'(\tau) = 0$.

– *Le rayon* τ. Traitons d'abord le cas de ce rayon critique τ. Toujours de manière générale, on a $A(\tau) = \tau\Psi'(\tau)/\Psi(\tau) = 0$, ce qui implique que dans la zone de validité du rayon τ, l'intégrale tombera dans le second cas de la section précédente.

Calculons les développements nécessaires :

$$\begin{aligned}
\ln(\Psi(\tau e^{i\vartheta})) &= \ln(4/27) + 3\vartheta^2/4 + i\vartheta^3/2 + O(\vartheta^4), \\
\ln(\phi(\tau e^{i\vartheta})) &= \ln(12) + i\vartheta - \vartheta^2/4 + O(\vartheta^4), \\
\tau e^{i\vartheta}\Psi'(\tau e^{i\vartheta})/\Psi(\tau e^{i\vartheta}) &= -3i\vartheta/2 + 3\vartheta^2/2 + O(\vartheta^3).
\end{aligned}$$

La condition (C2), $\beta_2 k + \gamma_2 n > (n\lambda(n))^{2/3}$ s'écrit

$$k < n/3 - (n\lambda(n))^{2/3}.$$

Remarquons que de manière générale, $\beta_2(\tau) = \frac{1}{2}\frac{\tau^2\Psi''(\tau)}{\Psi(\tau)}$ et $\gamma_2(\tau) = \frac{1}{2}\frac{\tau^2\phi''(\tau)}{\phi(\tau)}$, de sorte que la condition (C2) s'écrit

$$k < \alpha_0 n - (n\lambda(n))^{2/3} \quad \text{où} \quad \alpha_0 = -\frac{\phi''(\tau)}{\phi(\tau)}\frac{\Psi(\tau)}{\Psi''(\tau)} > 0$$

[7] au sens de la section 1.4.

et définit un intervalle de validité pour le rayon τ contenu dans $[0, \alpha_0 n[$.

La condition de séparation (C3) étant vérifiée par τ, il reste à étudier la condition (C4). Nous avons

$$\begin{aligned} g_r(\vartheta) &= f_r(\vartheta)^2 = 9^{n-k}|1+re^{i\vartheta}|^{4n}|1-\frac{r}{3}e^{i\vartheta}|^{2k}, \\ &= 9^{n-k}(1+r^2+2r\cos(\vartheta))^{2n}(1+r^2/9+2r\cos(\vartheta)/3)^k, \\ g'_r(\vartheta) &= -2r\sin(\vartheta)(a(n,k,r)+b(n,k,r)\cos(\vartheta))(1+c(\vartheta)^2). \end{aligned}$$

En particulier on voit que $f_r(\vartheta)$ ne peut avoir que 0, π et éventuellement ζ et $-\zeta$ comme points critiques. En tous cas si 0 est maximum local alors, seul π peut-être un autre maximum local. Or $f_r(\pi)/f_r(0) = \left(\frac{\phi(-r)}{\phi(r)}\right)^n \left(\frac{\Psi(-r)}{\Psi(r)}\right)^k$ tend vers $+\infty$ exponentiellement vite pour $k < n$ et $r \le \tau$. Il suffit donc qu'on ait un maximum local en $\vartheta = 0$ pour que la condition (C4') soit vérifiée. Sous la condition (C2) on a de plus (C4).

Afin d'appliquer les résultats de la section précédente il nous reste à calculer les constantes :

$$\begin{aligned} -2a_2\beta_2 + 3a_1\beta_3 &= 0, \\ -2a_2\gamma_2 + 3a_1\gamma_3 &= 3/4. \end{aligned}$$

L'annulation de la première constante est générale[8] : en effet dans notre cas $A(x) = x(\ln B(x))'$ de sorte que pour tout i, $a_{(i-1)} = i\beta_i$. En particulier $a_1 = 2\beta_2$ et $a_2 = 3\beta_3$.

Le résultat final est donc

$$[x^n]H^k(x) = \frac{k}{n}I(n,k) \sim \frac{k(3n/4)}{8\sqrt{\pi}n(n/4-3k/4)^{5/2}}\Psi(\tau)^k\left(\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right)^n \sim \frac{3k}{\sqrt{\pi}(n-3k)^{5/2}}\left(\frac{4}{27}\right)^k 12^n.$$

En particulier pour $k = 1$, on retrouve[9] l'équivalent de h_n.

Pour calculer $p_n(k)$ nous utilisons les équivalents suivants (ce qui nous impose de supposer k tendant vers l'infini),

$$\begin{aligned} g_k &= C_g k^{-5/2} r_g^{-k} \sim \frac{2}{27k^{5/2}}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(\frac{27}{4}\right)^k \\ f_n &= C_f n^{-5/2} r_h^{-n} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}n^{5/2}}12^n. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons le comportement de p_k pour k/n entre 0 et α_0.

Lemme 4.4 *Soit $\lambda(n) = o(n)$ une fonction divergente vers $+\infty$. Pour $k < n/3 - (n\lambda(n))^{2/3}$, k tendant vers l'infini,*

$$p_n(k) = \frac{g_k}{f_n}[x^n]H^k(x) \sim \frac{n^{5/2}}{9\sqrt{3\pi}k^{3/2}(n-3k)^{5/2}}.$$

---

[8] sauf dans le cas traité dans [18], dans lequel le schéma est un peu différent. Il faut prendre $A(x) = \Psi'(x)/\Psi(x)$, au lieu de $A(x) = x\Psi'(x)/\Psi(x)$, ce qui supprime le phénomène d'annulation. Les probabilités obtenues se comportent alors très légèrement différemment dans l'intervalle $0 < \alpha < \alpha_0$.

[9] Dans [18] on constate bien la présence d'un facteur 2 incorrect dû à la petite erreur dans l'estimation de Γ.

L'annulation des termes élevés aux puissances n et k est là encore générale : on a toujours $\tau/\phi(\tau) = r_h$ et nous avons déjà remarqué que $\Psi(\tau) = H(r_h) = r_g$ (c'est-à-dire que la composition est critique, ce qui donnait la moyenne linéaire). De manière générale, on obtiendra des probabilités de la forme :

$$p_n(k) \sim \frac{cn^{5/2}}{k^{3/2}(\alpha_0 - k/n)^{5/2}} \qquad \text{pour } \lambda(n) < k < \alpha_0 n - (n\lambda(n))^{2/3}.$$

Remarquons que si on sait que la probabilité est de cette forme, on peut retrouver rapidement la constante c en utilisant l'analyse de singularité pour avoir directement $[x^n]H^k(x)$ pour k fixé.

– *Le second rayon critique* $\rho = 3(n-k)/(n+3k)$. Cette fois $\Psi'(\tau) \neq 0$, dans le domaine de validité de ρ, on sera dans le premier cas de la section précédente. Il nous suffit donc des développements suivants :

$$\begin{aligned} \ln(\Psi(\rho e^{i\vartheta})) &= \ln(\Psi(\rho)) + i\beta_1\vartheta - \frac{3(n-k)(n+3k)}{16n^2}\vartheta^2 + O(\vartheta^3), \\ \ln(\phi(\rho e^{i\vartheta})) &= \ln(\phi(\rho)) + i\gamma_1\vartheta + \frac{(n-k)(n+3k)}{16k^2}\vartheta^2 + O(\vartheta^3). \end{aligned}$$

La condition (C2) s'écrit

$$\frac{(n-k)(n+3k)}{16n^2}(3k-n) > (n\lambda(n))^{2/3} \text{ ou encore } (n-k)(3k-n) > (n\lambda_1(n))^{2/3}.$$

et définit un intervalle de validité de la forme $]\alpha_0 n, n[$.

Les conditions (C3) et (C4) sont toujours vérifiées en vertu de la discussion pour $r = \tau$. Nous obtenons donc, avec $A(\rho) = O((n-3k)/(n-k))$,

$$[x^n]H^k(x) = O\left(\frac{(n-3k)^{1/2}}{n-k}\right)\Psi(\rho)^k\left(\frac{\phi(\rho)}{\rho}\right)^n.$$

Reste donc à étudier le comportement des puissances. Si on pose $k = (\alpha_0 + s)n$, alors $\rho = (1 - 3s/2)/(1+3s/2)$. De manière générale, le développement suivant se simplifie jusqu'à l'ordre trois quel que soit le paramétrage ϕ, Ψ :

$$\ln\left(\Psi(x\tau)^{\alpha_0}\frac{\phi(x\tau)}{x\tau}\right) = \ln\left(\Psi(\tau)^{\alpha_0}\frac{\phi(\tau)}{\tau}\right) - \frac{\tau^3(x-1)^3}{6}\left(3\frac{\phi''(\tau)}{\tau\phi(\tau)} - \frac{\phi'''(\tau)}{\phi(\tau)} - \frac{\Psi'''(\tau)}{\Psi(\tau)}\right) + O((x-1)^4).$$

Comme de plus le coefficient ne peut être positif (sinon les probabilités divergeraient), à moins d'une annulation à tous les ordres assez peu probable (impossible ?), on obtient toujours le comportement pour k/n supérieur à α_0.

Lemme 4.5 *Soit $\lambda(n) = o(n)$ une fonction divergente vers $+\infty$. Pour $k > \alpha_0 n + (n\lambda(n))^{2/3}$,*

$$p_n(k) = O(\exp(-C\lambda(n))).$$

Il suffit pour établir ce résultat pour une autre famille de vérifier que le rayon $\rho(s)$ vérifie $\rho(s) \to \tau^-$ linéairement quand $s \to 0^+$ où $k = (\alpha_0 + s)n$.

– *Concentrations.* Calculons maintenant la probabilité que le noyau soit de taille sous-linéaire. D'après la discussion[10] du rayon τ, pour $k = o(n)$,

$$p_n(k) \sim \frac{3}{2}g_k k\left(\frac{4}{27}\right)^k.$$

[10]On utilise ici directement notre estimation par la méthode du col de $[x^n]H(x)^k$ pour k fini. Dans [18] les auteurs choisissent de la recalculer par la méthode de Darboux ; ceci explique pourquoi leur facteur 2 incorrect dans l'estimation de Γ ne se transmet pas au calcul des probabilités d'être dans chacun des deux régimes.

La somme de ces valeurs est finie et inférieure à 1 :

$$\sum_{k\geq 0} kg_k \left(\frac{4}{27}\right)^k = \frac{3}{2} r_g G'(r_g) = \frac{2}{3}.$$

Montrons maintenant que les probabilités tendent vers 0 en dehors des valeurs finies et du voisinage de α_0. Soit $\mu(n)$ tendant vers l'infini. Alors,

$$\sum_{k=\mu(n)}^{n/4} \frac{cn^{5/2}}{k^{3/2}(n-3k)^{5/2}} < \sum_{k=\mu(n)}^{n/4} \frac{4^{5/2}c}{k^{3/2}} = O(\mu(n)^{-1/2}),$$

$$\sum_{k=n/4}^{n/3-(n\mu(n))^{2/3}} \frac{cn^{5/2}}{k^{3/2}(n-3k)^{5/2}} < \sum_{k=n/4}^{n/3-(n\mu(n))^{2/3}} \frac{4^{3/2}cn}{(n\mu(n))^{5/3}} = O(n^{-1/3}\mu(n)^{-2/3}) = O(\mu(n)^{-2/3}).$$

On en déduit que

$$\sum_{k=\mu(n)}^{n/3-(n\mu(n))^{2/3}} p_n(k) = O(\mu^{-1/2}).$$

Pour $k > n/3 + \mu(n)$ le calcul est plus facile et finalement on obtient le

Lemme 4.6 *Soit $\lambda(n) = o(n^{1/3})$ une fonction de n divergente vers $+\infty$, alors*

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \Pr\left(|\nu(C_n) - n/3| < n^{2/3}\lambda(n)\right) = \dfrac{1}{3}, \\ \lim_{n\to+\infty} \Pr\left(\nu(C_n) < \lambda(n)^3\right) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

– *Plus grande composante.* Soit $\mathcal{F}_n^1$ l'ensemble des cartes de taille n dont la plus grande composante non séparable est de taille $n/3 \pm n^{2/3}\lambda(n)$ et f_n^1 leur nombre. Remarquons que le noyau est la composante non séparable contenant la racine et que toute autre composante non séparable est incluse dans l'une des sous-cartes extraites.

Montrons tout d'abord que le nombre de cartes ayant plusieurs (2 ou 3) composantes non séparables de cette taille est négligeable : soit $\sigma(C)$ la taille de la plus grande sous carte attachée au noyau de C. Alors le nombre de cartes pour lesquelles $\nu(C) = k$ et $\sigma(C) = i$ est majoré par le nombre de carte dont le noyau est de taille k et dont l'une sous-carte est de taille au moins i. Ce nombre est lui-même inférieur à

$$\ell_n = g_k k h_i [x^{n-i}] H^{k-1}.$$

Si on veut i et k de l'ordre de $n/3$, alors $n - i$ est de l'ordre de $n/3$ lui aussi, de sorte que $k/(n-i) \approx 1^- > \alpha_0$. En particulier en utilisant les équivalents obtenus précédemment on voit que ℓ_n est exponentiellement faible devant f_n. On peut donc s'intéresser uniquement aux cartes n'ayant pas d'autres composantes de cette taille.

Considérons une carte de $\mathcal{F}_n^1$ dans laquelle est choisie une seconde racine, appartenant à la plus grande composante non séparable. Comme cette composante est de taille $\sim n/3$, le nombre de ces cartes doublement enracinées est $\sim f_n^1 \cdot n/3$. Maintenant ces cartes s'obtiennent aussi en choisissant une carte dont le noyau est d'ordre $n/3$ puis en enracinant une des n arêtes. Il y a donc $\sim f_n/3 \cdot n$ telles cartes et on peut conclure que $f_n^1 \sim f_n$.

Lemme 4.7 *Soit $\mu(C)$ la taille de la plus grande composante non séparable de C et $I_n(\alpha)$ l'intervalle $\alpha n \pm n^{2/3}\lambda(n)$ pour une fonction $\lambda(n)$ tendant vers l'infini. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr(\mu(C) \in I_n(1/3)) = 1.$$

Enfin on pourrait à l'instar de [18] étudier plus en détails le comportement au voisinage de α_0. Ces auteurs montrent (pour les triangulations 3-connexes) qu'au voisinage de $\alpha_0 n$, la distribution limite[11] forme au voisinage de $\alpha_0 n$ un plateau de largeur $n^{2/3}/\lambda(n)$. Cependant expérimentalement, on constate que le mode de la distribution au voisinage de α_0 reste curieusement légèrement supérieur (par exemple sur la figure 4.1(b), on voit qu'il se trouve vers $k \approx 720$ au lieu de 670). Peut être ce phénomène montre-t-il simplement que la convergence est plus lente au voisinage de $\alpha_0 n$ que dans le régime discret.

4.3.3 Applications aux cartes, autres exemples

Les résultats sont du même type que précédemment, aussi donnons nous uniquement l'équation satisfaite et la taille du noyau.

Noyaux 3-connexes des cartes non séparables

Désignons respectivement par $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{H}_n$ les familles de cartes planaires respectivement

- non séparables avec noyau à $n+1$ arêtes,
- 3-connexes à $n+1$ arêtes,
- non séparables à $n+1$ arêtes, pour $n \geq 1$.

Les séries génératrices de ces familles de cartes vérifient

$$F(x,u) = x + G(uH(x)),$$

où $H(x)$ est donnée par le paramétrage

$$\phi(y) = (1+y)^3 \quad \text{et} \quad \Psi(y) = y - y^2.$$

On trouve $\alpha_0 = \frac{1}{3}$.

Noyaux 3-connexes des triangulations non séparables

Soit $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ les familles de triangulations planaires suivantes :

- non séparables à $n+2$ sommets,
- 3-connexes à $n+2$ sommets.

[11] c'est là un abus de langage : si on renormalise pour avoir une limite au voisinage de $\alpha_0 n$, le régime discret est envoyé en $-\infty$.

Les séries génératrices de ces familles de cartes sont connues depuis Tutte et vérifient

$$F(x,u) = G(ux(1+F(x))^3).$$

La série génératrice $H(x) = x(1+F(x))^3$ est donnée par le paramétrage

$$\phi(y) = 2(1+y)^3 \quad \text{et} \quad \Psi(y) = \frac{y(2-y)^3}{16}.$$

On trouve $\alpha_0 = \frac{1}{2}$.

Noyaux 4-connexes des triangulations 3-connexes

Soit $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ les familles de triangulations planaires suivantes :

- 3-connexes à $n+2$ sommets.
- 4-connexes à $n+2$ sommets,

Les séries génératrices des familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont connues depuis Tutte et vérifient

$$xF(x,u) = x + xF(x)G(uxF^2(x)).$$

C'est le cas traité dans [18] par E.A. Bender, L.B. Richmond et N.C. Wormald. Le schéma de composition est un peu différent, mais on garde une composition critique de deux singularités en $(1-z)^{5/2}$ et les résultats sont tout à fait similaires aux nôtres. On trouve $\alpha_0 = \frac{1}{2}$.

Noyaux simples des cartes biparties

Désignons respectivement par $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ les familles de cartes planaires

- biparties à n arêtes,
- biparties simples à n arêtes.

Les séries génératrices de ces familles de cartes vérifient

$$F(x,u) = G(ux(1+F(x))).$$

La série génératrice $F(x)$ des cartes biparties à n arêtes est donnée par le paramétrage

$$\phi(y) = 2(1+y)^2 \quad \text{et} \quad \Psi(y) = y/2 - y^2/4.$$

On trouve $\alpha_0 = \frac{5}{9}$. Il faut faire un peu attention car $H(x) = 1 + F(x)$ a comme paramétrage $\Psi_h(x) = 1 + y/2 - y^2/4$ qui ne se factorise pas en termes linéaires réels ; on a alors deux rayons secondaires à étudier.

Noyaux sans boucle des cartes quelconques

Désignons respectivement par $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ les familles de cartes planaires

- quelconques à n arêtes,

– sans boucle à n arêtes.

Les séries génératrices de ces familles de cartes vérifient

$$F(x,u) = xF(x)^2 + G\left(\frac{ux}{(1-xF(x))^2}\right).$$

La série génératrice $H(x) = x(1-F(x))^{-2}$ est donnée par le paramétrage

$$\phi(y) = 3(1+y)^2 \quad \text{et} \quad \Psi(y) = \frac{27y}{(3+y)^4}.$$

On trouve $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

Noyaux simples des cartes sans boucle

Désignons respectivement par $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ les familles de cartes planaires

– sans boucle à n arêtes,

– simples à n arêtes.

Les séries génératrices de ces familles de cartes vérifient

$$F(x,u) = G(uxF(x)).$$

La série génératrice $H(x) = xF(x)$ est donnée par le paramétrage

$$\phi(y) = \frac{1}{(1-y)^3} \quad \text{et} \quad \Psi(y) = y(1-2y).$$

On trouve $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

4.4 Séries à deux variables

Nous étudions dans cette partie le comportement asymptotique des nombres de sommets et de faces des noyaux 3-connexes de cartes non séparables.

Nous disposons pour cela d'une extension à deux variables de la relation de composition de W.T. Tutte, due à R.C. Mullin et P.J. Schellenberg [117].

4.4.1 Mise en équation

Soit $a(x,y)$ et $b(x,y)$ les solutions du système

$$\begin{aligned} a(x,y) &= x\phi_1(b(x,y)), \\ b(x,y) &= y\phi_2(a(x,y)), \end{aligned}$$

où

$$\phi_1(v) = \frac{1}{(1-v)^2} \quad \text{et} \quad \phi_2(u) = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

Soit encore

$$\psi(u,v) = uv(1-u-v).$$

Alors la série génératrice à deux variables

$$H(x,y) = \psi(a(x,y), b(x,y)) = \sum_{n,m\geq 1} h_{n,m} x^n y^m$$

est la série génératrice des cartes non séparables à $n+1$ sommets et $m+1$ faces ([117] voir aussi [7, 16, 10]).

Soit $G(x,y)$ la série génératrice des cartes 3-connexes selon sommets et faces et $F(x,y,z_1,z_2)$ la série génératrice des cartes non séparables ayant un noyau, comptées selon sommets, faces et sommets et faces du noyau. Alors

$$F(x,y,z_1,z_2) = xy + \frac{xy}{H(x,y)} G\left(z_1 \frac{H(x,y)}{y}, z_2 \frac{H(x,y)}{x}\right).$$

On en déduit que la probabilité que le noyau d'une carte non séparable à $n+1$ sommets, $m+1$ faces ait $k+1$ sommets et $\ell+1$ faces est

$$p_{n,m}(k,\ell) = \frac{[x^n y^m z_1^k z_2^\ell] F(x,y,z_1,z_2)}{[x^n y^m] H(x,y)} = \frac{g_{k,\ell}}{h_{n,m}} [x^{n+\ell-1} y^{m+k-1}] H(x,y)^{k+\ell-1}.$$

Ici on a divisé par $h_{n,m}$ et non $f_{n,m}$ car $\mathcal{F}$ est la famille des cartes ayant un noyau non vide, alors qu'on s'intéresse à toutes les cartes non séparables. L'objectif de cette section est l'étude de cette probabilité.

Comme dans le cas à une variable, nous utilisons la formule de Lagrange-Good à deux variables (cf. [71, section 1.2]) pour exprimer les coefficients de la série $H(x,y)^{k+\ell-1}$.

$$[x^p y^q] \Psi(a(x,y), b(x,y)) = [u^p v^q] \Psi(u,v) \left(1 - \frac{uv}{\phi_1(v)\phi_2(u)} \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(v) \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u)\right) \phi_1(v)^p \phi_2(u)^q,$$

Nous utiliserons plutôt la variante suivante (cf. [21, exercice 3.2.13])

$$\frac{1}{pq} [u^p v^q] \Psi(u,v) \left(q \frac{u \Psi'_u(u,v)}{\Psi(u,v)} + p \frac{v \Psi'_v(u,v)}{\Psi(u,v)} - \frac{uv \Psi''_{uv}(u,v)}{\Psi(u,v)}\right) \phi_1(u)^p \phi_2(v)^q,$$

avec laquelle moins d'annulations se produisent. En effet, dans la formule classique le facteur pq du dénominateur reste caché et il faut aller le chercher en faisant des développements plus longs.

Pour $p = n+\ell$, $q = m+k$ et $\Psi(u,v) = (uv(1-u-v))^{k+\ell-1}$, on obtient :

$$p_{n,m}(k,\ell) = \frac{(k+\ell-1)}{(n+\ell-1)(m+k-1)} \frac{g_{k,\ell}}{h_{n,m}} [u^{n+\ell-1} v^{m+k-1}] \frac{(uv(1-u-v))^{k+\ell-1}}{(1-u)^{2(n+\ell-1)}(1-v)^{2(m+k-1)}} p_0(u,v),$$

avec $p_0(u,v) = \frac{(m+k-1)(1-2u-v)+(n+\ell-1)(1-u-2v)-(1-2u-2v)}{1-u-v} - \frac{(k+l-2)(1-2u-v)(1-u-2v)}{(1-u-v)^2}$.

– *Paramétrage et domaine de validité.* Les valeurs prises par k et ℓ subissent des contraintes combinatoires. Naturellement $k \leq n$ et $\ell \leq m$, mais ce n'est pas tout car les cartes 3-connexes sont en particulier des cartes simples (*i.e.* sans arêtes multiples), de même que leur duales : les $(m+1)$

faces et les $(n+1)$ sommets ont donc un degré au moins égal à trois, ce qui implique que le nombre d'arêtes N vérifie $2N \geq 3(n+1)$ et $2N \geq 3(m+1)$. Comme la relation d'Euler s'écrit $N = n+m$, on en déduit que $n \leq 2m-3$ et $m \leq 2n-3$.

Nous utiliserons les notations[12] suivantes, qui mettent en valeur le déséquilibre entre le nombre de sommets et le nombre de faces :

$$n = \left(\frac{1}{2} - x\right) N, \qquad m = \left(\frac{1}{2} + x\right) N,$$
$$k = \left(\frac{1}{2} - y\right) K, \qquad \ell = \left(\frac{1}{2} + y\right) K,$$

et $K = \alpha N$. Les contraintes précédentes se traduisent par la condition

$$(x, y, \alpha) \in \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ est le domaine d'étude :

$$\begin{cases} |x| < 1/2, \\ |y| < 1/6, \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \\ (1-2y)\alpha \leq (1-2x), \\ (1+2y)\alpha \leq (1+2x). \end{cases}$$

– *Équivalents de $h_{n,m}$ et $g_{k,\ell}$.* Les coefficients $g_{k,\ell}$ et $h_{n,m}$ sont connus : $h_{n,m}$ a été calculé par W.G. Brown et W.T. Tutte [34], et nous en avons donné une preuve combinatoire à la section 2.3.3.

$$h_{n,m} = \frac{(n+2m-2)!(m+2n-2)!}{n!m!(2n-1)!(2m-1)!}.$$

Les nombres $g_{k,\ell}$ ne semblent pas avoir une aussi belle formule close, mais un équivalent en est donné par E.A. Bender et L.B. Richmond [16] : pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément pour $1/2+\varepsilon < k/\ell < 2-\varepsilon$,

$$g_{k,\ell} \sim \frac{1}{\pi k^{3/2} \ell^{3/2}} \left(\frac{(2k-\ell)(2\ell-k)}{9k\ell}\right)^{5/2} \left(\frac{4k(2\ell-k)}{(2k-\ell)^2}\right)^k \left(\frac{4\ell(2k-\ell)}{(2\ell-k)^2}\right)^\ell.$$

En termes de x, y et α, on en déduit les développements suivants, valables uniformément pour $|x| < 1/2 - \varepsilon$ et $|y| < 1/6 - \varepsilon$:

$$\ln g_{k,\ell} \quad = \quad \lg(y)\alpha N - 3\ln(\alpha N) + \ln\left(\frac{8(1+6y)^{5/2}(1-6y)^{5/2}}{243(1+2y)^4(1-2y)^4}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

où

$$\lg(y) = \ln 4 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+2y)(1-2y)}{(1+6y)(1-6y)}\right) + y\ln\left(\frac{(1+2y)(1-6y)^3}{(1-2y)(1+6y)^3}\right)$$

[12] on note les déséquilibres x et y bien que ces deux lettres servent déjà pour les variables muettes des séries formelles. De toutes manières, dans le reste de la section ces dernières n'apparaissent plus.

et

$$\ln h_{n,m} = \mathrm{lh}(x)N + \ln\left(\frac{8}{\pi N^3}\right) - \frac{3}{2}\ln(3-2x)(3+2x) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

où

$$\mathrm{lh}(x) = \ln\frac{27}{4} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{(1-2x/3)(1+2x/3)}{(1-2x)(1+2x)}\right) + x\ln\left(\frac{(3+2x)(1-2x)^3}{(3-2x)(1+2x)^3}\right).$$

4.4.2 Méthode du col à deux variables

On applique alors la formule de Cauchy deux fois pour exprimer le coefficient qui nous intéresse sous forme d'intégrale. Posons

$$\begin{aligned} I(n,m,k,\ell) &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint\oint \frac{(1-u-v)^{k+\ell}p(u,v)}{(1-u)^{2(n+\ell)}(1-v)^{2(m+k)}u^{n-k+1}v^{m-\ell+1}}dudv, \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r_1,r_2,t,\vartheta)p(re^{it},se^{i\vartheta})dtd\vartheta. \end{aligned}$$

où $F(r,s,t,\vartheta)$ et $p(u,v)$ sont définis par

$$\begin{aligned} F(r,s,t,\vartheta) &= \frac{(1-re^{it}-se^{i\vartheta})^{k+\ell}}{(1-re^{it})^{2(n+\ell)}(1-se^{i\vartheta})^{2(m+k)}}(re^{it})^{k-n}(se^{i\vartheta})^{\ell-m}, \\ p(u,v) &= p_0(u,v)\frac{(1-u)^2(1-v)^2}{(1-u-v)}, \end{aligned}$$

et où les rayons d'intégration vérifient $r+s<1$.

– *Plan d'étude.* Dans toute la suite de la section, on suppose que le déséquilibre x vérifie $|x| < 1/2-\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.[13] Nous allons procéder en partie de manière analogue au cas à une variable :

1. Trouver des rayons pour lesquels l'intégrant se concentre en $(t,\vartheta) = (0,0)$. Pour cela,
   (a) Annuler les termes linéaires dans le développement du logarithme de $F(r,s,t,\vartheta)$ en $(t,\vartheta) = (0,0)$.
   (b) Déterminer pour les rayons ainsi obtenus le domaine dans lequel les termes quadratiques sont négatifs (*i.e.* existence d'un maximum local).
   (c) Vérifier que le maximum est global.
2. Comparer le facteur exponentiel qui apparaissent au facteur exponentiel de $g_{k,\ell}/h_{n,m}$.
3. Dans le cas où les facteurs exponentiels se compensent,
   (a) Développer l'intégrant au voisinage de zéro, dans une base adaptée au calcul de l'intégrale (séparation des variables).
   (b) Ramener les intégrales dans un voisinage circulaire autour de zéro (premier terme d'erreur). Effectuer le changement de variable (une rotation) pour utiliser les développements et séparer les variables (deuxième terme d'erreur). Finalement replacer les intégrales sur un carré pour les séparer (troisième terme d'erreur).

[13] Les résultats ne sont pas uniformes pour $|x| < 1/2$: en effet les coefficients qui apparaissent possèdent des pôles en $x = \pm 1/2$. Au prix d'un alourdissement certain des notations, on pourrait aussi préciser le comportement quand x tend vers $\pm 1/2$, mais l'intérêt de le faire n'est pas clair et les calculs s'annoncent pénibles...

(c) Approcher chaque intégrale, comme dans le cas à une variable.

Dans les autres cas, on a une décroissance exponentielle.

4. Évaluer les probabilités.

1.a– *Calcul des rayons critiques.* Le terme exponentiel de l'intégrant est $F(r,s,t,\vartheta)$ et le développement de son logarithme au voisinage de $(t,\vartheta)=0$ est

$$\ln(F(r,s,t,\vartheta)) \quad = \quad \ln(F(r,s,0,0)) + iA(r,s)t + iB(r,s)\vartheta + O(t^2+t\vartheta+\vartheta^2),$$

avec

$$\begin{aligned} A(r,s) &= -n + 2m\frac{r}{1-r} - \ell\frac{r}{1-r-s} + k\frac{1-r-s-rs}{(1-r-s)(1-r)}, \\ B(r,s) &= -m + 2n\frac{s}{1-s} - k\frac{s}{1-r-s} + \ell\frac{1-r-s-rs}{(1-r-s)(1-s)}. \end{aligned}$$

Le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(r,s) &=& 0 \\ B(r,s) &=& 0 \end{array} \right.$$

possède deux solutions

$$(r_1,s_1) = \left(\frac{3n+\ell-2k}{3(n+2m-\ell)}, \frac{3m+k-2\ell}{3(2n+m-k)}\right) \quad \text{et} \quad (r_2,s_2) = \left(\frac{n-k}{n+m}, \frac{m-\ell}{n+m}\right).$$

On voit immédiatement que la seconde solution est valide pour $k<n$ et $\ell<m$, qui sont des bornes naturelles du problème. En termes de (x,y,α), la première solution se réécrit :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{3}\frac{(3-6x)-(1-6y)\alpha}{(3+2x)-(1+2y)\alpha} = \frac{1}{3}\frac{r_n}{r_d}, \\ s_1 &= \frac{1}{3}\frac{(3+6x)-(1+6y)\alpha}{(3-2x)-(1-2y)\alpha} = \frac{1}{3}\frac{s_n}{s_d}. \end{aligned}$$

Dans $\mathcal{D}$, les dénominateurs satisfont aux inégalités $r_n \geq 2\alpha$ et $s_n \geq 2\alpha$ et les dénominateurs à $r_d \geq 2$, $s_d \geq 2$. En effet, $r_n = 6(n-k)+2(k+\ell) \geq 2(k+\ell)$, idem pour s_n et $r_d = 2(n+m)+2(m-\ell) \geq 2(n+m)$, idem pour s_d. Remarquons enfin les relations $r_n = 2s_d - r_d$ et $s_n = 2r_d - s_d$.

– *Rayons principaux.* Nous commençons par étudier le couple (r_1,s_1). En effet, nous allons voir que ce couple joue le rôle du τ du cas à une variable.

1.b– *Termes quadratiques.* Les termes quadratiques du développement sont donnés par la forme quadratique suivante

$$-\frac{r_d(3r_n(m+k)-4s_d(k+\ell))}{4s_n^2}t^2 - \frac{r_d s_d(k+\ell)}{r_n s_n}t\vartheta - \frac{s_d(3s_n(n+\ell)-4r_d(k+\ell))}{4r_n^2}\vartheta^2.$$

On trouve que le signe du discriminant est donné par celui du polynôme

$$4(x-y\alpha)^2 - (3-\alpha)(1/3-\alpha).$$

Pour qu'il soit négatif et qu'on ait un extréma local, il faut en particulier $\alpha \leqslant 1/3$ et plus généralement que

$$4(x - y\alpha)^2 \quad \leqslant \quad (3-\alpha)(1/3-\alpha). \tag{1}$$

On vérifie enfin que pour x, y et α vérifiant (1), la forme quadratique est négative, de sorte qu'on a bien un maximum local en $(0,0)$.

Il est intéressant de noter que cette condition est, comme dans le cas à une variable, équivalente à la condition $r_1 \leqslant r_2$ (ou $s_1 \leqslant s_2$) : le rayon pour lequel la méthode du col va s'appliquer est le minimum des rayons possibles.

1.c– *Maximum global.* Il s'agirait maintenant de vérifier que la fonction $f(t,\vartheta) = |F(r_1, s_1, t, \vartheta)|^2$ admet bien $(0,0)$ comme maximum global, lorsque $(0,0)$ est maximum global. La fonction $f(t,\vartheta)$ se réécrit en

$$f(t,\vartheta) = \frac{(1 + r^2 + s^2 + 2rs\cos(t-\theta) - 2r\cos(t) - 2s\cos(\theta))^{k+\ell}}{(1 + r^2 - 2r\cos(t))^{2(n+\ell)}(1 + s^2 - 2s\cos(\vartheta))^{2(m+k)}}.$$

Suivant une suggestion d'A. Vasseur [146], nous remarquons que

$$f(t,\vartheta) \leq \frac{(1 + r^2 + s^2 + 2rs - 2r\cos(t) - 2s\cos(\theta))^{k+\ell}}{(1 + r^2 - 2r\cos(t))^{2(n+\ell)}(1 + s^2 - 2s\cos(\vartheta))^{2(m+k)}}.$$

Cette dernière fonction est beaucoup plus facile à étudier : les points critiques autres que $(0,0)$ (qui annulent la différentielle) s'expriment simplement et la valeur de $f(t,\vartheta)$ en ces points est exponentiellement décroissante par rapport à $f(0,0)$ pour les valeurs des paramètres qui nous sont utiles.

2.– *Comparaisons des ordres exponentiels.* Avant d'appliquer la méthode du col, nous comparons le terme exponentiel qui va sortir de l'intégrant avec les contributions de $h_{n,m}$ et $g_{k,l}$. Ainsi nous éviterons de calculer des développements fastidieux là où la décroissance est de toute façon exponentielle. Posons $F(r,s) = F(r,s,0,0)$, alors on trouve

$$F(r_1, s_1) = \left(\frac{27}{4}\right)^N \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha N} \left(\frac{r_d^{r_d} s_d^{s_d}}{r_n^{r_n} s_n^{s_n}}\right)^{N/2}.$$

Le logarithme du terme exponentiel de $p_{n,m}(k,l)$ est donné par

$$\zeta(x,y,\alpha) = \mathrm{lg}(y)\alpha N - \mathrm{lh}(x)N + \ln(F(r_1,s_1)),$$

uniformément pour αN tendant vers l'infini et $|y| < 1/6 - \varepsilon$. Dans $\mathcal{D}$, la fonction ζ' s'annule pour $y = x/3$, quel que soit α, mais n'a pas d'autre zéro. Au voisinage de $y = x/3$,

$$\zeta(x,y,\alpha) = -\frac{432\alpha N}{(3-\alpha)(3-2x)(3+2x)(1-2x)(1+2x)}\left(y - \frac{x}{3}\right)^2 + O\left(N\left(y-\frac{x}{3}\right)^3\right).$$

À x et α fixé, le zéro de y est un maximum global et ζ est strictement négative en dehors de $y = x/3$. Pour $|y - x/3|^2 N$ tendant vers l'infini avec α fixé ces termes seront négligeables. Reprenons la méthode du col pour avoir le comportement au voisinage de $y = x/3$.

3.a– *Séparation des variables.* Posons

$$\alpha_0 = \frac{3(1-2x)(1+2x)}{(3-2x)(3+2x)}.$$

Alors le développement de F en $(0,0)$ s'écrit pour $Nt^3 = o(1)$ et $N\vartheta^3 = o(1)$,

$$\begin{aligned}\ln F(r_1, s_1, tT, \vartheta T) &= \ln F(r, s, 0, 0) - (\beta_{2,0}t^2 + \beta_{1,1}t\vartheta + \beta_{0,2}\vartheta^2)N \\ &\quad -if_3(t,\vartheta)N + O(Nt^3 + N\vartheta^3),\end{aligned}$$

où $f_3(t,\vartheta)$ est un polynôme réel, homogène de degré 3 en t, ϑ dont les coefficients sont fonctions rationnelles de x, y et α. Pour $\alpha < \alpha_0$, ces coefficients sont bornés et vérifient

$$\begin{aligned}\beta_{1,1} &= \frac{\alpha}{3\alpha_0} + O(y - x/3), \\ \beta_{2,0} &= \frac{(1-2x)}{6(1+2x)} + \frac{(3-2x)(3+2x)(5+6x)(\alpha_0-\alpha)}{(1+2x)^2} + O(y-x/3), \\ \beta_{0,2} &= \frac{(1+2x)}{6(1-2x)} + \frac{(3-2x)(3+2x)(5-6x)(\alpha_0-\alpha)}{(1-2x)^2} + O(y-x/3).\end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta = \beta_{1,1}^2 - 4\beta_{2,0}\beta_{0,2}$ est

$$\frac{(3-2x)(3+2x)(3-\alpha)}{48}\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_0}(1 + O(y-x/3)).$$

Il est négatif pour $\alpha < \alpha_0$ et pour ces valeurs, $\beta_{2,0}$ est négatif, ce qui nous assure un maximum local.

Domaine de validité : dans toute la suite de l'étude des rayons (r_1, s_1), on suppose[14]

$$\alpha < \alpha_0(x).$$

Tous les coefficients que nous utilisons sont des fractions rationnelles en x, y et α dont les dénominateurs sont des puissances de r_n, s_n, r_d ou s_d. Pour $\alpha < \alpha_0$ et $|x| < 1/2 - \varepsilon$, on a $r_n > 3\varepsilon$, et $s_n > 3\varepsilon$, ce qui garantit que les coefficients sont uniformément bornés.

Comme $\beta_{1,1} \neq 0$, il nous faut faire un changement de variables pour pouvoir séparer les intégrales. Nous utilisons une rotation, afin de faciliter le calcul avec l'intégrale (pour stabiliser un domaine circulaire et avoir $dtd\vartheta = dXdY$). Posons

$$\delta \quad = \quad 1 + \frac{(\beta_{2,0} - \beta_{0,2})^2}{\beta_{1,1}^2}.$$

Alors la rotation

$$\begin{aligned}t &= \left(1 - \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)^{1/2} X + \left(\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)^{1/2} Y, \\ \vartheta &= \left(\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)^{1/2} X - \left(1 - \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}\right)^{1/2} Y\end{aligned}$$

[14]Sous cette hypothèse, nous avons pour $|x| < 1/2$, $\tilde\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{(1-2x)(1+2x)} < 1$ et $\tilde\alpha_0 - \tilde\alpha = \frac{\alpha_0 - \alpha}{(1-2x)(1+2x)} < 1$. Cette remarque permettrait d'étudier le comportement au voisinage de $x = \pm 1/2$. Par exemple, on voit que dans le développement de $\zeta(x,y,\alpha)$, le $O((y-x/3)^3)$ est uniformément borné pour $|x| < 1/2$ et, contrairement aux apparences, le terme principal ne diverge pas quand $|x| \to 1/2$ avec $\alpha < \alpha_0(x)$.

donne

$$\begin{aligned} Q &= -(\beta_{2,0}t^2 + \beta_{1,1}t\vartheta + \beta_{0,2}\vartheta^2)N, \\ &= -\frac{1}{2}(\beta_{2,0} + \beta_{0,2} - \beta_{1,1}\sqrt{\delta})NX^2 - \frac{1}{2}(\beta_{2,0} + \beta_{0,2} + \beta_{1,1}\sqrt{\delta})NY^2 \\ &= -\gamma_{2,0}NX^2 - \gamma_{0,2}NY^2. \end{aligned}$$

Ce changement de variables n'introduit pas de singularités, tous les coefficients restent bornés et sont des fonctions algébriques continues dans le domaine considéré. En fait ce sont des fractions rationnelles en x, y, α, et, à cause du changement de variables, $\sqrt{\delta}$ et $\sqrt{\sqrt{\delta(\delta-1)} - (\delta - 1)}$.

Le développement de $F(r_1, s_1, t, \vartheta)$ s'écrit en coordonnées (X, Y)

$$F(r_1, s_1, t, \vartheta) = F(r, s)e^{-\gamma_{2,0}NX^2}e^{-\gamma_{0,2}NY^2}\left(1 - iF_3(X,Y)N + O(NX^4 + NY^4)\right),$$

où $F_3(X,Y) = f_3(t,\vartheta) = \sum \gamma_{i,3-i}X^iY^{3-i}$. Enfin, il nous faut encore développer $p(u,v)$. Il vient :

$$\begin{aligned} p(r_1e^{it}, s_1e^{i\vartheta}) &= p_{0,0} + i(p_{1,0}X + p_{0,1}Y)N - (p_{2,0}X^2 + p_{1,1}XY + p_{0,2}Y^2)N \\ &\qquad -ip_3(X,Y)N + O(NX^4 + NY^4), \end{aligned}$$

où les $p_{i,j}$ dépendent de x, y, α et N mais sont bornés dans l'intervalle d'étude. En particulier le terme constant n'est pas linéaire en N. Ceci correspond à l'annulation du terme constant $\Psi(\tau)$ du cas à une variable. On en déduit le développement complet de F :

$$\begin{aligned} F(r_1, s_1, t, \vartheta) &= F(r,s)e^{-\gamma_{2,0}X^2}e^{-\gamma_{0,2}Y^2}\left(1 - iF_3(X,Y)N + O(NX^4 + NY^4)\right) \\ &\qquad \big[p_{0,0} - i(p_{1,0}X + p_{0,1}Y)N - (p_{2,0}X^2 + p_{1,1}XY + p_{0,2}Y^2)N \\ &\qquad\quad -ip_3(X,Y)N + O(NX^4 + NY^4)\big] \\ &= F(r,s)e^{-\gamma_{2,0}X^2}e^{-\gamma_{0,2}Y^2} \\ &\qquad \big[I(X,Y) + Q(X^2,Y^2) + O(NX^4 + NY^4 + N^2X^5 + N^2Y^5)\big] \end{aligned}$$

où le polynôme $I(X,Y)$ contient les termes impairs en X ou en Y et

$$\begin{aligned} Q(X^2,Y^2) &= \sum_{i,j} q_{2i,2j}N^{i+j}X^{2i}Y^{2j} \\ &= p_{0,0} - p_{2,0}NX^2 - p_{0,2}NY^2 \\ &\qquad -p_{1,0}\gamma_{3,0}N^2X^4 - (p_{1,0}\gamma_{1,2} + p_{0,1}\gamma_{2,1})N^2X^2Y^2 - p_{0,1}\gamma_{0,3}N^2Y^4. \end{aligned}$$

3.b– *Termes d'erreurs.* Nous traitons les termes d'erreurs un peu comme dans le cas à une variable :

$$\begin{aligned} I(n,m,k,\ell) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r_1,s_1,t,\vartheta)dtd\vartheta, \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{\mathcal{B}(t_0)} F(r_1,s_1,t,\vartheta)dtd\vartheta + O\left(\sup_{\mathcal{C}(t_0)} f(t,\vartheta)\sup_{\mathcal{B}(t_0)}|p(r_1e^{it}, s_1e^{i\vartheta})|\right)\right], \end{aligned}$$

où $\mathcal{B}(t_0)$ et $\mathcal{C}(t_0)$ désignent respectivement la boule $\{(t,\vartheta) \mid t^2+\vartheta^2 < t_0^2\}$ et le cercle correspondant. Ce domaine circulaire nous permet d'effectuer le changement de variable dans l'intégrale. Pour $Nt_0^3 = o(1)$ mais $\gamma_{2,0}Nt_0^2$ et $\gamma_{0,2}Nt_0^2$ tendant vers l'infini, on a

$$\begin{aligned} I(n,m,k,\ell) &= \frac{F(r_1,s_1)}{4\pi^2}\left[\int_{\mathcal{B}(t_0)} \left(P(X,Y)+Q(X^2,Y^2)\right) e^{-\gamma_{2,0}NX^2}e^{-\gamma_{0,2}NY^2}dX\,dY \right. \\ &\quad +O\left(\int_{\mathcal{B}(t_0)}(NX^4+NY^4+N^2|X^5|+N^2|Y^5|)e^{-\gamma_{2,0}NX^2}e^{-\gamma_{0,2}NY^2}dX\,dY\right) \\ &\quad \left. +O\left(e^{-\gamma_{2,0}NX^2-\gamma_{0,2}NY^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Les deux conditions de validité de cette approximation sont remplies pour $t_0 = (N\lambda(N))^{-1/3}$ avec $\lambda(N) = o(N)$ qui tend vers l'infini, pour peu que les γ restent assez grands : il nous faut avoir

$$\min(\gamma_{2,0},\gamma_{0,2})(N/\lambda(N)^2)^{1/3} \to +\infty.$$

Pour cela, il suffit de faire les hypothèses

$$(\alpha_0-\alpha) > N^{-1/3}(\lambda(N))^{2/3} \text{ et } |y-x/3| = o(1).$$

En effet nous avons $-4\gamma_{2,0}\gamma_{0,2} = \Delta$, et donc

$$\begin{aligned} \min(\gamma_{2,0},\gamma_{0,2}) &= \frac{-\Delta/4}{\max(\gamma_{0,2},\gamma_{2,0})} > \frac{-\Delta/4}{2\beta_{2,0}+2\beta_{0,2}} \\ &> \frac{\alpha_0-\alpha}{\alpha_0}\frac{(1-2x)(1+2x)}{6}(1+O(y-x/3)). \end{aligned}$$

Enfin au prix d'un nouveau terme d'erreur exponentiellement décroissant, on peut replacer l'intégrale sur un carré de côté t_0 et séparer les intégrales monômes par monômes :

$$\begin{aligned} I(n,m,k,\ell) &= \frac{F(r_1,s_1)}{4\pi^2}\left[\int_{-t_0}^{t_0}\int_{-t_0}^{t_0} \left(P(X,Y)+Q(X^2,Y^2)\right) e^{-\gamma_{2,0}NX^2}e^{-\gamma_{0,2}NY^2}dX\,dY \right. \\ &\quad +O\left(\int_{-t_0}^{t_0}\int_{-t_0}^{t_0}(NX^4+NY^4+N^2|X^5|+N^2|Y^5|)e^{-\gamma_{2,0}NX^2}e^{-\gamma_{0,2}NY^2}dX\,dY\right) \\ &\quad \left. +O\left(e^{-\gamma_{2,0}NX^2-\gamma_{0,2}NY^2}\right)\right] \\ &= \frac{F(r_1,s_1)}{4\pi^2}\sum_{i,j} q_{2i,2j}N^{i+j}\left[\int_{-t_0}^{t_0} X^{2i}e^{-\gamma_{2,0}NX^2}dX\right]\left[\int_{-t_0}^{t_0} Y^{2j}e^{-\gamma_{0,2}NY^2}dY\right] \\ &\qquad (1+O(N^{-1/2})). \end{aligned}$$

3.c– *Évaluation des intégrales.* Les termes impairs en X ou en Y s'éliminent et on applique à chacun des termes restants le même équivalent que dans le cas à une variable :

$$\begin{aligned} I(n,m,k,\ell) &= \frac{F(r_1,s_1)}{4\pi^2}\sum_{i,j} q_{2i,2j}N^{i+j}\frac{\Gamma\left(\frac{2i+1}{2}\right)}{(\gamma_{2,0}N)^{\frac{2i+1}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{2j+1}{2}\right)}{(\gamma_{0,2}N)^{\frac{2j+1}{2}}}(1+O(N^{-1/2})) \\ &= \frac{F(r_1,s_1)}{2\pi^2(-\Delta)^{1/2}N}\sum_{i,j} q_{2i,2j}\frac{\Gamma\left(\frac{2i+1}{2}\right)}{\gamma_{2,0}^i}\frac{\Gamma\left(\frac{2j+1}{2}\right)}{\gamma_{0,2}^j}(1+O(N^{-1/2})) \\ &= \frac{F(r_1,s_1)}{8\pi(-\Delta)^{1/2}N}\left[4p_{0,0}-2\left(\frac{p_{2,0}}{\gamma_{2,0}}+\frac{p_{0,2}}{\gamma_{0,2}}\right)-3\left(\frac{p_{1,0}\gamma_{3,0}}{\gamma_{2,0}^2}+\frac{p_{0,1}\gamma_{0,3}}{\gamma_{0,2}^2}\right)\right. \\ &\qquad \left.-\frac{p_{1,0}\gamma_{1,2}+p_{0,1}\gamma_{2,1}}{\gamma_{2,0}\gamma_{0,2}}\right](1+O(N^{-1/2})) \end{aligned}$$

où tous les coefficients sont fonctions de x, y, α, bornés uniformément sous les conditions énoncées précédemment. En particulier, le comportement en y est contrôlé, à un facteur polynomial près, par la décroissance exponentielle autour de $y = x/3$ de $F(r_1, s_1)$.

4– *Probabilité.* Finalement, on obtient le comportement de la probabilité $p_{n,m}(k,\ell)$ pour les valeurs des paramètres :

$$\begin{gathered} |x| < \tfrac{1}{2}-\varepsilon, \\ |y-x/3| = O(N^{-1/2}), \\ \alpha_0(x)-\alpha > N^{-1/3}\lambda(N)^{2/3}, \\ \alpha N \to +\infty. \end{gathered}$$

En effet pour ces valeurs nous pouvons utiliser l'expression de $\zeta(x,y,\alpha)$ pour montrer :

$$\begin{aligned} p_{n,m}(k,\ell) &= \frac{k+\ell-1}{(n+\ell)(m+k)}\frac{g_{k,\ell}}{h_{n,m}}I(n,m,k,\ell) = \frac{c_1(x,\alpha)}{N^2}\frac{g_{k,\ell}F(r_1,s_1)}{h_{n,m}}(1+O(N^{-1/2})), \\ &= \frac{c_1(x,\alpha)}{N^2}c_2(x,\alpha)\exp(\zeta(x,y,\alpha))(1+O(N^{-1/2})), \\ &= \frac{c_3(x,\alpha)}{\alpha^3(\alpha_0-\alpha)^{5/2}N^2}\exp\left(-\frac{\alpha}{\alpha_0}\frac{(y-x/3)^2}{d(x,\alpha)}N\right)(1+O(N^{-1/2})), \end{aligned}$$

avec $d(x,\alpha) = (3-\alpha)(1-2x/3)(1+2x/3)/16$, et $c_3(x,\alpha)$ est une fonction algébrique de x et α bornée, continue, sans pôles ni zéros pour les valeurs de x et α considérées[15].

– *Rayons secondaires.* Le couple (r_2, s_2) est, comme dans le cas à une variable, moins intéressant à étudier. On vérifie l'existence du maximum local en $(0,0)$ et on trouve une décroissance exponentielle en comparant le terme à intégrer avec $h_{n,m}$ et $g_{k,\ell}$.

[15]La fonction $c_3(x,\alpha)$ possède des pôles en $x = \pm 1/2$, ce qui complique un peu l'étude, si on veut des résultats uniformes pour tout l'intervalle $|x| < 1/2$.

4.4.3 Petits noyaux et modes des distributions à x fixé.

Calculons la probabilité que le noyau soit de taille sous linéaire.

On choisit un déséquilibre x avec $|x| < 1/2$ et deux entiers k, ℓ. Alors pour $(n, m) = (N(1/2 - x), N(1/2 + x))$, quand N tend vers l'infini, nous avons

$$p_{n,m}(k, \ell) \underset{N\infty}{\sim} g_{k,\ell} \frac{I(n, m, k, \ell)}{h_{n,m}}.$$

Comme k et ℓ sont fixés, le développement est plus simple. En particulier les intégrales se séparent sans qu'un changement de variables soit nécessaire. On obtient, pour tous k, ℓ et x fixés,

$$\begin{aligned} p_{n,m}(k, \ell) \quad &\sim_{N\infty} \quad \frac{(k+\ell-1) \cdot g_{k,\ell}}{(n+\ell-1)(m+k-1)} \frac{I(n, m, k, \ell)}{h_{n,m}} \\ &\sim_{N\infty} \quad \frac{16}{3\alpha_0(x)}(k+\ell-1) g_{k,\ell} \left(\frac{(1-2x)^2}{4(1+2x)(1-2x/3)}\right)^k \left(\frac{(1+2x)^2}{4(1-2x)(1+2x/3)}\right)^\ell. \end{aligned}$$

Comme dans le cas à une variable, nous calculons la somme S de ces valeurs pour tous k, ℓ, qui nous donne la probabilité limite de tomber dans le *régime discret*.

$$S(x) = \frac{16}{3\alpha_0(x)} \left(u \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) + v \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) - G(u, v)\right) \Big|_{(a(x), a(-x))}$$

avec

$$a(x) = \frac{(1-2x)^2}{4(1+2x)(1-2x/3)}.$$

Pour évaluer $S(x)$, nous utilisons un résultat de [117], qui donne la série $G(u, v)$ sous la forme du système d'équations suivant

$$\begin{aligned} G(u, v) \quad &= \quad uv\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} - 1\right) - G_0(u, v), \\ G_0(u, v) \quad &= \quad \frac{r(u, v)s(u, v)}{(1 + r(u, v) + s(u, v))^3}, \\ r(u, v) \quad &= \quad u(1 + s(u, v))^2, \\ s(u, v) \quad &= \quad v(1 + r(u, v))^2. \end{aligned}$$

Après calculs on obtient

$$u \frac{\partial G_0}{\partial u}(u, v) + v \frac{\partial G_0}{\partial v}(u, v) - G_0(u, v) = \frac{r(u, v)s(u, v)}{(1 + r(u, v) + s(u, v))^4}.$$

En résolvant le système

$$\begin{cases} r_0(x) = a(x)(1 + s_0(x))^2, \\ s_0(x) = b(x)(1 + r_0(x))^2, \end{cases}$$

on trouve une seule solution quand $|x| < 1/2$:

$$r_0(x) = \frac{1-2x/3}{1+2x}, \qquad s_0(x) = \frac{1+2x/3}{1-2x}.$$

On en déduit finalement que la probabilité d'être dans le régime discret est

$$S(x) = \frac{\alpha_0^2(x)(4175 - 1912x^2 + 240x^4)}{9(5-2x)^2(5+2x)^2}.$$

En d'autres termes,

Lemme 4.8 *Soit x fixé et $\lambda(N) = o(N)$ tendant vers l'infini, alors la probabilité limite d'avoir un noyau non vide de taille inférieure à $\lambda(N)$ tend vers $S(x)$.*

– *Cartes sans noyau.* Il nous faut encore évaluer la probabilité de ne pas avoir de noyau, qui vient s'ajouter à celle d'avoir un petit noyau. Pour cela, on applique rapidement la méthode du col à la série génératrice $F(x,y)$ des cartes avec noyau. Une fois encore, on trouve dans [117] que $F(x,y)$ est donnée en fonction de $H(x,y)$ par

$$\begin{aligned} F(x,y) &= H(x,y)\left(\frac{1}{1+H(x,y)/y} + \frac{1}{1-H(x,y)/x} - 1\right), \\ &= \psi(a(x,y), b(x,y)), \end{aligned}$$

avec

$$\psi = \frac{uv(1-u-v)(1-2u-2v+u^2+3uv+v^2-u^3v-u^2v^2-uv^3)}{(1-u-uv)(1-v-uv)}.$$

On utilise à nouveau la variante de la formule d'inversion de Lagrange pour avoir

$$\begin{aligned} f_{n,m} &= \frac{1}{nm}[u^n v^m](mu\psi'_u + nv\psi'_v - \psi''_{uv})\phi_1(v)^n \phi_2(u)^m, \\ &= \frac{1}{4nm\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{p(re^{it}, se^{i\vartheta})}{(1-re^{it})^{2n}(1-se^{i\vartheta})^{2m} r^n s^n} e^{-nit-mi\vartheta} dt d\vartheta, \end{aligned}$$

La méthode du col s'applique ici de manière bien plus conventionnelle : il y a un seul couple de rayons critiques,

$$r_1 = \frac{n}{n+2m}, \qquad s_1 = \frac{m}{2n+m},$$

pour lequel la méthode s'applique uniformément pour $|x| < 1/2 - \varepsilon$ (il y a toujours des singularités dans les coefficients en $x = \pm 1/2$).

Après calcul, on trouve que la probabilité limite d'avoir un noyau $f_{n,m}/h_{n,m}$ tend vers

$$R(x) = \frac{\alpha_0(x)^2(14175 - 5112x^2 + 496x^4)}{9(5-2x)^2(5+2x)^2},$$

à x fixé pour N tendant vers l'infini. La probabilité de ne pas avoir de noyau s'en déduit,

$$p_{n,m}(0,0) \sim 1 - R(x).$$

On peut maintenant obtenir à x fixé et pour N tendant vers l'infini, la probabilité limite de tomber dans un voisinage de $\alpha_0(x)$. En effet, la probabilité d'être en dehors de ce voisinage, mais pas dans le régime discret, tend vers zéro de la même façon que pour le cas discret (polynomialement ou exponentiellement suivant les valeurs de y et α considérées). On en déduit le

Lemme 4.9 *Soit x et ε donnés avec $|x| < 1/2$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. La probabilité limite d'avoir un noyau de taille environ $\alpha_0 N$ vérifie*

$$\lim_{N\infty} \Pr(|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon) = 1 - S(x) - p_{n,m}(0,0) = \frac{16}{9}\alpha_0(x)^2 = 16\frac{(1-2x)^2(1+2x)^2}{(3-2x)^2(3+2x)^2}.$$

Cette probabilité limite est représentée sur la figure 4.6. On voit aussi sur cette figure les probabilités observées expérimentalement.

4.5 Diamètre

Si le diamètre moyen des graphes aléatoires généraux est bien connu (cf. [25]), ça n'est pas le cas du diamètre moyen des graphes planaires, pour lequel aucune information n'apparaît à ma connaissance dans la littérature.

La conjugaison d'arbres que nous avons introduite au chapitre 2 donne quelques résultats, que nous complétons par des statistiques expérimentales pour différents types de cartes (quelconques, 2-, 3- et 4-connexes).

Remarquons qu'il n'est pas possible de relier directement le diamètre moyen des cartes planaires au diamètre moyen des graphes planaires car la distribution du nombre de plongements est trop différente de la distribution uniforme. L'étape suivante (à l'état de projet) est donc d'étudier cette distribution du nombre de plongements. En effet, si elle présente des propriétés de concentration, cela peut permettre de donner des résultats partiels de transfert, des cartes vers les graphes planaires. Cette étude sera menée dans un avenir proche, au moins expérimentalement à l'aide des générateurs aléatoires.

4.5.1 Borne théorique

Le résultat suivant est une conséquence de la conjugaison d'arbres introduite au chapitre 2 et d'un résultat de F. Flajolet *et al.* [59] sur la profondeur moyenne des arbres simples décomposables.

Théorème 4.10 *Il existe des constantes c_0 et c_1 telles que les diamètre moyen d_n des cartes planaires à n arêtes et d'_n des cartes non séparables à n arêtes vérifient pour tout n,*

$$\begin{aligned} d_n &< c_0\sqrt{n}, \\ d'_n &< c_1\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Ce résultat n'est pas particulièrement surprenant : nous démontrons simplement que les cartes n'ont pas un diamètre plus grand que les arbres ! Cependant c'est là le premier résultat de ce type à ma connaissance.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour les cartes quelconques. La même preuve s'applique aux autres familles de cartes accessibles par conjugaison.

Le diamètre d'une carte C est majoré par le diamètre de sa carte radiale R. En effet tout chemin dans R correspond à un chemin (plus court) dans la carte C. À son tour, le diamètre d'une carte radiale est majoré par le diamètre d'un de ses arbres couvrants, ou encore par deux fois sa profondeur.

Au chapitre 2 nous avons montré qu'on peut associer à une carte radiale un arbre couvrant, de manière à ce que, sur l'ensemble des cartes, tous les arbres binaires complets plantés apparaissent le même nombre de fois. On en déduit que deux fois la profondeur moyenne des arbres binaires complets majore la moyenne du diamètre des cartes radiales.

Finalement on utilise un résultat de F. Flajolet *et al.* [59] qui dit que certaines familles d'arbres décomposables simples (dont les arbres k-aires) ont une profondeur moyenne en $\sqrt{n}$. □

Il est plus difficile d'obtenir une minoration de la même manière. Il faudrait pour cela étudier la profondeur de l'arbre couvrant en largeur de la carte radiale (qui est dual de l'arbre équilibré couvrant, cf. chapitre 2). Sur l'arbre équilibré, ceci revient à regarder la «hauteur» maximale atteinte par le mot de bord. Malheureusement, la distribution uniforme des bourgeons sur les arbres ne conduit *a priori* pas à une distribution uniforme des mots de bords parmi tous les produits de mots de Lukacievicz.

Il est quand même possible de mettre en équation ce paramètre, ce qui conduit à des équations fonctionnelles dans l'esprit de celles utilisées par F. Flajolet *et al.* Cependant ces équations sont très compliquées.

4.5.2 Résultats expérimentaux

Afin d'accélérer les tests, on mesure l'excentricité d'un sommet plutôt que le diamètre : il suffit en effet d'effectuer un parcours en largeur pour la mesurer. Ce paramètre nous suffit, au moins dans un premier temps ; en effet, pour tout sommet s d'une carte C,

$$\mathrm{exc}(s) < d(C) < 2\mathrm{exc}(s),$$

de sorte que l'excentricité moyenne donne une bonne image du diamètre moyen.

L'exploitation des résultats expérimentaux n'est pas terminée. Nous présentons quelques données brutes obtenues pour le diamètre des cartes non séparables. Pour différentes valeurs de n, on tire 100000 cartes au hasard et on mesure l'exentricité. On observe les distributions obtenues sur la figure 4.8. Une renormalisation simple en fonction de la position du mode de chaque distribution suggère l'existence d'une loi limite (figure 4.9). La forme de cette distribution est asymétrique comme on le voit bien sur la figure 4.10. La courbe des moyennes peut être approchée par la courbe

$$d(n) = 1.13 \cdot n^{1/4} \ln(n)^{7/9},$$

obtenue (approximativement) par regression linéaire (cf. figure 4.11). Cependant cette méthode est très peu fiable, et il est nécessaire d'étudier les données expérimentales par des approches plus sophistiquées avant de faire une conjecture plausible.

Les données numériques confirment tout de même que l'ordre de grandeur de la borne obtenue à la section précédente est trop grand.

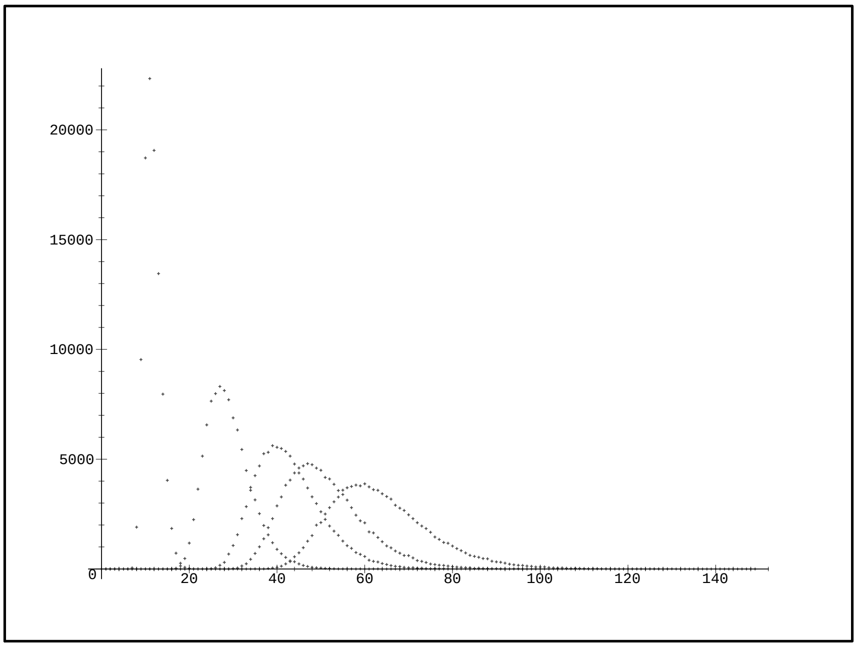


FIG. 4.8: Distribution expérimentale pour n égal à 100, 1000, 3000, 5000 et 10000.

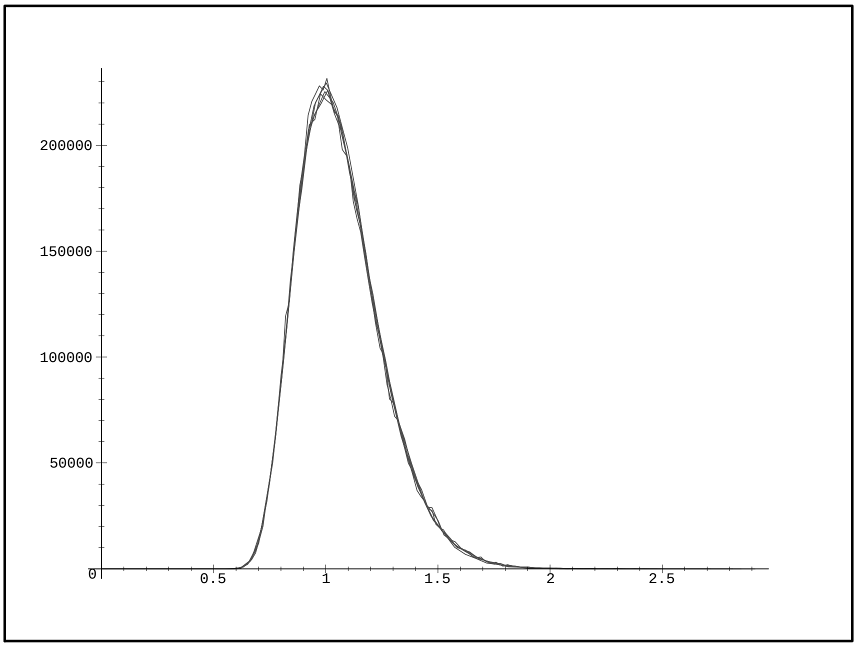


FIG. 4.9: Courbe renormalisée multiplicativement pour n égal à 500, 1000, 2000, 3000, 5000 et 10000.

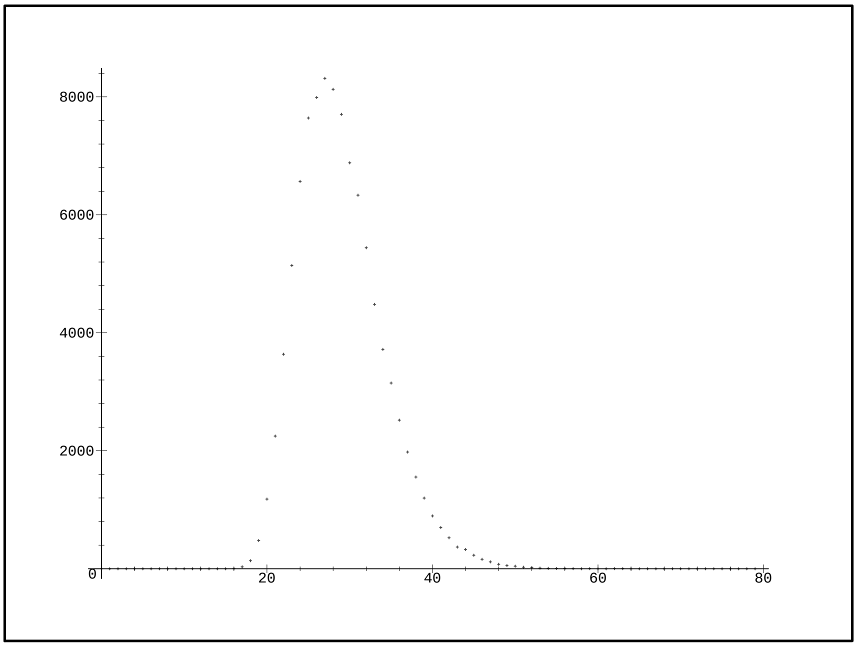


FIG. 4.10: Détail de la distribution expérimentale pour n égal à 1000.

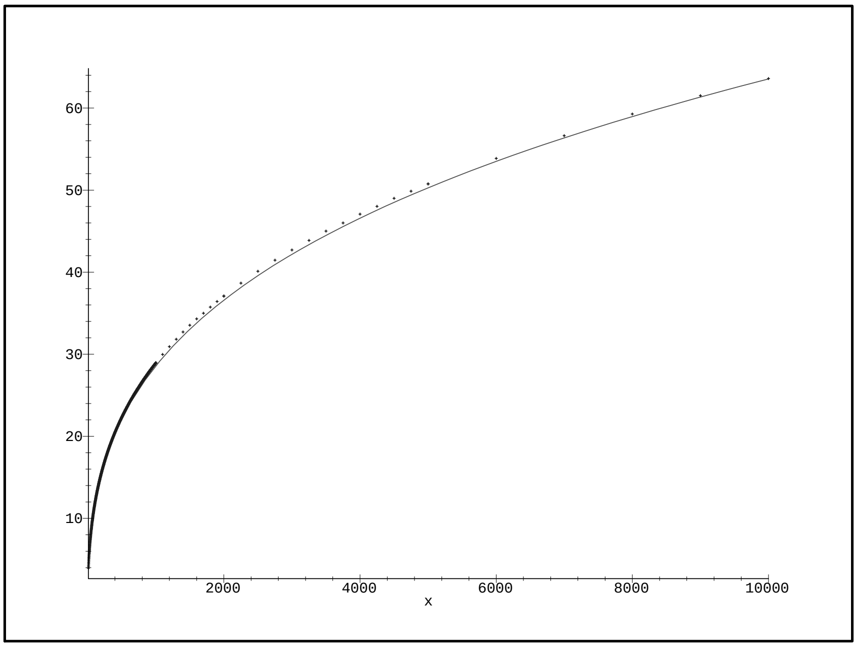


FIG. 4.11: Mesure expérimentale de la moyenne (rond) et courbe candidate.

Chapitre 5

Génération aléatoire

Il est maintenant temps de mettre à profit les autres chapitres de cette partie pour proposer des algorithmes efficaces pour le tirage au hasard des graphes de polyèdres et triangulations convexes.

Pour cela il nous faut successivement traiter

- Les arbres plans plantés à une, puis deux couleurs, à l'aide du lemme cyclique (section 5.2).
- Les cartes planaires, à l'aide de la conjugaison d'arbre définie au chapitre 2 (section 5.3).
- Les graphes 3-connexes planaires, en introduisant une nouvelle méthode de génération aléatoire, «l'extraction-rejet» et en nous appuyant sur les résultats du chapitre 4 (section 5.4).

Nous utilisons en cours de route un nouvel algorithme de calcul des composantes 3-connexes d'un graphe planaire, décrit en fin de chapitre (section 5.5).

5.1 Génération aléatoire uniforme

Nous entendons ici par génération aléatoire[1] le problème suivant :

> Étant donné un ensemble fini d'objets, construire un élément choisi avec probabilité uniforme.

Bien sûr la première question de ce problème est celle du tirage d'un bit 0–1 avec probabilité uniforme 1/2–1/2. Cependant notre objectif étant l'étude des graphes planaires et, plus généralement, des structures combinatoires, nous allons laisser ce problème de côté et supposer qu'un générateur uniforme parfait de bits est à notre disposition.

Nous allons donc plutôt nous concentrer sur l'utilisation de ce générateur initial pour tirer au hasard des structures plus complexes.

La seconde remarque est que la distribution uniforme n'est qu'une restriction apparente, puisqu'il nous suffit de «pondérer» les objets pour faire entrer dans ce cadre n'importe quelle autre distribution discrète rationnelle. Par contre, nous ne considérons que des ensembles d'objets finis : typiquement, les familles d'objets que nous considérons (par exemple les graphes planaires

[1] ou *tirage à randon* pour employer une terminologie plus savoureuse.

3-connexes) contiennent, à taille fixée (par exemple le nombre d'arêtes ou de sommets), un nombre fini d'objets distincts.

Enfin, vient le problème de l'efficacité. Idéalement un générateur aléatoire utilise un nombre d'opérations élémentaires linéaire en la taille des objets considérés. C'est le mieux qu'on puisse espérer puisque les objets doivent être explicitement produits. Il nous faut cependant choisir un modèle d'opérations élémentaires. Dans la littérature, la complexité arithmétique est souvent choisie : on compte le nombre d'opérations arithmétiques effectuées sur des entiers au cours de la construction. Cette mesure est bien adaptée car la génération aléatoire nécessite en général des calculs sur des probabilités rationnelles.

Cependant la plupart des objets intéressants à tirer au hasard sont victimes d'une «explosion combinatoire», qui précisément fait qu'on s'intéresse à eux d'un point de vue statistique et non exhaustif. Du coup le nombre d'objets est exponentiel en la taille et il est fréquent que les algorithmes nécessitent des calculs sur des entiers longs. Dans ce cas la complexité arithmétique ne capture que partiellement la réalité pratique du temps de calcul.

On pourrait pallier cet inconvénient en considérant une complexité bit-à-bit, mais on obtient à moindre frais des résultats valides en utilisant une complexité un peu hybride, qui se décrit simplement en parlant de «complexité en arithmétique du `C`»... en termes plus choisis, il s'agit de considérer le nombre d'opérations arithmétiques effectuées sur des entiers de l'ordre de la taille des objets. Cette taille est typiquement limitée par la nécessité de les stocker, ce fait que l'arithmétique des entiers longs du `C` (`long int`) est suffisante.

5.2 Génération d'arbres plans

La génération aléatoire uniforme d'arbres plans décomposables est un problème bien maîtrisé, auquel à peu près toutes les techniques imaginables s'appliquent avec succès !

Nous donnons pour notre part deux algorithmes de génération d'arbres, basé sur les mots de Lukacievicz. Le premier est loin d'être original et peut être par exemple considéré comme un cas particulier du traitement donné par L. Alonso, J.L. Rémy et R. Schott [2]. Le second s'appuie sur une extension à deux variables due à L. Chottin [36] du codage de Lukacievicz et du lemme cyclique. L'intérêt de ces algorithmes est d'être particulièrement succincts à implanter tout en étant de complexité optimale. Ils ne sont cependant pas aussi généraux que d'autres méthodes existantes [64, 54, 2].

5.2.1 Codage des arbres, mots de Lukacievicz et tirage

Comme nous l'avons rappelé au chapitre 2, les arbres plans plantés s'interprètent naturellement comme des expressions fonctionnelles et se codent, en notation *préfixe* (pour les arbres) ou *polonaise* (pour les expressions) par des mots de Lukacievicz. Nous en redonnons rapidement la définition et une propriété fondamentale, le lemme cyclique.

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet (les étiquettes des nœuds) et δ un morphisme des mots (pour la composition) dans les entiers (pour l'addition), tel que pour toute lettre x, $\delta(x) \geq -1$. Les mots de Lukacievicz sur $(\mathcal{A}, \delta)$ sont les codes du parcours préfixe des arbres plans plantés dont chaque sommet porte une étiquette x de $\mathcal{A}$ telle que $\delta(x) + 1$ soit son arité (nombre de fils). Alors un mot w sur $\mathcal{A}$ est un mot de Lukacievicz si et seulement si

- Pour tout facteur gauche strict u de w, $\delta(w) \geq 0$,
- Le mot entier vérifie $\delta(w) = -1$.

Le lemme cyclique lie les mots de Lukacievicz aux classes de conjugaison de mots de $\mathcal{A}^*$.

Lemme 5.1 (Lemme cyclique) *Soit w un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ tel que $\delta(w) = -p$ avec $p \geq 1$. Alors il existe une factorisation de w unique $w = uv_1 \ldots v_{p-1}u'$ telle que*

- *pour tout $i = 1 \ldots p-1$, le mot v_i est un mot de Lukacievicz.*
- *le mot u est non vide et $u'u$ est un mot de Lukacievicz.*

En particulier pour $p = 1$, exactement un conjugué $u'u$ du mot $w = uu'$ est un mot de Lukacievicz.

Considérons par exemple les arbres binaires complets plantés (*i.e.* enraciné sur une feuille). Prenons $\mathcal{A} = \{x, \bar{x}\}$ et étiquetons les nœuds par la lettre x et les feuilles par la lettre $\bar{x}$ (on n'étiquette pas la feuille racine). Comme les nœuds sont d'arité deux, on pose $\delta(x) = 1$ et pour les feuilles $\delta(\bar{x}) = -1$. Les mots de Lukacievicz correspondants sont parfois appelés mots de Dyck[2].

Un arbre binaire complet avec n nœuds possède $n+2$ feuilles (racine comprise). Parallèlement, le code w associé contient n lettres x et $n+1$ lettres $\bar{x}$ (la feuille racine ne rentre pas dans le code), et nous avons bien $\delta(w) = -1$. Il suffit donc pour tirer un arbre binaire au hasard uniformément parmi tous les arbres binaires avec n nœuds de choisir uniformément au hasard un mot de Lukacievicz avec n lettres x et $n+1$ lettres $\bar{x}$.

Il est facile de tirer au hasard un mot w sur le (multi-)ensemble de lettres $\mathcal{M} = \{x^n, \bar{x}^{n+1}\}$ (*i.e.* un mot avec n lettres x et $n+1$ lettres $\bar{x}$).

On utilise par exemple l'algorithme de rang inverse suivant (voir [152]), pour tirer le mot de gauche à droite, lettre par lettre.

- On part du mot vide, en sachant qu'on veut $r = n$ lettres x et $s = n+1$ lettres $\bar{x}$.
- La probabilité que la première lettre soit x est $r/(r+s) = n/(2n+1)$. On tire donc au hasard uniformément un entier k dans $[1, 2n+1]$:
  - si $k \leq r = n$ la première lettre est un x, et on ne veut plus que $r := r-1$ lettres x dans le mot restant,
  - sinon, c'est un $\bar{x}$, et on ne veut plus que $s := s-1$ lettres $\bar{x}$.
- On recommence pour tirer le mot restant, à r lettres x et s lettres $\bar{x}$.

On obtient ainsi un mot de longueur $2n+1$, choisi uniformément parmi tous les mots w sur $\mathcal{M}$. La complexité est linéaire : il faut (au plus) $2n$ tirages et les probabilités intermédiaires sont immédiates à calculer.

Pour avoir un mot de Lukacievicz il faut encore que la condition de positivité soit satisfaite. On peut par exemple utiliser la méthode dite *de rejet* : si le mot obtenu par l'algorithme de

[2]Plus précisément les mots de Dyck sont les mots de Lukacievicz sur $\{x, \bar{x}\}$ privés de la dernière lettre (qui est $\bar{x}$ par définition).

rang inverse n'est pas un mot de Lukacievicz, on le jette ! et on recommence. On définit ainsi un *pseudo-algorithme* : sa terminaison n'est pas garantie mais, lorsqu'il termine, il donne un mot de Lukacievicz choisi uniformément parmi les mots de Lukacievicz de longueur $2n+1$.

La méthode de rejet ne fournit que des pseudo-algorithmes, dont la complexité dans le cas le pire est évidemment infinie. Cependant la complexité moyenne peut être tout à fait raisonnable : la probabilité de terminer est égale au rapport entre nombre d'objets valides (ici les mots de Lukacievicz) et nombre d'objets engendrés (les mots qui vérifient $\delta(w) = -1$).

Comme le nombre d'arbres binaires complets est le nombre de Catalan, $c_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ et le nombre de mots qui vérifient $\delta(w) = -1$ est le nombre de mots à n lettres x de longueur $2n+1$, c'est-à-dire $\binom{2n+1}{n}$, la probabilité de terminer est dans notre exemple $\frac{1}{2n+1}$. Le nombre moyen d'essais est donc $\sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^k = O(n)$, et le coût de l'algorithme est en moyenne quadratique.

Une première façon d'améliorer ce pseudo-algorithme est de rejeter le facteur gauche dès que $\delta(u) < 0$, au lieu d'attendre le mot complet. On passe ainsi à une complexité de l'ordre de $O(n\sqrt{n})$ (cf. [48]).

Cependant l'utilisation du lemme cyclique permet de donner un (vrai) algorithme linéaire : en effet ce lemme nous dit nous dit qu'à chaque mot sur $\mathcal{M}$ est associé un unique mot de Lukacievicz par conjugaison. Comme l'algorithme de rang inverse tire au hasard uniformément des mots sur $\mathcal{M}$, il suffit de conjuguer correctement le résultat. On peut même calculer au fur et à mesure du tirage du mot les $\delta(u)$ des facteurs gauches ; la première lettre du conjugué recherché suit le dernier minimum strict de $\delta(u)$, comme on le voit dans la preuve du lemme cyclique.

Plus généralement l'algorithme suivant permet la génération aléatoire uniforme d'arbres m-aires à n nœuds internes en temps linéaire, sous forme de mots de Lukacievicz sur l'alphabet $\{x, \bar{x}\}$ avec $\delta(x) = m-1$ et $\delta(\bar{x}) = -1$:

- On part du mot vide, en sachant qu'on veut $i = n$ lettres x et $j = (m-1)n+1$ lettres $\bar{x}$. Le minimum δ_m jusqu'ici rencontré est 0 et $\delta = 0$.
- La probabilité que la première lettre soit x est $i/(i+j) = n/(mn+1)$. On tire donc au hasard uniformément un entier k dans $[1, i+j]$:
  - Si $k \leq i = n$ la première lettre est un x, et on ne veut plus que $i := i-1$ lettres x dans le mot restant. De plus $\delta := \delta + m - 1$.
  - sinon, c'est un $\bar{x}$, et on ne veut plus que $j := j-1$ lettres $\bar{x}$. De plus $\delta := \delta - 1$.
- Si $\delta < \delta_m$ la position courante devient le nouveau *leader*.
- On recommence pour tirer le mot restant, à i lettres x et j lettres $\bar{x}$.
- Le mot de Lukacievicz final est le conjugué du mot tiré qui débute par la lettre suivant le dernier *leader* trouvé.

Plus généralement il n'est pas difficile de construire un algorithme de ce type pour tirer des mots de Lukacievicz sur un ensemble $\mathcal{M}$ de lettres. La complexité d'un tel algorithme dépend du nombre total N de lettres, mais aussi du nombre k de lettres distinctes dans $\mathcal{M}$. Nous avons traité le cas $k = 2$. Par une modification triviale de l'algorithme de rang inverse, on traite le tirage dans

$\mathcal{M} = \{(a_1, n_1), \ldots, (a_k, n_k)\}$ en temps $O(kN)$ où $N = n_1 + \cdots + n_k$: en effet, il faut à chaque étape déterminer quelle lettre on ajoute parmi les k possibles.

On peut bien entendu améliorer la dépendance en k en introduisant des structures de données plus complexes. On peut vouloir par exemple tirer un arbre sur un ensemble de nœuds fourni par une liste (avec répétition) : il peut alors être intéressant de gérer l'ensemble des nœuds sous forme d'une structure de données permettant une suppression efficace.

Telle que nous l'avons décrite jusqu'ici, la génération par mots de Lukacievicz permet d'obtenir des arbres dont le nombre d'étiquettes de chaque arité est fixé.

5.2.2 Arbres bicolores, factorisation de Chottin

Les arbres bipartis (où les sommets noirs ont des fils blancs et réciproquement) avec des nombres donnés de sommets noirs et de sommets blancs ne peuvent être tirés directement par la méthode de la section précédente. On pourrait bien entendu tirer des arbres avec i sommets noirs et j sommets blancs en introduisant deux lettres x_1 et x_2, mais la probabilité d'avoir par cette méthode un arbre biparti est trop faible pour faire fonctionner une méthode de rejet.

Pourtant nous aurons besoin, pour le tirage des cartes non séparables à n sommets et m faces, et donc pour celui des polyèdres convexes, de tirer les éléments d'une famille d'arbres qui pose des problèmes similaires : cette famille est constituée des arbres ternaires plantés, comptés selon sommets *pairs* et *impairs*.

Définition 5.2 *La parité d'un sommet d'un arbre ternaire est la parité du «décalage par rapport à l'origine» de ce sommet, défini récursivement par*

- *Le décalage de la racine est -1 et elle n'a qu'un fils (droit par convention) dont le décalage est nul.*
- *Si un sommet a un décalage de d alors ses fils gauche, central et droit ont respectivement un décalage égal à $d-1$, d et $d+1$.*

Dans un arbre ternaire, les nombres de feuilles paires et impaires sont liés aux nombres de nœuds impairs et pairs :

Propriété 5.3 *Un arbre ternaire planté avec i nœuds pairs et j nœuds impairs possède $2j+1$ feuilles paires et $2i+1$ feuilles impaires (racine comprise).*

Démonstration. Chaque nœud pair a un fils pair et deux fils impairs. On en déduit que i sommets pairs et $2i$ sommets impairs sont fils d'un nœud pair. De même, j sommets impairs et $2j$ sommets pairs sont fils d'un nœud impair. Le nombre total de sommets impairs est donc $2i+j+1$ en comptant la racine et le nombre total de sommets pairs $2j+i+1$ où le sommet pair supplémentaire est le fils de la racine. □

La méthode que nous allons employer pour compter et tirer au hasard ces arbres a été introduite par L. Chottin [36] pour démontrer le théorème d'inversion de Lagrange-Good à deux variables à la manière de la preuve de G.N. Raney pour une variable. Elle permet plus généralement d'étendre les résultats de tirage aléatoire de la section précédente à des arbres construits sur deux ensembles de

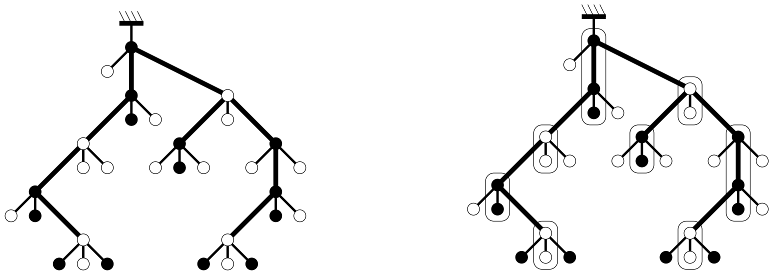


FIG. 5.1: Un arbre ternaire complet planté et ses composantes paires et impaires.

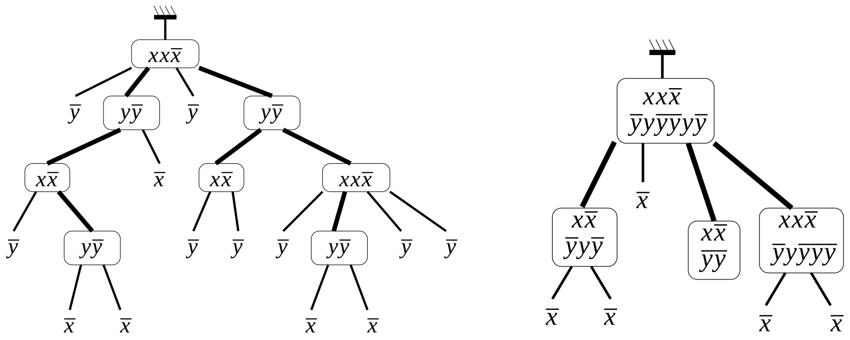


FIG. 5.2: Factorisation des composantes puis des facteurs.

sommets dont les arités sont données par couleur. Cette méthode ne semble pas pouvoir s'étendre au delà de deux ensembles de sommets. Pour cela, il faut plutôt faire appel à la preuve bijective de I.P. Goulden et D.M. Kulkarni de l'inversion de Lagrange-Good [77].

L'idée est toujours d'appliquer le lemme cyclique, mais son application directe ne convient pas. En effet, comme pour les arbres bipartis, si on tire simplement un mot contenant les $i+j$ nœuds et les $2i+2j+1$ feuilles (sans la racine), le lemme cyclique donne un mot et un arbre qui n'ont qu'une très faible probabilité de contenir i nœuds pairs et j impairs.

Nous allons plutôt, suivant L. Chottin, «factoriser l'arbre» et changer d'alphabet, avant d'utiliser un codage de Lukacievicz classique sur les arbres ainsi obtenus. Les figures 5.1 à 5.3 illustrent notre propos. Le codage se fait en cinq étapes, on part d'un arbre ternaire planté avec i nœuds pairs et j nœuds impairs.

1. *Première factorisation.* Les arbres ternaires plantés sont en bijection avec les arbres plans plantés dont tous les sommets ont une arité paire.

   En effet, les sommets voisins de même parité forment des composantes filiformes verticales.

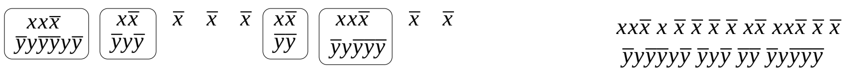


FIG. 5.3: Codage des facteurs en mot de Lukacievicz et version non parenthésée.

Chaque composante contient k nœuds (avec $k \geq 0$) et une feuille. Elle possède au total $2k$ fils de la parité opposée, qui sont ordonnés. En *factorisant* chaque composante, on obtient un arbre biparti pairs/impairs, où la parité d'un nœud correspond maintenant à celle de sa profondeur dans l'arbre. Toutes les composantes ont un nombre pair de fils.

Bien que cela soit superflu pour reconstituer l'arbre d'origine, nous étiquetons chaque composante de longueur k par la suite $x^k\bar{x}$ si elle est paire et $y^k\bar{y}$ si elle est impaire. Alors, les paramètres i et j sont respectivement le nombre de x et le nombre de y apparaissant dans l'arbre.

2. *Seconde factorisation.* Chaque composante paire de longueur k possède $2k$ composantes filles impaires, qui ont pour longueurs $\ell_1, \ldots, \ell_{2k}$. Ensemble, une composante paire et ses composantes filles forment un *facteur.* Les différents facteurs sont eux-mêmes les nœuds d'un nouvel arbre plan planté, *l'arbre des facteurs.*

   La structure d'un facteur est entièrement donnée par le couple de mots
$$\binom{x^k\bar{x}}{y^{\ell_1}\bar{y}y^{\ell_2}\bar{y}\cdots y^{\ell_{2k}}\bar{y}},$$
   dans lequel le premier mot est l'étiquette de la composante paire et le second, la concaténation des étiquettes des composantes filles de gauche à droite.

   Par construction l'arité d'un facteur est deux fois la somme des arités de ses composantes filles : $2(\ell_1 + \cdots + \ell_{2k})$. En particulier cette arité est donnée par l'étiquette. De plus les paramètres i et j correspondent toujours aux nombres totaux de x et de y respectivement.

3. *Codage.* Les nœuds des arbres de facteurs sont munis d'étiquettes qui déterminent leur arité. Ces arbres sont donc en bijection avec les mots du langage de Lukacievicz associé à ces étiquettes.

   Appelons $\mathcal{A}$ l'alphabet dont les lettres sont les couples de mots de la forme
$$X = \binom{x^k\bar{x}}{y^{\ell_1}\bar{y}y^{\ell_2}\bar{y}\cdots y^{\ell_{2k}}\bar{y}},$$
   pour tous $k \geq 0$ et $\ell_i \geq 0$, avec $\delta(X) = 2(\ell_1 + \ldots + \ell_{2k}) - 1$.

   À chaque arbre est ainsi associé un unique mot de Lukacievicz sur $(\mathcal{A}, \delta)$ de la forme
$$W = \binom{x^{k_1}\bar{x}}{y^{\ell_{1,1}}\bar{y}\cdots y^{\ell_{2k_1,1}}\bar{y}}\binom{x^{k_2}\bar{x}}{y^{\ell_{1,2}}\bar{y}\cdots y^{\ell_{2k_2,2}}\bar{y}}\cdots\binom{x^{k_n}\bar{x}}{y^{\ell_{1,n}}\bar{y}\cdots y^{\ell_{2k_n,n}}\bar{y}}$$
   et sur lequel on peut lire les paramètres i et j qui sont respectivement les nombres de x et de y. Ce mot vérifie, par définition des mots de Lukacievicz, mais aussi par construction, $\delta(W) = -1$. Remarquons que le nombre de lettres de ce mot sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est le nombre de $\bar{x}$, qui est égal par construction au nombre de feuilles paires. Il est donc égal à $2j + 1$ et ne dépend que du paramètre j.

4. *Lemme cyclique.* L'application du lemme cyclique au langage de Lukacievicz nous dit que les mots de Lukacievicz, et donc les arbres, sont en bijection avec les classes de conjugaison de mots sur $\mathcal{A}$ vérifiant $\delta(W) = -1$. Le nombre de mots différents sur $\mathcal{A}$ vérifiant $\delta(W) = -1$ et associés à un arbre donné est le nombre de lettres du mot de Lukacievicz, c'est-à-dire $2j + 1$.

5. *Concaténation.* Oublions les parenthèses dans le mot W. On obtient un couple de mots

$$\begin{pmatrix} x^{k_1}\bar{x}\dots x^{k_n}\bar{x} \\ y^{\ell_{1,1}}\bar{y}\dots y^{\ell_{2k_n,n}}\bar{y} \end{pmatrix}$$

contenant contenants i lettres x, j lettres y, $2j+1$ lettres $\bar{x}$ et $2i$ lettres $\bar{y}$. De plus les deux mots terminent respectivement par $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Ce couple de mots est suffisant pour reconstituer le mot sur $\mathcal{A}$ et tout couple vérifiant ces contraintes correspond à un unique mot de $\mathcal{A}$.

Nous avons ainsi démontré le

Lemme 5.4 *Les arbres ternaires plantés ayant i nœuds pairs et j nœuds impairs sont en bijection avec les couples de mots (f,g) de $\{x,\bar{x}\}^* \times \{y,\bar{y}\}^*$ tels que*

- *$(f\bar{x}, g\bar{y})$ est un mot de Lukacievicz sur l'alphabet $(\mathcal{A},\delta)$,*
- *et $|f|_x = i$, $|f|_{\bar{x}} = 2j$, $|g|_y = j$, $|g|_{\bar{y}} = 2i-1$.*

On en déduit le

Corollaire 5.5 *Le nombre d'arbres ternaires plantés avec i nœuds pairs et j nœuds impairs est*

$$\frac{1}{2j+1}\binom{i+2j}{i}\binom{2i+j-1}{j}.$$

L'algorithme de génération aléatoire procède alors de la manière suivante :

- Tirer par l'algorithme de rang inverse un mot u avec i lettres x et $2j$ lettres $\bar{x}$ et un mot v avec j lettres y et $2i-1$ lettres $\bar{y}$. Les deux mots sont tirés simultanément, ce qui permet d'obtenir directement des lettres de l'alphabet $\mathcal{A}$.
- Après la construction de chaque lettre X de $\mathcal{A}$ (qui invoque un $\bar{x}$ et un certain nombre de x, y et $\bar{y}$), calculer $\delta(X)$ et cumuler δ. Là encore ce cumul se fait au fur et à mesure de l'ajout des y à la lettre X.
- Déterminer la première lettre X_0 (de $\mathcal{A}$) de la factorisation de Lukacievicz. Il s'agit de la lettre suivant le dernier minimum strict de δ rencontré. Elle est donnée sous la forme des positions p et q des premières lettres dans chaque mot de la lettre X_0.

Pour construire explicitement l'arbre sous forme de structure il faut encore reconstituer chaque composante, mais ceci est immédiat et nous le ferons en même temps que l'ajout des bourgeons, quand nous utiliserons ces arbres en les équilibrant pour former des cartes.

5.3 Génération de cartes planaires

5.3.1 Tirage par conjugaison

Les bijections du chapitre 2 induisent des algorithmes de génération aléatoire très efficaces, décomposables en trois étapes.

Algorithme `Cartes`

	arêtes		sommets/faces		
	temps	espace	précalcul	temps	espace
quelconques	$O(n)$	$O(n)$	$O^*((i+j)ij)$	$O^*((i+j)ij)$	$O((i+j)ij)$
biparties	$O(n)$	$O(n)$	$O^*((i+j)ij)$	$O^*((i+j)ij)$	$O((i+j)ij)$
non séparables	$O(n)$	$O(n)$	–	$O(n)$	$O(n)$
cubiques n. s.	$O(n)$	$O(n)$	–	–	–
m-constellations	$O(n)$	$O(n)$	$?(n\prod n_i)$	$?(n\prod n_i)$	$?(n\prod n_i)$

TAB. 5.1: Complexité des algorithmes de tirage aléatoire.

`entree :` les paramètres de taille.

`sortie :` une carte planaire enracinée choisie uniformément.

1. *Tirage.* Construire un arbre équilibré choisi uniformément.
2. *Clôture.* Apparier bourgeons et feuilles pour former les nouvelles arêtes.
3. *Embellissement.* Éventuellement appliquer une transformation locale à la carte (dualité ou séparation).

Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 5.6 *Les algorithmes* `Cartes` *permettent de tirer au hasard uniformément les cartes planaires enracinées des familles ci-dessous. La table 5.1 donne leurs complexités suivant les paramètres «nombre d'arêtes» et, lorsque cela a un sens, «nombre de sommets et de faces». Pour les hypercartes ou cartes biparties, et les constellations, la distribution des degrés des faces peut être contrôlée : dans la table 5.2 sont données les complexités[3] des tirages soit pour une distribution de degrés donnée, soit selon les paramètres «nombre de sommets et de faces» avec un ensemble fini de degrés des faces autorisés $\mathcal{D}$. Enfin, si on désire remplacer les paramètres «sommets et faces» par le paramètre «nombre d'arêtes», toujours avec un ensemble de degrés des faces autorisés, il faut multiplier les complexités par un facteur linéaire.*

Les familles de cartes planaires enracinées concernées sont, par classes d'équivalences,

- *les cartes quelconques, les quadrangulations et les cartes radiales,*
- *les cartes biparties et les hypercartes et les cartes bi-cubiques,*
- *les cartes non séparables et les quadrangulations simples,*
- *les cartes cubiques non séparables et les triangulations avec arêtes multiples,*
- *les m-constellations.*

Les complexités données dans les tables sont en termes d'opérations arithmétiques du `C`, sauf pour les $O^*()$ qui sont en termes d'opérations arithmétiques sur les entiers longs. Ces $O^*()$ apparaissent lorsque les méthodes de génération de la section précédente ne s'appliquent pas et qu'il

[3] *Les complexités en ? sont très théoriques dans le sens où elles font appel à un générateur aléatoire pour des grammaires à m paramètres de poids. Le cas à deux paramètres est le seul pour lequel une implantation existe réellement (*`Qalgo` *par I. Dutour).*

	faces données		faces restreintes à $\mathcal{D}$		
	temps	espace	précalcul	temps	espace
biparties	$O(n \log n)$	$O(n)$	$O^*(n^2\|\mathcal{D}\|^2)$	$O^*(n^2\|\mathcal{D}\|^2)$	$O^*(n^2\|\mathcal{D}\|^2)$
m-constellations	$O(n \log n)$	$O(n)$	$O^*(n^2\|\mathcal{D}\|^2)$	$O^*(n^2\|\mathcal{D}\|^2)$	$O^*(n^2\|\mathcal{D}\|^2)$

TAB. 5.2: Complexité des algorithmes avec contrôle des degrés des faces.

faut faire appel à des générateurs de langages algébriques (`Combstruct` ou `Qalgo` sous `maple`, ou `CS` en `C`).

5.3.2 Algorithmes

Nous précisons maintenant un peu certains détails des trois étapes des algorithmes `Cartes` afin de justifier les complexités annoncées. Les algorithmes suivent de très près les bijections du chapitre 2, et présentent assez peu de difficultés spécifiques.

Étape 1. Tirage d'arbres équilibrés

Il nous faut distinguer trois algorithmes différents pour le tirage d'arbres équilibrés, suivant les paramètres que l'on désire contrôler. Ce sont ces trois algorithmes qui expliquent les différences de complexité qui apparaissent dans les tables : nous verrons en effet que les deux autres étapes sont toujours linéaires.

Les arbres équilibrés que nous utilisons sont des arbres plans plantés, munis de bourgeons et équilibrés. Nous avons besoin, pour chaque famille de cartes, de tirer au hasard un arbre équilibré uniformément parmi tous les arbres équilibrés associés à cette famille.

- Dans le cas le plus simple, ce tirage se décompose en trois étapes indépendantes :
  (a) le tirage d'un arbre sans bourgeon sous-jacent,
  (b) l'ajout des bourgeons,
  (c) la conjugaison de l'arbre.

  Cependant cette décomposition ne préserve l'uniformité que si
  - le nombre de façons d'ajouter les bourgeons est indépendant de l'arbre,
  - le nombre de feuilles est le même pour tous les arbres bourgeonnants.

  La seconde condition assure l'uniformité de l'opération (c) de conjugaison.

  Ces conditions sont vérifiées pour toutes les familles de cartes lorsqu'on fixe uniquement le nombre d'arêtes : on tire alors des arbres m-aires, auquel on ajoute un nombre fixe de bourgeons. C'est aussi le cas pour le tirage des cartes non séparables selon les nombres de sommets et de faces : on tire des arbres ternaires selon le nombre de sommets pairs et impairs et il n'y a qu'une façon d'ajouter les bourgeons. Dans ces deux cas la génération est linéaire, en vertu des résultats de la section précédente.

  Enfin, les conditions sont vérifiées lorsqu'on fixe précisément la distribution des degrés des faces d'une carte bipartie ou d'une constellation : il faut alors tirer un arbre plan planté dont la distribution des degrés des sommets est donnée complètement, c'est-à-dire un mot de Lukacievicz sur un multi-ensemble de lettres déterminé. La gestion des lettres dans l'algorithme de rang inverse nécessite alors une complexité $O(n \log n)$.

- La situation est un peu plus complexe si le nombre de façons d'ajouter les bourgeons dépend de l'arbre. On est alors amené à ne pas séparer les étapes (a) et (b), mais plutôt à donner une décomposition sous forme de grammaire algébrique des arbres bourgeonnants.

  Ce cas se produit pour les cartes quelconques ou biparties lorsqu'on désire imposer le nombre de sommets et de faces. En effet la disposition des bourgeons influe sur la répartition sommets/faces. Cependant les arbres bourgeonnants correspondant à une répartition particulière se décrivent simplement par une grammaire algébrique. Il est intéressant de remarquer que ce phénomène correspond (assez naturellement) au fait que les nombres de cartes correspondants n'ont pas de formule close simple, mais seulement un paramétrage simple.

  Il en va de même pour les cartes biparties dont les degrés des faces sont restreints : nous sommes ainsi amenés à tirer des arbres dont les degrés de nœuds sont restreints. Il faut cependant dans ce cas imposer les nombres de sommets et de faces pour que le nombre de feuilles soit constant.

  Nous utilisons alors les algorithmes de génération aléatoire récursive du type de `Combstruct` et `Qalgo`, qui s'appliquent bien aux grammaires algébriques et on obtient les complexités en $O^*(ij(i+j))$.

- Enfin le cas le plus désagréable est celui des cartes biparties dont les degrés des faces sont restreints, et dont on ne veut fixer que le nombre d'arêtes. En effet le nombre de feuilles n'est alors plus constant et la conjugaison n'est plus nécessairement uniforme. Il faut alors appliquer une méthode de rejet avec un surcoût linéaire.

Remarquons que la génération des arbres sous forme de mots de Lukacievicz, ou sous forme d'expression algébrique, nous donne des mots. Il faut donc encore, avant de passer à l'opération de clôture, créer véritablement les structures arborescentes correspondantes, par un décodage des codes préfixes et ajouter les bourgeons. Les techniques mises en œuvre ne dépassent pas le b.a.ba. de l'algorithmique des arbres...

Suivant le cas, on utilise pour construire nos arbres, soit des structures dynamiques, soit, lorsque ça n'est pas nécessaire, simplement des tableaux. En tous cas les structures utilisées restent toujours complètement élémentaires.

Étape 2. Clôture

L'algorithme de clôture est très simple à appliquer et toujours de complexité linéaire. Donnons en une description générique : à partir d'un arbre équilibré (ou de manière équivalente d'un arbre bourgeonnant et d'une feuille libre), on construit une carte, en utilisant une pile annexe.

- Au départ la pile est vide. On effectue un parcours de l'arbre, à partir de la feuille libre racine.
- Si on rencontre un bourgeon, on lui attache un brin vierge, et on empile le brin opposé.

- Si on rencontre une feuille, on essaye de dépiler un brin,
  - en cas de succès on attache le brin obtenu à la feuille,
  - en cas d'échec on est sur une feuille libre. Le traitement exact des feuilles libres dépend de la famille de cartes considérée.

Les cartes peuvent être produites directement sous formes de permutations de brins ou sous forme de structures de données plus évoluées, suivant les besoins ultérieurs.

Étape 3. Embellissement

Les opérations concernées ici dépendent des différentes familles de cartes mais elles sont toujours locales et s'effectuent en temps linéaire. Par exemple pour les cartes cubiques non séparables, l'algorithme de clôture produit une carte dont tous les sommets ont degré six. Chaque sommet doit alors, en vertu de la bijection du chapitre 2, être séparé en deux sommets de degré trois. Un autre exemple est celui des cartes non séparables qui sont obtenues sous forme de cartes radiales. Leur reconstitution utilise un parcours en profondeur.

5.4 Graphes, triangulations et polyèdres convexes

5.4.1 Tirage par extraction-rejet

Un peu de non déterminisme pour beaucoup de souplesse [4]*...*

Nous introduisons ici l'idée de génération aléatoire uniforme d'objets de taille approximativement contrôlée : usuellement les algorithmes de génération aléatoire prennent en entrée un ou plusieurs paramètres de taille et construisent un objet de la taille voulue. Cependant il suffit souvent, en particulier pour l'étude expérimentale de l'efficacité d'algorithmes, de savoir construire des objets représentatifs «assez grands», ou de taille «proche» d'une valeur donnée.

Considérons l'algorithme suivant qui construit des cartes planaires enracinées 3-connexes (comme ne l'indique pas son nom).

Pseudo-algorithme `polyèdre`

`entree :` la taille N espérée et la marge d'erreur Δ sur N acceptée.

`sortie :` une carte 3-connexe de taille n avec $|n - N| < \Delta$.

1. Tirer une carte C non séparable de taille $3N$ avec l'algorithme `Cartes` de la section précédente.
2. Extraire le noyau 3-connexe C' de C.
3. Si la taille n de C' vérifie $|n - N| < \Delta$, le résultat est C'. Sinon reprendre en 1.

---

[4] *Suggestion de publicité pour un sèche-linge à «logique floue».*

Théorème 5.7 (`polyèdre` est un générateur aléatoire uniforme) *La carte planaire enracinée 3-connexe (éventuellement) résultat de* `polyèdre(N,Δ)` *est choisie uniformément parmi les cartes de sa taille.*

Théorème 5.8 (`polyèdre` est efficace en moyenne) *La terminaison de l'algorithme* `polyèdre` *n'est pas garantie. Cependant, en moyenne, son comportement est polynômial.*

La complexité d'une boucle tirage/extraction est linéaire en N.

Le nombre moyen de rejets est asymptotiquement (pour N grand)

$$O\left(\frac{N^{2/3}}{\Delta}+\frac{1}{p}\right),$$

où $p>0$ est la probabilité limite (constante) qu'une carte 3-connexe ait un noyau de taille environ $1/3$, calculée au chapitre 4. En particulier

- *Pour $\Delta > N^{2/3}$, l'algorithme est linéaire en moyenne.*
- *Pour $\Delta = O(1)$, l'algorithme est de complexité moyenne $O(N^{2/3})$.*

La preuve de ces deux théorèmes découle des remarques suivantes

- L'uniformité est une conséquence de l'isomorphisme de structure combinatoire entre les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ de cartes non séparables et $\mathcal{G}$ de cartes 3-connexes,

  $$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ \mathcal{H}.$$

  Cet isomorphisme est dû à W.T. Tutte et nous l'étudions en détail au chapitre 4. Il implique l'uniformité de l'algorithme de génération car il dit que toutes les cartes 3-connexes de taille n donnée ont même probabilité d'être noyau d'une carte non séparable choisie uniformément parmi les cartes de taille N.
- La complexité linéaire du tirage de C est établie à la section précédente. Celle de l'extraction du noyau s'appuie, au choix, sur l'algorithme de J.E. Hopcroft et R.E. Tarjan pour l'extraction des composantes 3-connexes d'un graphe, ou sur l'algorithme plus simple développé à la section suivante.
- Enfin l'estimation du nombre de rejets découle de l'étude du paramètre «taille du noyau» étudié au chapitre 4.

Remarquons qu'il serait plus efficace de tirer la plus grande composante 3-connexe, au lieu du noyau. Cependant, on n'a plus tout à fait l'uniformité (mais comme il n'y a qu'une grande composante avec probabilité asymptotiquement égale à un, cela ne serait pas très grave), et surtout, en tirant le noyau, nous pouvons comparer les distributions expérimentales avec le comportement théorique prévu. Ceci permet de vérifier l'exactitude à la fois des calculs théoriques et des programmes de génération.

En contrepartie du non déterminisme que nous avons introduit dans l'algorithme `polyèdre`, nous obtenons un algorithme d'une très grande souplesse. La méthode de génération par conjugaison de la section précédente est finalement limitée à un nombre assez faible de familles de cartes :

cartes	simples	irred.	s. feuilles	2-c	n. sép.	3-c	4-c
quelconques	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non
biparties	oui	non	oui	oui	oui	non	non
triangulations	oui	–	–	–	–	oui	oui

TAB. 5.3: Quelques propriétés accessibles par extraction/rejet.

celles pour lesquelles les formules d'énumération admettent une forme close simple (sans sommations). L'extraction-rejet permet d'utiliser ces quelques familles élémentaires pour obtenir toutes les familles qui leur sont liées par composition. On obtient ainsi les triangulations 3-connexes à partir des triangulations non séparables. Elle permet d'en tirer d'autres encore en réappliquant l'extraction-rejet à ces nouvelles familles ! Ainsi on obtient les triangulations 4-connexes à partir des triangulations 3-connexes.

Le théorème suivant s'obtient donc en traduisant les schémas de composition du chapitre 4 par l'application, *mutandis mutantis*, de l'algorithme `polyèdre`.

Théorème 5.9 *Les familles suivantes peuvent être tirées au hasard avec la même complexité qu'au théorème 5.8.*

- *les cartes planaires enracinées 3-connexes selon les paramètres «nombres de sommets de faces», à partir des non séparables. Pour un tel paramètre double, la complexité s'entend pour des nombres de sommets n et d'arêtes N tendant vers l'infini avec $1/3+\varepsilon < n/N < 2/3-\varepsilon$, en vertu de l'étude du chapitre 4.*
- *les triangulations 3-connexes enracinées selon le paramètre «nombre de triangles», à partir des non séparables.*
- *les triangulations 4-connexes enracinées, appelées triangulations simples par W.T. Tutte selon le paramètre «nombre de triangles», à partir des 3-connexes. L'algorithme d'extraction est expliqué à la section suivante.*
- *les cartes non séparables, à partir des cartes planaires[5].*
- *les cartes arêtes 2-connexes, à partir des cartes planaires.*
- *les cartes planaires sans boucles, sans sommets pendants, sans arêtes parallèles, sans arêtes multiples, irréductibles, ou toute combinaison de ces propriétés, avec ou sans non séparabilité ou 2-connexité ou (quand cela à un sens) bipartition.*

Remarquons quand même par exemple qu'on ne peut obtenir ainsi de cartes 3-connexes biparties, car le noyau 3-connexe d'une carte bipartie n'a pas de raison d'être biparti.

Enfin l'extraction de noyau permet probablement de construire des graphes généraux 2- et 3-connexes aléatoires ayant peu d'arêtes. Les graphes généraux à m sommets ayant plus de $m \log m$ arêtes sont presque toujours 3-connexes et donc très faciles à obtenir. Au contraire, les graphes ayant par exemple un nombre linéaire αm d'arêtes ont une probabilité très faible d'être 2- ou 3-connexes et leurs propriétés en fonction de α ont fait l'objet d'une étude passionnante, en particulier

[5] *mais il est plus efficace d'utiliser directement la conjugaison d'arbres.*

par S. Janson, D. E. Knuth, T. Luczak, et B. Pittel [101]. L'étude expérimentale des composantes 2- et 3-connexes de ces graphes semble intéressante à mener.

Enfin, remarquons que dans un isomorphisme de structure combinatoire du type

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} \circ \mathcal{H},$$

les objets de la famille $\mathcal{H}$ apparaissent eux aussi uniformément. Si, par exemple, la plus grande sous composante est unique et grande en moyenne, alors on peut donner par extraction un pseudo-algorithme de génération quasi-uniforme pour les objets de $\mathcal{H}$ à partir des objets de $\mathcal{F}$. Malheureusement, le seul type d'exemple un peu intéressant à tirer ainsi au hasard que j'ai trouvé est celui des polynômes irréductibles sur un corps fini, extraits de polynômes quelconques. Or il me semble que X. Gourdon a montré qu'en général la plus grande sous-composante dans ce type de composition est de taille logarithmique, ce qui ruine l'espoir d'avoir une complexité polynômiale (sans compter le fait qu'il faut encore factoriser...).

5.4.2 Graphes, triangulations et polyèdres

La génération aléatoire uniforme de cartes planaires peut bien entendu s'interpréter comme une génération aléatoire de graphes planaires selon la distribution du nombre de plongements ! Cette remarque n'est pas si bête qu'il y paraît : il y a lieu de se demander dans certain cas quelle est la distribution la plus logique à considérer.

Cependant pour les graphes 3-connexes (et donc 4-connexes), cette discussion devient sans objet, en vertu du théorème d'unicité du plongement de H. Whitney.

Énonçons ce théorème, ainsi que deux autres qui permettent de d'étendre le champ d'application de nos générateurs.

Théorème 5.10 (H. Whitney 1933) *[151] Un graphe planaire 3-connexe admet un unique plongement planaire à homéomorphisme et inversion de la sphère près.*

Théorème 5.11 (E. Steinitz 1922) *[132, 134] Tout graphe planaire 3-connexe est le graphe d'un polyèdre convexe. Inversement le graphe d'un polyèdre convexe est planaire et 3-connexe.*

Théorème 5.12 (W.T. Tutte 1980, E.A. Bender, L.B. Richmond et N.C. Wormald 1982/1985, D.M. Jackson et L.B. Richmond 1992)*[124] Les fractions de graphes ayant des symétries sont exponentiellement faibles dans les trois familles suivantes :*

- *Les graphes de triangulations convexes [144].*
- *Les graphes de polyèdres convexes [123, 19].*
- *Les graphes de triangulations 4-connexes [95].*

Ainsi nos générateurs uniformes pour les cartes enracinées fournissent des générateurs *quasi-uniformes* pour ces trois dernières familles de graphes : un algorithme de génération aléatoire d'objets d'une famille $\mathcal{F}_n$ est quasi-uniforme s'il existe une sous-famille $\mathcal{F}'_n \subset \mathcal{F}_n$, de taille exponentiellement négligeable (*i.e.* il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tq, $|\mathcal{F}'_n| < |\mathcal{F}_n|e^{-\lambda n^\alpha}$) telle que l'algorithme soit uniforme sur $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$ et néglige éventuellement les éléments de $\mathcal{F}'$ (*i.e.* la probabilité de tirer un élément donné de $\mathcal{F}'$ est inférieure à $1/|\mathcal{F}|$).

Corollaire 5.13 (la fonction `polyèdre` mérite son nom) *Le pseudo-algorithme* `polyèdre` *et ses variantes permettent, sans changement de complexité, la génération aléatoire quasi-uniforme des objets suivants :*

- *Les graphes planaires 3-connexes ou graphes de polyèdres convexes, selon les paramètres «nombre d'arêtes» ou «nombres de sommets et d'arêtes».*
- *Les graphes planaires 3-connexes maximaux ou triangulations convexes, selon le paramètre «nombre de triangles».*
- *Les graphes planaires 4-connexes maximaux ou triangulations convexes simples au sens de Tutte, selon le paramètre «nombre de triangles».*

Ces algorithmes de génération aléatoire sont destinés à rejoindre la bibliothèque d'algorithmes pour les graphes planaires, développée à l'EHESS par l'atelier de taxiplanie [46].

5.5 Calcul des composantes 3- et 4-connexes d'un graphe planaire

5.5.1 Composantes 3-connexes d'un graphe planaire

À la section 1.5 est mentionnée la construction du noyau 3-connexe d'une carte non séparable en termes de 4-cocycles dans la carte radiale (cf. [139, 117, 7]) Nous déduisons de cette décomposition un algorithme qui fournit pour les cartes planaires une alternative reposante à l'algorithme général de J.E. Hopcroft et R.E. Tarjan [87]. Bien entendu leur algorithme est linéaire et s'applique à tous les graphes, ce qui laisse peu de place à une amélioration significative... Cependant il faut bien reconnaître que dans le cas planaire, cet algorithme est un peu surdimensionné et on peut faire bien plus simple.

Il semble qu'un algorithme similaire à celui que nous allons présenter ait été obtenu indépendamment dans l'atelier de taxiplanie de l'EHESS.

La caractérisation que nous utilisons s'exprime pour les cartes radiales en terme de *cocycle* (cf. figure 5.4). Un cocycle est un cycle de la carte duale. En d'autre termes un cocycle d'une carte planaire est une suite d'arêtes $(a_1, \ldots, a_k)$ telle que

- pour tout i il existe une face incidente simultanément à a_i et a_{i+1},
- la suppression des arêtes a_i crée au moins deux composantes connexes.

Proposition 5.14 (R.C. Mullin et P.J. Schellenberg 1968) *Soit R la carte radiale associée à une carte planaire C. Alors*

- *C est non séparable si et seulement si R ne contient pas de 2-cocycle.*
- *C est 3-connexe si et seulement si R ne contient pas de 4-cocycle non trivial* [6].

[6] tous les sommets de R ont degré quatre donc les quatre arêtes incidentes à un sommet forment un 4-cocycle que je qualifie de *trivial*.

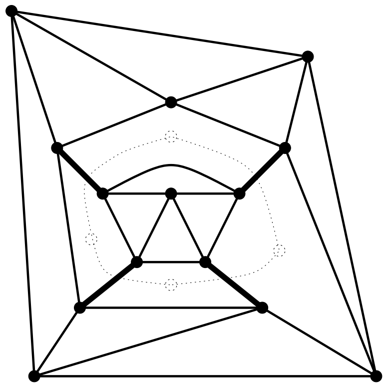


FIG. 5.4: Un 4-cocycle (en gras) dans une carte radiale sans 2-cocycle.

Le but du jeu est donc de détecter les 4-cocycles : l'algorithme suivant extrait le noyau d'une carte non séparable enracinée en travaillant sur la carte radiale.

Algorithme `Noyau bête`

`entree :` une carte radiale R enracinée sur une arête issue du sommet s.

`sortie :` le noyau de R en s.

Tant qu'il reste des 4-cocycles non triviaux,

1. choisir un 4-cocycle non trivial,
2. l'une des deux composantes séparées par le cocycle contient la racine s. Remplacer l'autre par un sommet en formant un 4-cocycle trivial.

Si on voulait réaliser une décomposition complète en composantes 3-connexes, il faudrait encore récursivement décomposer chacune des composantes supprimées.

Tout le problème est donc de déterminiser l'algorithme précédent : il faut trouver assez vite les 4-cocycles.

Pour cela nous introduisons un ordre dans l'exploration de la carte.

Algorithme `Noyau moins bête`

`entree :` une carte radiale R enracinée sur une arête issue du sommet s.

`sortie :` le noyau de R en s.

1. Construire un arbre couvrant en largeur et numéroter les sommets selon leur distance à s. Les arêtes de l'arbre couvrant sont orientées de la racine vers les feuilles (distance croissante donc).
2. Pour chaque arête a de l'arbre couvrant, prise dans l'ordre préfixe, rechercher les 4-cocycles non triviaux la contenant. Soit f la face à droite de a, g la face à gauche de a. Soit d la distance du sommet d'arrivée de a.

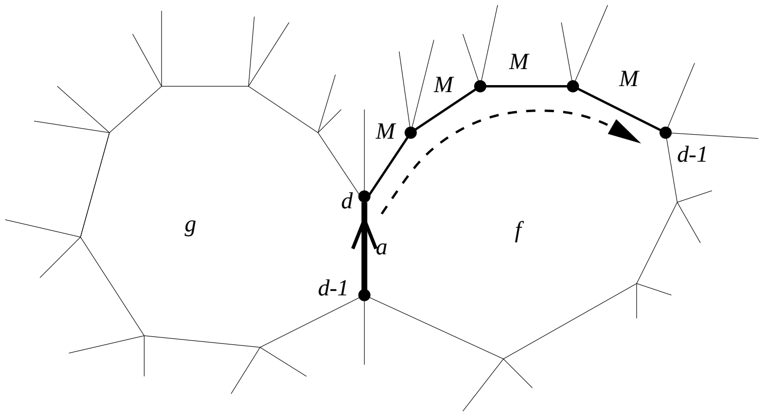


FIG. 5.5: Marquage préliminaire des voisines de la face de droite.

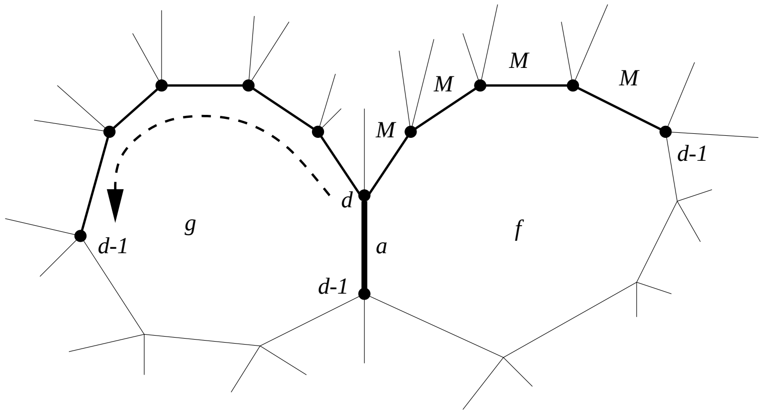


FIG. 5.6: Recherche du candidat extrémal sur la face de gauche.

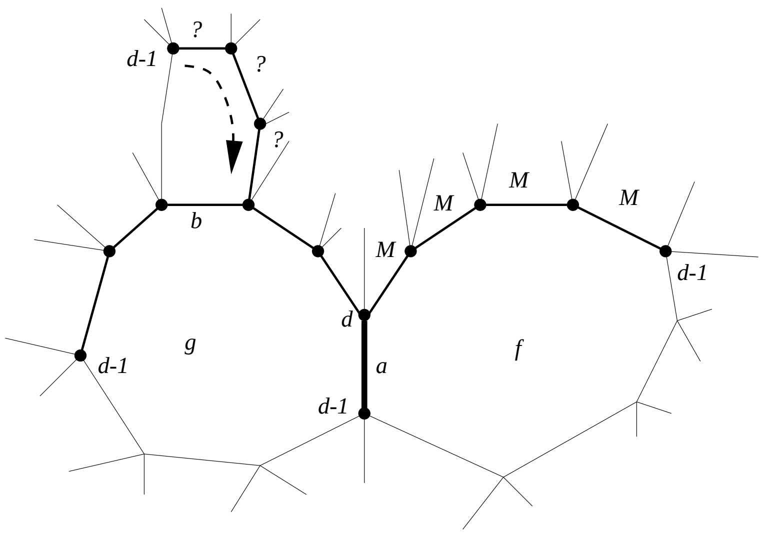


FIG. 5.7: Parcours de la voisine, à la recherche de marques.

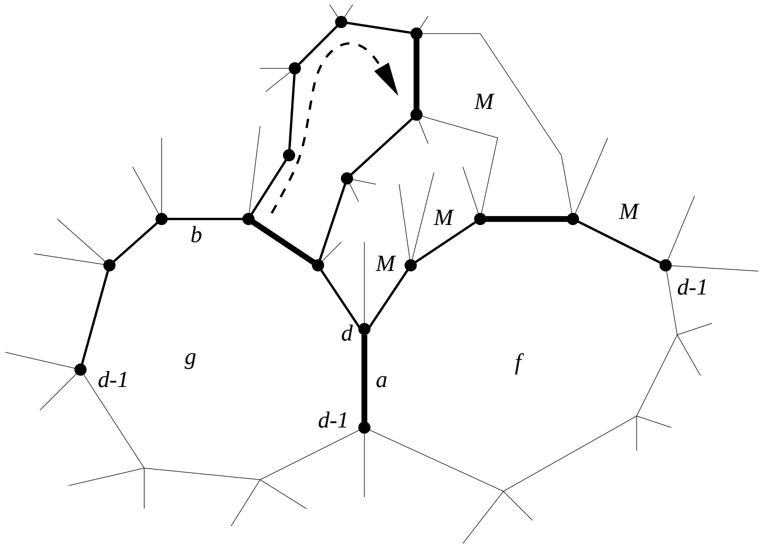


FIG. 5.8: Détection d'une marque et 4-cocycle maximal associé.

(a) (Figure 5.5) Parcourir la face f dans le sens indirect en partant de a, tant que les sommets rencontrés sont à distance supérieure à d. Au fur et à mesure marquer les faces gauches rencontrées.

(b) (Figure 5.6) Parcourir la face g dans le sens direct jusqu'au premier sommet à distance $d-1$. Alors revenir en sens indirect et pour chaque arête b rencontrée,

i. (Figure 5.7) Parcourir la face gauche de b dans le sens direct, jusqu'au premier sommet à distance $d-1$. Revenir en sens indirect en testant si les faces gauches sont marquées.

ii. (Figure 5.8) Dès qu'une face marquée est rencontrée, nous avons trouvé le 4-cocycle maximal s'appuyant sur a et ne contenant pas de sommets d'étiquette inférieure strictement à d. On peut donc s'arrêter.

Si un 4-cocycle non trivial a été détecté, remplacer la composante ne contenant pas s par un sommet en formant un 4-cocycle trivial. Il faut marquer *détruite* les arêtes ainsi éliminées ou les éliminer de l'arbre couvrant.

Montrons que cet algorithme remplit son office.

Proposition 5.15 *L'algorithme* `noyau moins bête` *construit le noyau en temps linéaire en moyenne.*

On peut compliquer un peu cet algorithme pour le rendre vraiment linéaire, en utilisant plutôt la distance dans la carte duale, mais comme nous voulons l'appliquer à des cartes tirées aléatoirement, ça n'est pas nécessaire.

Démonstration. Cet algorithme détecte tous les 4-cocycles maximaux (*i.e.* contenus dans aucune composante séparée par un autre 4-cocycle) dont l'une des arêtes d'étiquette minimale appartient

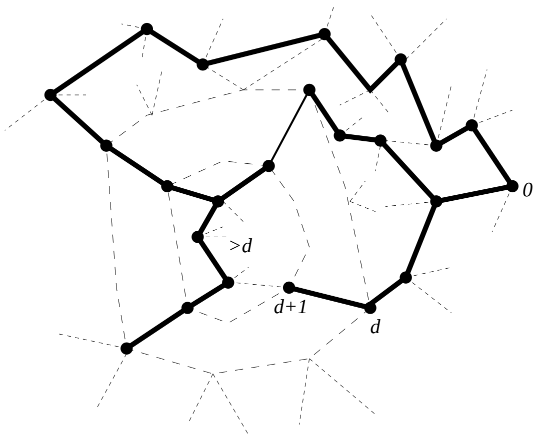


FIG. 5.9: Tout cocycle contient une arête de l'arbre couvrant dont l'étiquette est minimale.

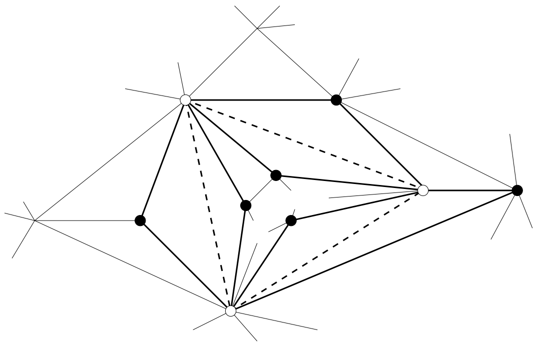


FIG. 5.10: Un trois séparateur d'une triangulation est un triangle.

à l'arbre couvrant. En effet l'algorithme essaye toutes les arêtes voisines d'une arête a de l'arbre couvrant susceptible d'appartenir à un 4-cocycle ne contenant aucun sommet à distance inférieure à d. Il les essaye de plus de la plus extérieure à la plus intérieure, de sorte que le premier 4-cocycle rencontré est maximal et contient tous les 4-cocycles s'appuyant sur a (*i.e.* dont l'étiquette de a est minimale parmi les étiquettes du cocycle).

Or il est clair, par définition du parcours en largeur utilisé pour construire l'arbre couvrant (cf. figure 5.9) que tout 4-cocycle contient une arête de l'arbre couvrant dont l'étiquette est minimale. Ceci conclut la preuve de la validité de l'algorithme.

Reste le problème de sa complexité. La complexité moyenne est linéaire : en effet, la distribution des degrés des sommets dans les cartes planaires suit une loi limite discrète géométrique ([10, 107]). Il en va donc de même des faces dans les cartes radiales. Or la complexité de l'algorithme est majorée par la somme des nombres d'arêtes à distance deux d'une arête donnée. □

5.5.2 Composantes 4-connexes d'une triangulation

L'extraction du noyau (ou des composantes) 4-connexe d'une triangulation 3-connexe est encore plus facile. En effet dans une triangulation, un 3-séparateur est nécessairement formé des 3 sommets d'un 3-cycle (cf. figure 5.10). On est donc ramené à détecter les 3-cycles pour les remplacer par des faces (ou les 3-cocycles par des sommets dans la carte cubique duale). Ceci se traite par une simplification immédiate de l'algorithme `noyau moins bête`.

Deuxième partie

Genres supérieurs

Chapitre 6

Genres supérieurs et g-arbres

Nous menons dans ce chapitre trois courtes études bijectives de cartes en genre supérieur.

- La section 6.1 est consacrée à une présentation géométrique du codage des cartes de genre g à n arêtes par les cartes bien étiquetées à une face de même genre (appelées g-arbres étiquetés). Ces résultats, qui généralisent une bijection de R. Cori et B. Vauquelin, sont issus d'une collaboration avec B. Jacquard puis M. Marcus.
- La section 6.2 rend compte de résultats partiels sur l'interprétation bijective d'une récurrence, due indépendamment à D.M. Jackson et à J. Harer et D. Zagier, pour le nombre de g-arbres à n arêtes.
- Finalement la section 6.3 décrit une construction simple pour énumérer les g-arbres à un seul sommet. Une première version de cet algorithme est due à A.B. Lehman et nous l'étendons à différents autres cas particuliers. Entre autres nous obtenons une nouvelle preuve combinatoire de la formule

  $$c^{\alpha}_{n,n-1} = 2(n-2)!$$

  qui donne le nombre de factorisations d'une permutation impaire α en produit d'un n-cycle et un $n-1$ cycle.

6.1 Cartes orientables : réduction directe aux g-arbres

Nous présentons dans cette section une bijection entre cartes de genre g et cartes étiquetées à une face de même genre. Pour $g = 0$, une bijection récursive a été décrite en termes de permutations par R. Cori et B. Vauquelin [43]. Une bijection différente a été donnée par D. Arquès [4], qui présente l'avantage d'être géométrique et de s'étendre aux hypercartes. Par contre la bijection récursive de R. Cori et B. Vauquelin s'étend, toujours en termes de permutations, aux cartes de genre quelconque, comme l'a montré M. Marcus [113]. Nous présentons ici une version géométrique non récursive de cette bijection. Dans le cas planaire, cette approche a été utilisée avec B. Jacquard [98] pour montrer une conjecture de S. Dulucq et J.-G. Penaud sur les arbres associés aux cartes non séparables. Avec M. Marcus, nous avons étendu cette construction au cas des cartes de genre quelconque, présenté ici.

6.1.1 Algorithme de compression

Définition 6.1 *Un* g-arbre *est une carte enracinée de genre g à une seule face. Un* g-arbre bien étiqueté *est un g-arbre dont les sommets sont étiquetés par des entiers strictement positifs de sorte que les étiquettes de deux sommets voisins diffèrent d'au plus 1, et dont le sommet racine porte l'étiquette 1.*

Soit C une carte. Nous avons définit la carte radiale R de C lorsque C est planaire. En fait cette construction fonctionne exactement de la même façon si C est de genre g et la carte radiale obtenue est de genre g. Si C est une carte et R sa radiale (dont tous les sommets sont de degré quatre donc), on note Q la carte duale de R. Toutes les faces de la carte Q sont de degré quatre et Q est appelée *la quadrangulation* de C. La quadrangulation Q est bicoloriée : ses sommets blancs sont les faces de C, et ses sommets noirs les sommets de C. Chaque face de Q entoure une arête de C. La figure 6.2 illustre cette construction.

L'algorithme suivant définit un codage des cartes de genre g par les g-arbres bien étiquetés : l'étude des cartes de genre g se ramène par ainsi à celle des cartes étiquetées à une seule face.

Algorithme `compresse`

`entree` : Une carte enracinée C de genre g à n arêtes.

`sortie` : Un g-arbre bien étiqueté à n arêtes.

1. Construire la quadrangulation Q associée à C.
2. Étiqueter les sommets de Q par leur distance au sommet racine. *Remarquons que les faces de Q sont alors de deux types, suivant les valeurs relatives des étiquettes autours de la face : simple $(e, e+1, e+2, e+1)$ ou confluente $(e, e+1, e, e+1)$ (cf. figure 6.1 et lemme 6.3).*
3. Construire une nouvelle carte A dont les sommets sont les sommets de Q distincts du sommet racine. Pour chaque face de Q, une arête est ajoutée dans A (cf. figure 6.1) ; cette arête joint les sommets :
   - d'étiquette maximale dans le cas d'une face confluente.
   - d'étiquette consécutive $e+1$ et $e+2$ lorsqu'on parcourt la face dans le sens direct dans le cas d'une face simple.

   Les étiquettes des sommets sont conservées.
4. Le résultat est la carte A qui est un g-arbre bien étiqueté à n arêtes.

L'ordre dans lequel les règles sont appliquées à chaque face est indifférent. Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

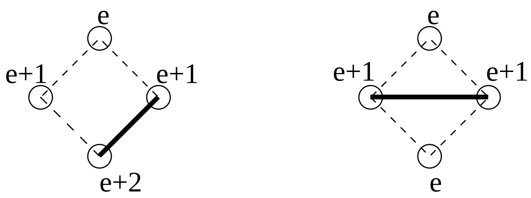


FIG. 6.1: Les deux types de faces et les règles de sélection associées

Théorème 6.2 *L'algorithme* `compresse` *définit une bijection entre les cartes enracinées de genre g et les g-arbres bien étiquetés, bijection qui conserve le nombre d'arêtes.*

Cet algorithme définit dans le cas planaire la même bijection que l'algorithme de R. Cori et B. Vauquelin [43]. Dans le cas des surfaces de genre g, il définit la même bijection que l'algorithme de M. Marcus [113], bien que ce dernier soit récursif et décrit en termes de permutations. Un des intérêts de la forme géométrique de l'algorithme décrit ci-dessus est qu'il est aisé à appliquer sur un exemple (cf. figures 6.2 à 6.4).

6.1.2 Preuve de la correction de l'algorithme

Nous montrons tout d'abord que l'algorithme `compresse` construit bien, ainsi qu'annoncé, un g-arbre à n arêtes à partir d'une carte de genre g à n arêtes.

Nous adoptons les notations suivantes ;

- C désigne une carte à n arêtes, dessinée sur une surface S, de genre g.
- Q désigne la quadrangulation de C.
- Q' est la carte formée de la réunion des arêtes de Q ainsi que des arêtes ajoutées au pas 3 dans les faces confluentes.
- A est le sous-ensemble des arêtes de Q' défini par l'algorithme `compresse` au pas 3.

A priori, A ne définit pas nécessairement une carte, encore moins une carte sur la surface S : il se pourrait en effet que A ne définisse pas un graphe connexe ou que les domaines délimités par A sur S ne soient pas simplement connexes. Nous notons encore $\hat{Q}'$ la carte duale de Q', dont les faces sont étiquetées, comme le sont les sommets de Q'. Enfin soit $\hat{A}$ l'ensemble des arêtes de $\hat{Q}'$ duales d'une arête de A.

Nous démontrons successivement les résultats suivants :

Lemme 6.3 *Toute face de Q est soit confluente, soit simple.*

Lemme 6.4 *L'application de la règle de placement des arêtes à deux faces simples distinctes donne des arêtes distinctes de A.*

Lemme 6.5 *Les faces de Q' peuvent toutes être atteintes à partir d'une face incidente au sommet 0 en ne traversant que des arêtes n'appartenant pas à A. Ceci est équivalent à dire que les arêtes de A ne délimitent qu'un seul domaine sur S.*

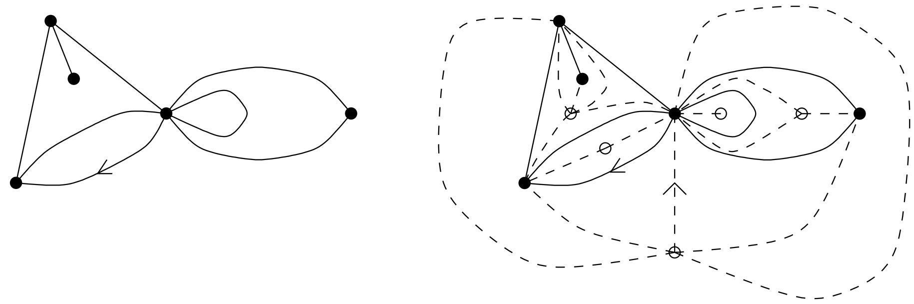


FIG. 6.2: Une carte et sa quadrangulation (arêtes discontinues).

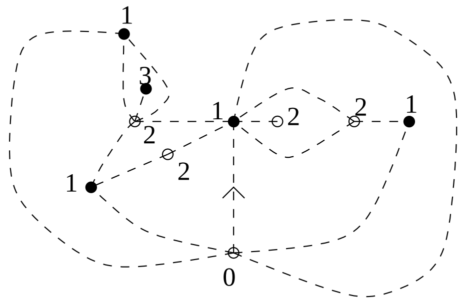


FIG. 6.3: Les sommets sont numérotés par la distance.

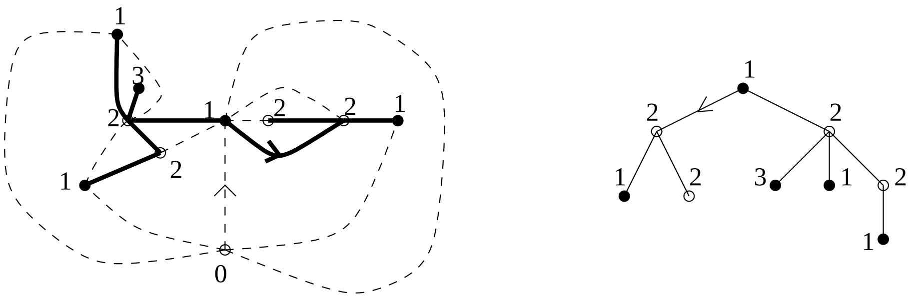


FIG. 6.4: Application des règles dans chaque face et arbre bien étiqueté obtenu.

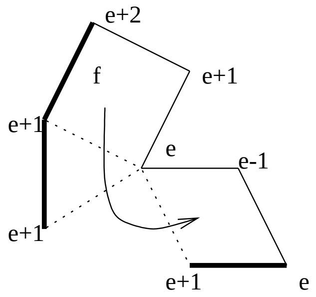


FIG. 6.5: D'une face d'étiquette minimale e à une face d'étiquette minimale $e-1$.

Lemme 6.6 *Le graphe $\hat{Q}' \setminus \hat{A}$ ne contient qu'un seul cycle simple qui borde la face 0 de $\hat{Q}'$. Ceci est équivalent à dire que le domaine $S \setminus A$ est simplement connexe.*

De ces résultats nous déduisons la proposition suivante, elle montre que l'algorithme se comporte comme annoncé :

Proposition 6.7 *L'ensemble d'arêtes A définit un g-arbre à n arêtes.*

Démonstration. Les lemmes 6.5 et 6.6 impliquent que A définit une carte à une face sur la surface S, c'est-à-dire un g-arbre. De plus, d'après le lemme 6.4, A contient autant d'arêtes que Q de faces. Comme les faces de la quadrangulation de C sont en bijection avec les arêtes de C, on en déduit que A possède le même nombre d'arêtes que C, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

Démontrons maintenant les différents lemmes.

Démonstration du lemme 6.3. Une quadrangulation est bipartie, et la couleur des sommets coïncide avec la parité de la distance à l'un d'entre eux. De plus, si x et y sont liés par une arête alors $|\phi(x)-\phi(y)| = 1$. Comme toutes les faces sont de degré 4, les seuls cycles d'étiquettes possibles autour d'une face sont donc $(e, e+1, e+2, e+1)$ ou $(e, e+1, e, e+1)$. □

Démonstration du lemme 6.4. Soit a une arête de A. Alors a est de la forme x_1x_2 où x_1 et x_2 sont deux sommets de Q' étiquetés e_1 et e_2 respectivement. Si $e_1 = e_2$, l'arête a provient d'une face confluente et n'a pu être sélectionnée que par cette face. Sinon, orientons l'arête a dans le sens des étiquettes croissantes. D'après la règle pour les faces simples, a n'a pu être sélectionnée que par une face : celle située à sa droite. □

Démonstration du lemme 6.5. Montrons le résultat par récurrence sur l'étiquette minimale des sommets bordant la face : soit une face f et x le sommet d'étiquette minimale e bordant f, montrons que, si $e > 0$, on peut atteindre une face d'étiquette minimale $e-1$ en tournant autour de x sans rencontrer d'arêtes marquées. Parmi les deux arêtes issues de x et bordant f, celle qui a f à sa droite ne peut appartenir à A. En effet la seule face qui aurait pu la sélectionner est justement f. On peut donc passer de f à la face voisine à travers cette arête non marquée en tournant autour de x dans le sens direct. Soit la nouvelle face ainsi atteinte admet toujours x comme sommet d'étiquette minimale et on continue à tourner autour de x, soit on a atteint une face d'étiquette

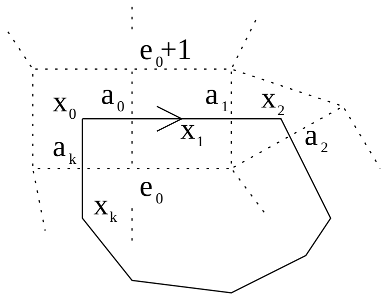


FIG. 6.6: La carte Q' et un cycle dans son dual.

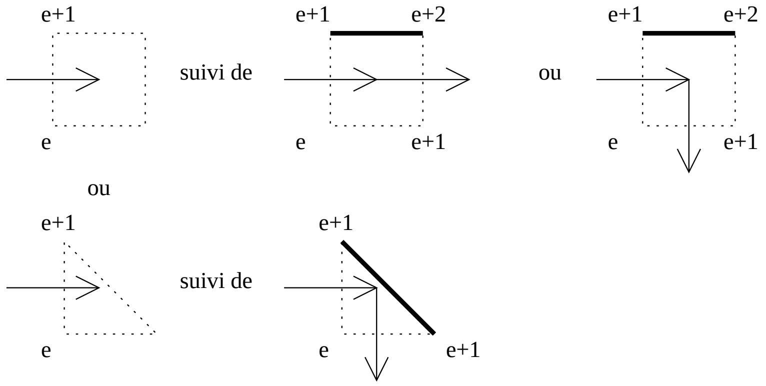


FIG. 6.7: Cas de figure possibles

minimale $e-1$. Ce dernier cas finit toujours par se produire car le sommet x est par construction relié à au moins un sommet étiqueté $e-1$. On peut donc toujours atteindre par récurrence une face incidente au sommet 0. De plus aucune des arêtes adjacentes au sommet d'étiquette 0 n'est marquée, donc deux faces de $\mathcal{Q}'$ peuvent toujours être reliées à travers des arêtes non marquées.
□

Démonstration du lemme 6.6. Supposons donc qu'il existe un cycle simple orienté

$$\{\hat{x}_0, \hat{a}_0, \hat{x}_1, \hat{a}_1, \dots, \hat{x}_{k-1}, \hat{a}_{k-1}, \hat{x}_0\}$$

où les $\hat{x}_i$ sont des sommets du dual $\hat{Q}'$ et les $\hat{a}_i$ des arêtes de $\hat{Q}' \setminus \hat{A}$. Chaque arête $\hat{a}_i$ joint les deux sommets $\hat{x}_i$, $\hat{x}_{i+1}$ du dual (*i.e.* a_i sépare deux faces x_i, x_{i+1} de Q'). L'orientation de l'arête

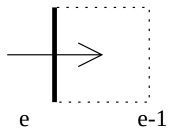


FIG. 6.8: Cas de figure exclu

$\hat{a}_i$ de $\hat{x}_i$ à $\hat{x}_{i+1}$ définit une face gauche et une face droite d'étiquettes respectives e'_i et e_i : $\hat{a}_i$ est bordée par (e'_i, e_i). On peut supposer que le cycle est choisi de sorte que e_0 soit minimale parmi les étiquettes e_i et e'_i le bordant. (cf. figure 6.6). Les arêtes bordées par deux étiquettes égales sont d'après la règle confluente des arêtes de $\hat{A}$. Nous avons donc $e'_0 = e_0 + 1$.

Plaçons nous en $\hat{x}_0$, et parcourons successivement les arêtes $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{k-1}$; nous montrons que les étiquettes voisines des arêtes parcourues ne peuvent pas décroître : en effet, étant donnée une arête a_i bordée par $(e+1, e)$, les deux règles de marquages des arêtes impliquent que l'arête a_{i+1} (qui est non marquée) est bordée par $(e+1, e)$ ou $(e+2, e+1)$ (cf. figure 6.7 et 6.8).

Par conséquent les étiquettes ne peuvent pas décroître sur le cycle et sont donc constantes ; il s'en suit qu'on fait le tour d'un sommet étiqueté e_0 de Q' ; or le seul sommet de Q' non-incident à une arête marquée et donc le seul dont on puisse faire le tour est par construction le sommet étiqueté 0. □

6.1.3 Construction réciproque et preuve du théorème

Le but de cette partie est de construire une application $\mathcal{C}$ réciproque de l'application $\mathcal{A}$ qui à une carte C associe le g-arbre défini par l'algorithme `compresse`.

Soit A un g-arbre bien étiqueté à n arêtes et f sa seule face. Celle-ci peut être vue comme un polygone dont les $2n$ côtés sont identifiés deux à deux. Par hypothèse, l'arête racine joint un sommet d'étiquette 1 à un sommet d'étiquette 1 ou 2. On numérote les sommets du polygone de 1 à $2n$ de façon à ce que la racine joigne le sommet $2n$ au sommet 1 et on appelle e_i l'étiquette du i-ème sommet. (De sorte que $e_{2n} = 1$ et $e_1 = 2$ ou $e_1 = 1$.)

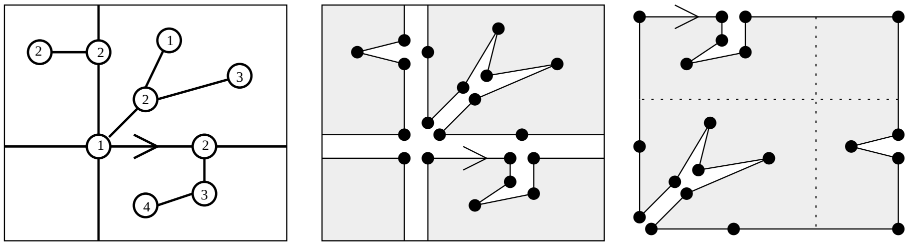


FIG. 6.9: Un arbre torique et son unique face vue comme polygone.

On définit alors l'application successeur s par

$$s(i) = \begin{cases} min\{j > i \mid e_j = e_i - 1\} & \text{si } e_i > 1, \\ \perp & \text{si } e_i = 1. \end{cases}$$

Pour tout i tel que $s(i) \neq i+1$ et $s(i) \neq \perp$ on trace alors la corde $(i, s(i))$ (cf. figure 6.11).

Propriété 6.8 *i) le diagramme de corde ainsi obtenu est planaire (i.e. les cordes ne se coupent pas).*

ii) tous les sommets d'étiquette 1 *sont incidents à la face racine de ce diagramme de corde.*

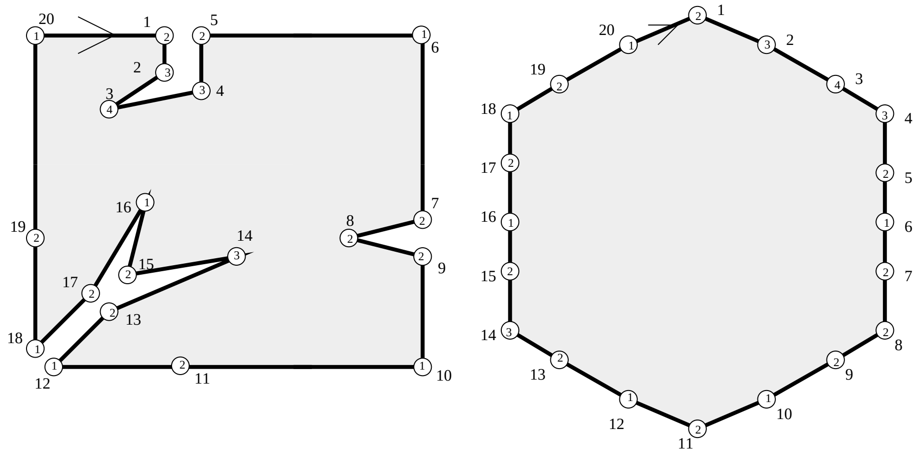


FIG. 6.10: La numérotation.

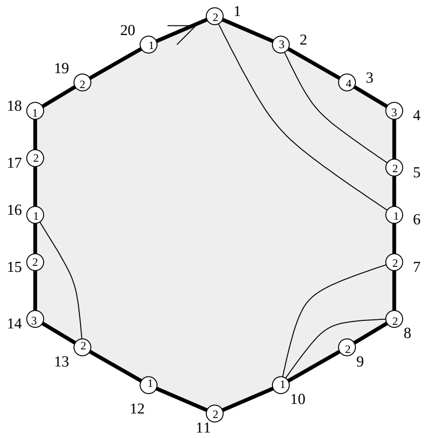


FIG. 6.11: Les cordes $(i, s(i))$.

Démonstration. i) supposons que deux cordes $(i, s(i))$ et $(j, s(j))$ se coupent. Quitte à échanger i et j on a $i < j < s(i) < s(j)$. On déduit des 2 premières inégalités et de la définition de s que $e_j > e_{s(i)}$ et des 2 dernières que $e_{s(i)} \geqslant e_j$, ce qui est contradictoire.

ii) supposons maintenant que $e_{s(i)} = 1$ alors $e_i = 2$ et quel que soit $j \in [i, s(i) - 1]$, $e_j \geqslant 2$. Soit de plus $p(i) = \min\{j < i \mid s(j) = i\}$ (le prédécesseur de i) alors si $e_i = 1$, $e_{p(i)} = 2$ et $e_{p(i)-1} = 1$. Donc le diagramme est de la forme indiquée sur la figure 6.11. La face centrale ainsi définie est incidente à toutes les arêtes du polygone commençant par 1. $\square$

On définit alors la carte Q' obtenue en ajoutant les cordes $(i, s(i))$ à Q, ainsi qu'un sommet étiqueté 0 et des arêtes joignant ce sommet aux sommets étiquetés 1. La face centrale est ainsi découpée en faces simples. Nous allons montrer qu'elles sont de degré 3 ou 4.

Propriété 6.9 *Les faces de Q' sont soit triangulaires soit quadrangulaires et sont incidentes à au moins une arête du polygone.*

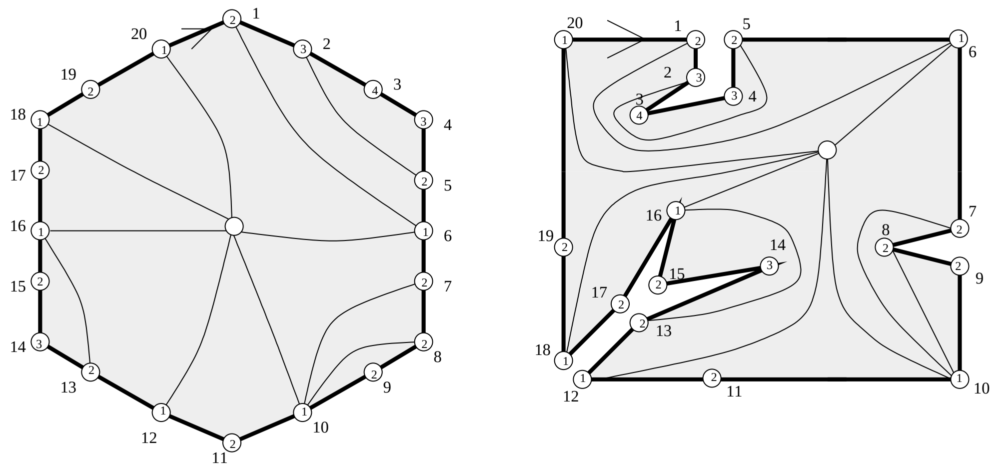


FIG. 6.12: Cordes et sommet supplémentaire.

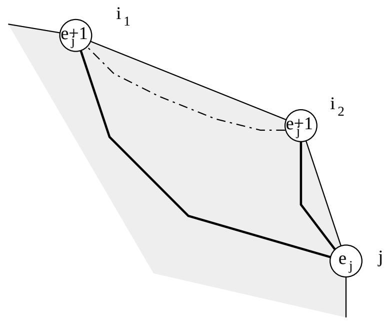


FIG. 6.13: Soit j de numéro maximal dans une face.

Démonstration. Soit f une face et j le sommet de numéro maximal de cette face. Si la face est incidente au sommet supplémentaire étiqueté 0, le résultat est immédiat. Sinon, les deux sommets voisins de j dans la face sont numérotés i_1 et i_2 avec $i_1 < i_2$ (cf. figure 6.13). Ces deux sommets ont pour étiquette $e_j + 1$: en effet l'arête (i_1, j) est une corde donc $j = s(i_1)$ et $e_{i_1} = e_j + 1$. Or $i_1 < i_2 < j$ ce qui implique que $e_{i_2} > e_j$ et donc que $e_{i_2} = e_j + 1$.

Par construction, aucune autre corde ne part de i_1 donc la face est bordée par l'arête (i_1, i_1+1) du polygone. Il y a alors 2 cas :

- si $i_1 + 1 = i_2$, la face est triangulaire,
- sinon, $e_{i_1+1} = e_{i_1} + 1 = e_j + 2$ (ou alors on aurait une corde $(i_1 + 1, j)$ qui exclurait i_2 de la face) et $s(i_1 + 1) = i_2$. En effet si $s(i_1 + 1) \neq i_2$, alors $e_{s(i_1+1)} = e_{i_1+1} - 1 = e_{i_2}$ et donc $s(s(i_1 + 1)) = s(i_2) = j$ et on aurait une corde $(s(i_1 + 1), j)$ qui exclurait i_2 de la face f.

□

Les faces de degré 4 de Q' sont simples et l'identification des cotés du polygone associe les faces triangulaires deux à deux pour former les faces confluentes d'une quadrangulation Q d'une carte

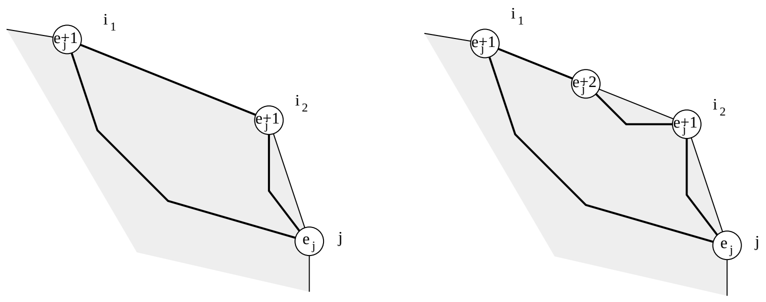


FIG. 6.14: Deux cas possibles : triangulaire ou quadrangulaire.

$\mathcal{C}(A)$. De plus nous vérifions que les arêtes du polygones sont bien placées dans Q conformément aux règles de sélection de l'algorithme `compresse`. Nous en déduisons que $\mathcal{A}(\mathcal{C}(A)) = A$.

Inversement soit C une carte de genre g et $\mathcal{A}(C)$ le g-arbre construit par l'algorithme `compresse` à partir de C. Effectuons alors la construction réciproque dans l'ordre suivant : plaçons tout d'abord le sommet 0 et ajoutons les arêtes le liant à chaque sommet étiqueté 1 du polygone. Puis dans chaque face ainsi définie ajoutons les cordes $(i, s(i))$ par ordre croissant d'étiquette, en fermant à chaque nouvelle corde une face de Q'. Ainsi nous pouvons vérifier au fur et à mesure que l'ajout de ces cordes donne des faces auxquelles il est possible d'appliquer les règles de sélection de l'algorithme `compresse` pour retrouver les arêtes du polygone et que ce sont les seules cordes possibles. (Comparer la figure 6.1.3 à la figure 6.1.) Nous en déduisons que $\mathcal{C}(\mathcal{A}(C)) = C$, ce qui termine la preuve du théorème 6.2.

6.2 Vers une récurrence d'Harer et Zagier bijective

Le but de cette partie est de fournir quelques outils en vue de l'obtention d'une preuve combinatoire de la récurrence suivante

$$(n+1)\varepsilon_g(n) = 2(2n-1)\varepsilon_g(n-1) + (2n-1)(n-1)(2n-3)\varepsilon_{g-1}(n-2)$$

où $\varepsilon_g(n)$ désigne le nombre de cartes à une face de genre g à n arêtes. Cette récurrence élégante et simple a été obtenue indépendamment par D.M. Jackson à l'aide de méthode algébrique (voir aussi le chapitre 7) et par J. Harer et D. Zagier en utilisant des intégrales de matrices. Dans les deux cas, les preuves sont délicates et assez longues. De plus une preuve bijective permettrait de construire les g-arbres facilement et, partant de là, de construire les cartes de genre g à l'aide de la bijection de la section précédente.

Notre démarche consiste à essayer d'étendre la preuve bijective de J.L. Rémy de la récurrence cette récurrence pour $g = 0$. Elle n'aboutit pas pour l'instant, mais semble prometteuse. Avis aux amateurs !

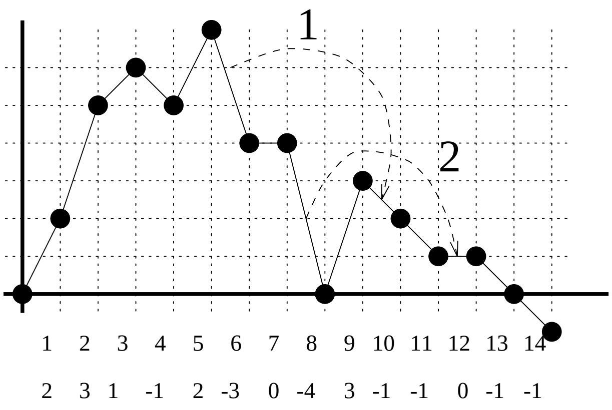


FIG. 6.15: Un chemin de Lukacievicz à deux références (m, ϕ, ϑ) avec $m = (2, 3, 1, -1, 2, -3, 0, -4, 3, -1, -1, 0, -1, -1)$, $I = \{6, 8\}$, $\phi(6) = 10$, $\phi(8) = 12$, $\vartheta(6) = 1$ et $\vartheta(8) = 2$.

6.2.1 Chemins et g-arbres

Les arbres plans enracinés sont codés par des mots de Lukacievicz. Nous présentons une généralisation de ce codage aux g-arbres enracinés. Nous l'exprimons en termes de chemin.

Définition 6.10 *Un chemin de Lukacievicz à g références est un triplet (m, ϕ, ϑ) où*

- *$m = x_1 \dots x_n$ est un mot tel que les x_i sont des entiers relatifs distincts de 2 et tel que $I = \{i \mid x_i \leqslant -3\}$ est de cardinal g.*
- *$\sum_{i=1}^{n} x_i = -1$ et $\sum_{i<k} x_i \geqslant 0$ pour tout $k < n$.*
- *ϕ est une injection de I dans $[1, n]$ telle que pour tout $i \in I$, $\phi(i) > i$ et $x_{\phi(i)} = -x_i - 4$.*
- *ϑ est une application de I dans $\mathbb{N}$ avec pour tout $i \in I$, $1 \leqslant \vartheta(i) \leqslant -x_i - 2$.*

Cette définition est illustrée par la figure 6.15.

Théorème 6.11 *Il existe une bijection entre les g-arbres à n arêtes et les chemins de Lukacievicz à g références de longueur $n + 1$ telle que :*

- *chaque sommet (distinct de la racine) de degré k correspond à une lettre $x_i = k - 2$ non référencée.*
- *si le degré du sommet racine est d, la première lettre est $x_1 = d - 1$.*

La preuve se fait à l'aide d'une décomposition récursive par contraction de l'arête racine, que nous interprétons en termes de mots à références. La décomposition que nous utilisons s'apparente aux décompositions de W.T. Tutte que nous avons décrit à la section 1.3. Des équations fonctionnelles s'en déduisent, qui permettent d'étudier les comportements des nombres de cartes en genre supérieur, asymptotiquement [9, 67] ou exactement [14, 66, 5].

Démonstration. Il existe une unique carte à zéro arête, qui est de genre zéro. Elle contient un unique sommet et une unique face. D'un autre côté il existe une unique chemin de Lukacievicz à références de longueur 1, qui est fait d'un unique pas -1 et ne contient aucune référence.

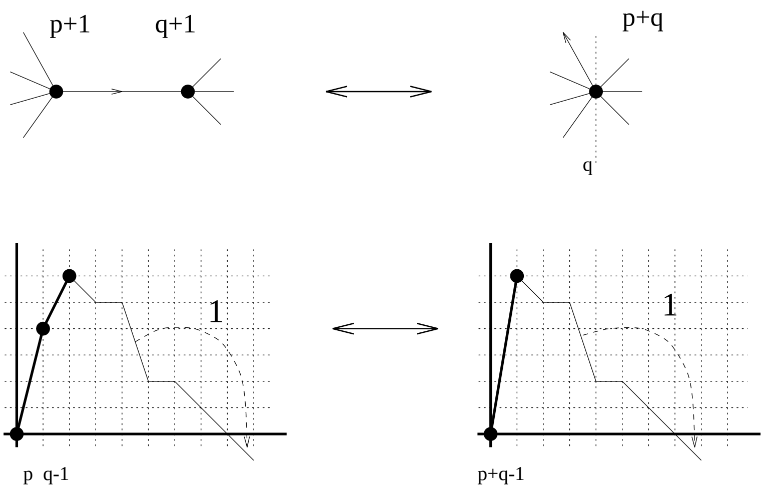


FIG. 6.16: L'arête racine joint deux sommets distincts.

Supposons maintenant que pour tout $k < n$ et tout $g \geqslant 0$ les g-arbres à k arêtes soient mis en bijection avec les chemins de longueur $k+1$ à g références et que la bijection respecte les conditions du théorème. Définissons alors pour tout g une bijection des g-arbres à n arêtes sur les chemins de longueur $n+1$ à g références : soit C un g-arbre à n arêtes, et a son arête marquée. Nous distinguons deux cas :

- *L'arête a joint deux sommets distincts.* (cf. figure 6.16) Alors soit C' la carte obtenue en contractant l'arête a et en enracinant le brin suivant autour du nouveau sommet racine. La carte C' est un g-arbre à $n-1$ arêtes, qui correspond donc à un unique chemin m_1 de longueur $n-1$ à g références. Le chemin m_1 s'écrit $x_1 m_2$ où x_1 est la première lettre de m_1. Alors par hypothèse, x_1+1 est le degré de la racine de C'. Le chemin associé à C est alors le chemin $m = x_i x_j m_2$ où x_i+1 est le degré de la racine de C et x_j+2 le degré du sommet terminal de a. Par construction de C' nous avons $(x_i+1)+(x_j+2) = (x_1+1)+2$ donc $x_i+x_j = x_1$ et le chemin m est bien un chemin de Lukacievicz de longueur $n+1$ à g référence. Inversement chacun des x_1+1 chemins obtenus pour x_i variant de 0 à x_1 correspondent à autant de cartes distinctes.
- *L'arête a est une boucle.* (cf. figure 6.17) Alors les brins autour du sommet racine sont organisés en cycle $(a, b_1, \ldots, b_p, \bar{a}, c_1, \ldots, c_q)$ avec $p+q+2 = x_1+1$ le degré du sommet racine. Soit alors C' la carte dans laquelle ce sommet racine est remplacé par les deux sommets $(b_1, \ldots, b_p)$ et $(c_1, \ldots, c_q)$, la racine étant b_1. Cette carte contient toujours une unique face mais un sommet de plus et une arête de moins. Son genre est donc $g-1$. Soit m' le chemin codant C', $m' = (p-1)m_1(q-2)m_2$ où $(q-2)$ est la lettre correspondant au sommet $(c_1, \ldots, c_q)$ de C', dont la racine locale est c_r. Soit alors $m = (p+q+1)(-q-2)m_1(q-2)m_2$ avec une référence de $x_2 = (-q-2)$ vers $x_i = (q-2)$ de valeur r. Par construction m est un chemin de Lukacievicz de longueur $n+1$ à g références. Inversement tout chemin obtenu ainsi correspond à une unique carte.

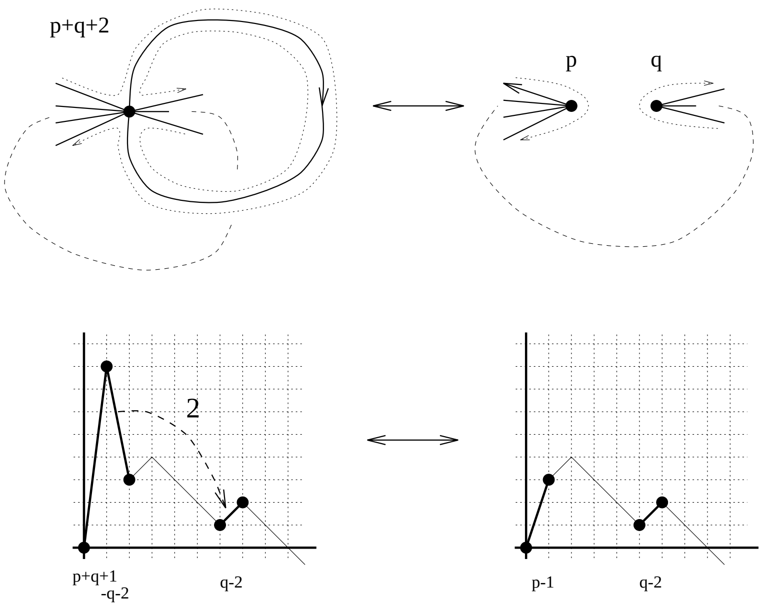


FIG. 6.17: L'arête racine est une boucle.

□

6.2.2 Décomposition des chemins

Soit $\varepsilon_g(n)$ le nombre de chemins de Lukacievicz de longueur $n+1$ à g références. Alors la récurrence satisfaite par $\varepsilon_g(n)$ que nous voudrions démontrer s'écrit,

$$(n+1)\varepsilon_g(n) = 2(2n-1)\varepsilon_g(n-1) + (2n-1)(n-1)(2n-3)\varepsilon_{g-1}(n-2).$$

Cette récurrence généralise la récurrence pour les nombre de Catalan, interprétée bijectivement par J.-L. Rémy [122]. En effet pour $g = 0$, on a :

$$(n+1)\varepsilon_0(n) = 2(2n-1)\varepsilon_0(n-1).$$

Nous donnons une extension de la construction de J.L. Rémy en genre quelconque, qui nous permet d'interpréter la première partie de la récurrence. Plus précisément, nous donnons les interprétations suivantes :

Remarque 6.12 *Les deux premiers termes de la récurrence d'Harer et Zagier s'interprètent combinatoirement :*

- $(n+1)\varepsilon_g(n)$ *est le nombre de chemins de Lukacievicz de longueur* $n+1$ *à* g *références dont une lettre est pointée.*
- $(2n-1)\varepsilon_g(n-1)$ *est le nombre de chemins de Lukacievicz de longueur* n *à* g *références dont une lettre non référencée* x_k *est étiquetée entre* 0 *et* x_k+1.

Proposition 6.13 *De plus il existe deux injections ϕ_1 et ϕ_2 de l'ensemble des chemins interprétant $(2n-1)\varepsilon_g(n-1)$ dans l'ensemble E des chemins pointés de Lukacievicz de longueur $n+1$ à g références dont la lettre pointée n'est* ni un lettre référencée, ni une lettre -1 suivie par une lettre référencée. *Les injections ϕ_1 et ϕ_2 ont des images disjointes dont la réunion forme E.*

Remarquons que pour démontrer la récurrence il resterait alors à prouver que le nombre de chemins pointés de Lukacievicz de longueur $n+1$ à g références dont la lettre pointée est référencée ou égale à -1 et suivie par une lettre référencée est :

$$(2n-1)(n-1)(2n-3)\varepsilon_{g-1}(n-2),$$

ce que nous ne savons pas faire.

Démonstration. Le premier point est immédiat puisque les mots de Lukacievicz comptés par $\varepsilon_g(n)$ ont $n+1$ lettres. Pour le second, il faut montrer que $\sum_k(x_k+2) = 2n-1$ où la somme porte sur les lettres x_k non référencées d'un mot de Lukacievicz de longueur n. Or par définition, $\sum_{k=1}^n x_k = -1$ et pour tout couple de lettres référencées $(i,\phi(i))$, $x_i + x_{\phi(i)} = -4$ d'où le résultat.

Décrivons ϕ_1 : (figure 6.18) soit m un chemin de longueur n, i tel que x_i soit une lettre non référencée et soit k un entier $0 \leqslant k \leqslant x_i+1$. Posons $m = m_1x_im_2$ et $\phi_1(m) = m_1k(x_i-k)m_2$ pointé sur le pas de hauteur k. Il est immédiat que ϕ_1 définit une bijection dont l'image est l'ensemble des chemins de longueur $n+1$, pointés sur un pas montant suivi d'un pas non référencé.

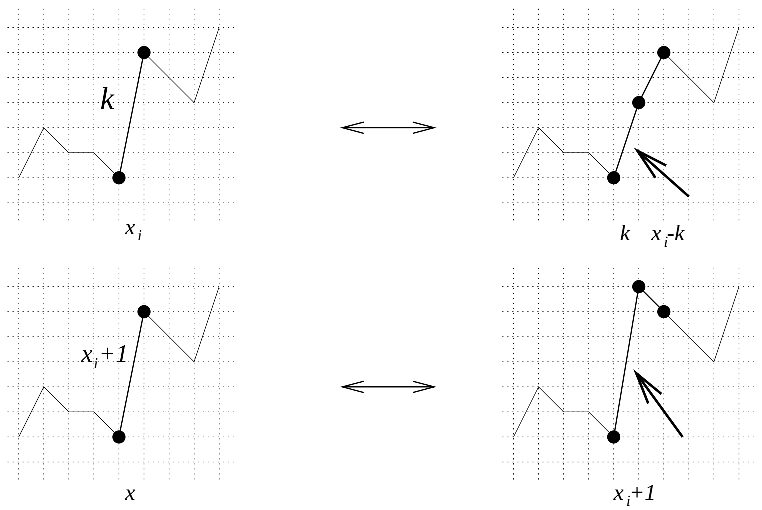


FIG. 6.18: L'application ϕ_1.

Décrivons maintenant ϕ_2 : soit m un chemin de longueur n, i tel que x_i soit une lettre non référencée et $0 \leqslant k \leqslant x_i+1$. Posons $m = m_1x_im_2$.

- Si $k = x_i+1$ alors $\phi_2(m) = m_1(x_i+1)(-1)m_2$, pointé sur la lettre -1 (en position $i+1$). (cf. figure 6.19)
- Sinon soit $p = h(m_1)$ la hauteur du chemin avant le $i$ème pas et j l'indice du premier pas suivant i et dépassant la hauteur $p+k$. Le pas j est descendant par construction, mais deux

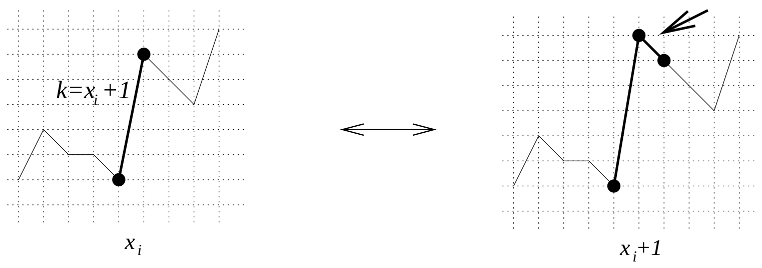


FIG. 6.19: L'application ϕ_2, k maximal.

cas sont possibles :

– soit le pas j commence exactement à hauteur $p+k$ et descend. Dans ce cas $\phi_2(m) = m_1(x_i+1)m_3(-1)m_4$ pointé sur le pas (-1) où m_3 est le facteur gauche de longueur $j-i$ de m_2. (cf. figure 6.20)

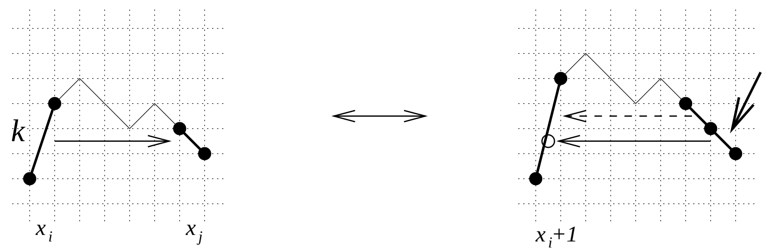


FIG. 6.20: L'application ϕ_2, k non maximal, sans transfert.

– soit le pas j est un pas $h < -3$ d'où part une référence. Mais alors, le pas j pointe sur un pas i' de hauteur $-h-4$ et porte une étiquette k' comprise entre 0 et $-h+1$. Relevons alors les deux pas j et i' de 1, en donnant pour étiquette à la référence k qui est par construction compris entre 0 et $-h+1$. Puis reprenons la construction en partant de i' avec k' au lieu de i avec k : nous sommes passé à travers la référence. (cf. figure 6.21)

Après être éventuellement passé au travers de références, un mot $\phi_2(m)$ fini par être ainsi défini.

Il est maintenant facile de voir que ϕ_2 définit une bijection dont l'image est l'ensemble des chemins pointés de longueur $n+1$ sur un pas -1 non référencé. □

6.3 Graphes de Lehman et g-arbres de genre maximal

Dans un manuscrit non publié, A. B. Lehman introduit une représentation des factorisations d'une involution sans point fixe comme produit de deux n-cycles. En terme de g-arbres, ces factorisations sont liées aux g-arbres à un seul sommet, ou encore au plongement de genre maximum

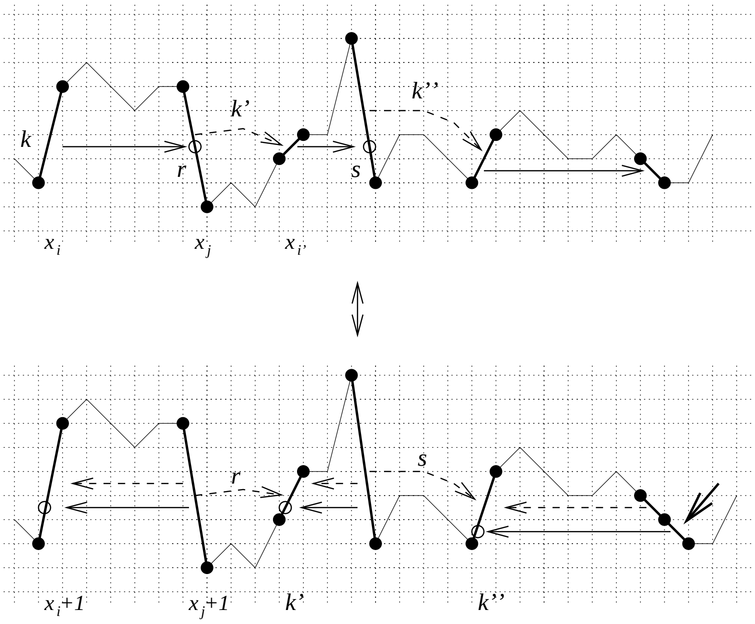


FIG. 6.21: L'application ϕ_2, k non maximal, avec transfert.

d'un bouquet de boucles. Nous présentons cette construction et l'étendons à quelques autres cas. Ceci nous permet de donner une preuve bijective du théorème suivant

Théorème 6.14 *Soit α une permutation impaire de $\mathfrak{S}_n$. Le nombre de factorisations $\alpha = \sigma\phi$ de α en un $(n-1)$-cycle α et un n-cycle ϕ est*

$$2(n-2)!.$$

Soit α une involution paire de $\mathfrak{S}_n$ avec p points fixes et $2q$ 2-cycles, de sorte que $p + 4q = n$. Le nombre de factorisations $\alpha = \sigma\phi$ de α en deux n-cycles est

$$\frac{n!}{p + (n+1)2q}.$$

Un preuve bijective différente de la première assertion du théorème est due à A. Machì [112].

Soit α une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Si x est un élément de $X = \{1, \ldots, n\}$ appelons $\bar{x}$ l'image de x par α.

Le *graphe de Lehman* d'une suite $a_0, \ldots, a_k$ d'éléments de X est un multigraphe orienté sur X, dont les arêtes sont étiquetées $e_0, \ldots, e_{k-1}$ où e_i va de $\bar{a}_i$ à a_{i+1}. La figure 6.22 illustre cette définition.

Une suite $a_0, \ldots, a_k$ d'éléments de X est *valide* si

- Les éléments $a_1, \ldots, a_k$ sont distincts.
- Le graphe de Lehman de la suite $a_0, \ldots, a_{k-1}$ ne contient pas de cycle.

Lemme 6.15 *Soit $a_0, \ldots, a_n$ une suite valide.*

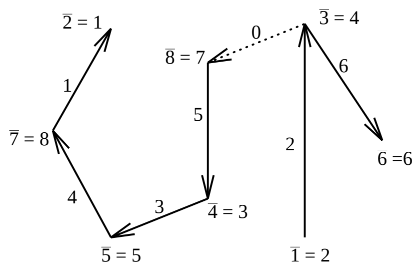


FIG. 6.22: Le graphe de Lehman de $s = 3, 7, 1, 4, 5, 8, 3, 6, 2$ pour $n = 8$ et $\alpha = (1, 2)(3, 4)(5)(6)(7, 8)$ en notation cyclique. e_0 est l'arête pointillée.

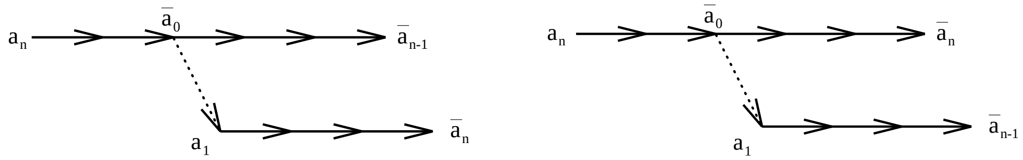


FIG. 6.23: Les deux formes possibles du graphe.

1. *Si la permutation α est impaire alors le produit de α avec le $(n-1)$-cycle $\sigma = (a_1, \dots, a_{n-1})(a_n)$ est un n-cycle.*
2. *Sinon, le produit de α avec le n-cycle $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ est un n-cycle.*

Démonstration. D'après les hypothèses, le graphe de Lehman de la suite n'a pas de cycle. De plus, puisque les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont distincts, tous les sommets ont degré sortant et entrant égal à 1, sauf $\bar{a}_0$ (degré sortant 2), a_n (degré entrant 1), $\bar{a}_{n-1}$ et $\bar{a}_n$ (degré sortant 0). Il suit que le graphe est de l'un des deux types montrés sur la figure 6.23 où chaque partie des deux graphes peut être réduite à une seul sommet.

Supposons tout d'abord que α est impaire et posons $\sigma = (a_1, \dots, a_{n-1})(a_n)$ et $\phi = \sigma\alpha$. Pour $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\phi(\bar{a}_i) = \sigma(a_i) = a_{i+1}$. Donc les arêtes $e_1, \dots, e_{n-2}$ du graphe de Lehman de $a_0, \dots, a_{n-1}$ représentent l'action de la permutation ϕ. Pour représenter ϕ complètement, il nous faut ajouter les arêtes $\bar{a}_{n-1} \to a_1$ et $\bar{a}_n \to a_n$ et supprimer l'arête pointillée. Si le graphe est du premier type, la permutation ϕ a un cycle, sinon elle en a deux.

Mais α est impaire donc σ et ϕ ont des parités distinctes et ϕ doit avoir un seul cycle. Ceci conclut la preuve de la première partie du lemme.

Supposons maintenant que α soit pair et posons $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ et $\phi = \sigma\alpha$. Pour représenter ϕ nous devons cette fois ajouter les arêtes $\bar{a}_{n-1} \to a_n$ et $\bar{a}_n \to a_1$. Donc si le graphe est du premier type, la permutation ϕ a deux cycles et sinon elle en a un. Nous concluons grâce au fait que ϕ et σ doivent avoir la même parité. □

Démonstration du théorème. Commençons par compter les suites valides. Nous construisons toutes les suites valides de manière incrémentale : pour tout a_0 dans X, a_0 est valide. De plus la suite $a_0, \dots, a_k$ est valide si et seulement si :

- La suite $a_0, \ldots, a_{k-1}$ est valide.
- a_k est distinct de $a_1, \ldots, a_{k-1}$.
- a_k ne crée pas de cycle, *ie.* a_k est distinct de $\bar{a}^*_{k-1}$, le premier sommets du plus long chemin terminant en $\bar{a}_{k-1}$.

Le sommet $\bar{a}^*_{k-1}$ n'appartient pas à $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ puisque tous ces éléments ont degré entrant non nul. On en déduit que le nombre de choix possibles pour a_k est $n-k$ et par récurrence qu'il y a $n!$ suite valides.

Toute suite valide $a_0, \ldots, a_n$ correspond à une factorisation telle que décrite dans le théorème. Nous prétendons de plus que toutes les factorisations sont obtenues le même nombre de fois.

Nous commençons par le lemme suivant : si $a_1, \ldots, a_n$ sont donnés, alors tous les a_0 tels que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ soit valide donnent le même graphe de Lehman, au point de départ de l'arête pointillée près. On en déduit que le nombre $N(a_1, \ldots, a_n)$ de tels éléments est la longueur du chemin partant de a_n.

Supposons tout d'abord que α est impaire et soit $\sigma = (a_1, \ldots, a_{n-1})(a_n)$ une factorisation telle que décrite par le théorème. Le nombre de fois que σ est obtenu est clairement la somme

$$\sum_{i=1}^{n-1} N(a_i, \ldots, a_{n-1}, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_n).$$

Cependant, le graphe de Lehman de $a_0, a_i, \ldots, a_{n-1}, a_1, \ldots, a_{i-1}$ est obtenu à partir du n-cycle représentant ϕ en supprimant l'arête $\bar{a}_n \to a_n$ et l'arête $\bar{a}_{i-1} \to a_i$. Supprimer $\bar{a}_n \to a_n$ donne un chemin de longueur $n-1$ et lorsque i décrit $1, \ldots, n-1$, la seconde arête est successivement chacune des autres arêtes de sorte que la longueur du chemin partant de a_n prend toutes les valeur entre 1 et $n-1$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n-1} N(a_i, \ldots, a_{n-1}, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_n) = \binom{n}{2}.$$

Puisque chaque factorisation est obtenue $\binom{n}{2}$ fois et qu'il y a $n!$ suites valides, le nombre de factorisations est $2(n-2)!$ et la première partie du théorème est prouvée.

Supposons maintenant que α soit une involution avec p points fixes et $2q$ cycles $(p+4q=n)$ et soit σ une factorisation telle que décrite dans le théorème. Soit $a_1, \ldots, a_n$ une des n représentation du n-cycle σ. Si a_n est un point fixe de σ alors $\bar{a}_n = a_n$, on obtient la figure 6.24, de sorte que

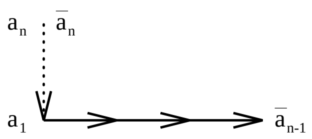


FIG. 6.24: a_n est un point fixe.

$N(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Sinon soit i l'indice tel que $\bar{a}_n = a_i$. Puisque α est une involution, on a $\bar{a}_i = a_n$ et il y a une arête $a_n \to a_{i+1}$ dans le graphe de Lehman de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pour tout choix de a_0 tel que la suite $a_0, \ldots, a_n$, ce qui donne les différentes possibilités représentés sur la figure 6.25. Considérons

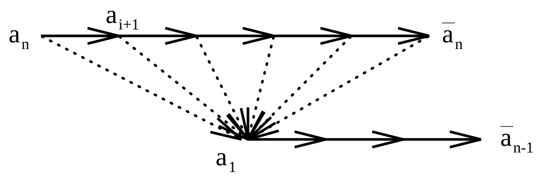


FIG. 6.25: Les choix valides pour le premier graphe.

maintenant le graphe de Lehman de $a_0, a_{i+1}, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_{i-1}$ pour les choix de a_0 tels que la suite $a_0, \ldots, a_n$ soit valide : dans ce graphe les arêtes $\bar{a}_{i-1} \to a_i$ et $\bar{a}_i \to a_{i+1}$ n'apparaissent pas au contraire des arêtes $\bar{a}_{n-1} \to a_n$ et $\bar{a}_n \to a_1$, ce qui donne cette fois les possibilités représentées sur la figure 6.26. La comparaisons des deux graphes montre que le nombre total de choix de a_0

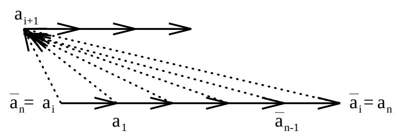


FIG. 6.26: Les choix valides pour le second graphe.

pour ces deux suites est $n+1$.

Le nombre total de suites valides donnant σ est donc $p + (n+1)2q$. On en déduit que le nombre de factorisations est $n!/(p + (n+1)2q)$ et ceci termine la preuve. □

Chapitre 7

Factorisations dans le groupe symétrique

Dans ce chapitre nous dénombrons les factorisations ordonnées dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ d'un grand cycle $(1, \dots, n)$ en produit de permutations de types cycliques donnés. Ce problème a été largement étudié et le résultat que nous démontrons contient et étend bon nombre de résultats antérieurs.

La section 7.1 est consacrée à présenter notre résultat principal ainsi que quelques corollaires. Après avoir énoncé le minimum de théorie des caractères du groupe symétrique nécessaire au démarrage de notre étude, nous donnons le plan de la preuve. Celle-ci occupe la section 7.3. Notre résultat principal peut être simplifié dans certains cas, que nous discutons dans la section 7.4. Enfin nous donnons quelques applications à l'énumération des g-arbres (section 7.5).

Les résultats de ce chapitre sont issus d'une collaboration avec Alain Goupil et Dominique Poulalhon [79, 120].

7.1 Factorisations ordonnées

7.1.1 Quelques définitions

Une suite finie décroissante $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_\ell > 0)$ est une partition de l'entier $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$. On note $\lambda \vdash n$ et on appelle les entiers λ_i les parts de λ. Si λ possède α_i parts égales à i, on note encore $\lambda = 1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n}$. Une *distribution* Λ de poids n est un m-uplet $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ où chaque λ_i est une partition de n (*i.e.* $\lambda_i \vdash n$ pour tout $i = 1, \dots, m$).

Nous utiliserons constamment les classes de conjugaisons du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Rappelons donc qu'à chaque partition λ de n est associé l'ensemble C_λ des permutations de type cyclique λ et que ces ensembles forment les classes de conjugaisons du groupe symétrique. De plus si $\lambda = 1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n}$, alors le cardinal de C_λ est $|C_\lambda| = n!/z_\lambda$ où $z_\lambda = 1^{\alpha_1}\alpha_1! \cdots n^{\alpha_n}\alpha_n!$.

Notre objectif est l'étude de certaines factorisations dans $\mathfrak{S}_n$:

Définition 7.1 *Soit $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ une distribution de poids n et π une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Notons alors $\mathcal{K}_\Lambda^\pi$ l'ensemble des solutions $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ du système d'équations suivant, appelées* factorisations ordonnées *de π de distribution Λ :*

- *$\sigma_i \in C_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [1, m]$.*
- *$\sigma_1 \cdots \sigma_m = \pi$.*

Notons c_Λ^π le cardinal de $\mathcal{K}_\Lambda^\pi$. Pour $\pi = \mathrm{id}$ la permutation identité, on le note simplement c_Λ.

Cette définition rejoint les préoccupations de l'introduction du chapitre 3.

Proposition 7.2 *Soit Λ une distribution, alors c_Λ^π ne dépend que du type cyclique μ de π. Ainsi nous noterons c_Λ^μ le cardinal commun des $\mathcal{K}_\Lambda^\pi$ pour $\pi \in C_\mu$. De plus,*

$$c_{[\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu]} = c_\Lambda^\mu \cdot |C_\mu|.$$

Démonstration. Soit π et π' deux éléments de C_μ. Les permutations π et π' sont conjuguées de sorte qu'il existe une permutation ρ telle que $\pi' = \rho^{-1}\pi\rho$. L'application $\sigma \mapsto \rho^{-1}\sigma\rho$ appliquée simultanément aux m composantes d'un élément de $\mathcal{K}_\Lambda^\pi$ l'envoie sur un élément de $\mathcal{K}_\Lambda^{\pi'}$. Cette application est une bijection ce qui donne le résultat. □

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre uniquement aux factorisations de n-cycles. Pour ces factorisations particulières, la condition de transitivité (cf. section 3.1.1) est automatiquement vérifiée.

Remarque 7.3 *Les factorisations de $\omega = (1, \ldots, n)$ sont en bijection avec les constellations pointées à une face de genre g ou g-cactus (cf. proposition 3.4 pour le cas $g = 0$, qui s'étend sans difficulté).*

La définition du genre pour les cartes combinatoires (formule (1), page 23) s'étend aux factorisations (voir [111] pour une discussion plus détaillée) :

Définition 7.4 *Soit $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ une distribution de poids n, et $r_i = n - \ell(\lambda_i)$. Soit encore μ une partition de n, $r = n - \ell(\mu)$. Le genre d'une factorisation de $\mathcal{K}(\Lambda; \mu)$ est*

$$g(\Lambda; \mu) = g([\lambda_1, \ldots \lambda_m, \mu]) = 1 - n + \frac{1}{2}\left(r + \sum_{i=1}^{m} r_i\right).$$

En particulier pour les factorisations de n-cycles, $\mu = n$ et on obtient

$$g(\Lambda; n) = \frac{1}{2}\left(1 - n + \sum_{i=1}^{m} r_i\right).$$

Remarque 7.5 *(cf. [111]) De même que dans le cas des constellations, la condition $g(\Lambda; n) \in \mathbb{N}$ est une condition nécessaire à l'existence de solutions au système d'équations $(\Lambda; n)$:*

$$\mathcal{K}_\Lambda^n \neq \emptyset \ \Rightarrow\ g(\Lambda; n) \in \mathbb{N}.$$

Un des corollaires de notre étude sera de redémontrer que cette condition est suffisante dans le cas des factorisations de n-cycles (voir aussi [24]).

Comme nous le verrons à la section suivante, une machinerie algébrique classique permet d'exprimer les constantes c_Λ^n en fonction d'une famille d'entiers $(\chi_\lambda^\mu)_{\lambda,\mu\vdash n}$ appelés *évaluations des caractères du groupe symétrique*. Combiné avec une règle de calcul classique pour les χ_λ^μ, la règle de Murnaghan-Nakayama, ceci fournit un moyen de calculer les c_Λ. Cependant l'évaluation des caractères par la règle de Murnaghan-Nakayama nécessite en général un nombre exponentiel d'opérations. De plus la présence de sommations alternées ne permet pas de déterminer sans un calcul complet les cas de nullité. Par ailleurs le rôle fondamental du genre dans les formules ainsi obtenues n'est pas du tout mis en évidence. Ces raisons font que différents auteurs ont cherché à simplifier la formule obtenue, au prix d'une moins grande généralité.

Notre objectif est de traiter le cas des factorisations de n-cycles, en donnant une formule explicite qui met en jeu uniquement des sommations de termes positifs en nombre bien contrôlé et dans laquelle le rôle du genre est bien mis en évidence.

7.1.2 Le théorème principal, énoncé et discussion

Définition 7.6 *La famille de polynômes symétriques $(S_g(x_1,\dots,x_\ell))_{g\geqslant 0}$ est définie pour tout $\ell \geqslant 2$ par :*

$$S_g(x_1,\dots,x_\ell) = (\ell+2g-1)! \sum_{p_1+\dots+p_\ell=g} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2p_i+1}\binom{x_i-1}{2p_i}$$

Pour tout $g \geqslant 0$, $S_g(x_1,\dots,x_\ell)$ est de degré $2g$.

Le résultat suivant, obtenu en collaboration avec Alain Goupil, traite le cas des factorisations en deux permutations qui est particulièrement important puisqu'il correspond aux cartes à une face ou g-arbres.

Théorème 7.7 *Les factorisations de $\omega = (1,\dots,n)$ en deux permutations de type cyclique respectif $\lambda \vdash n$ et $\mu \vdash n$ sont dénombrées par la formule suivante :*

$$c^n_{[\lambda,\mu]} = \frac{n}{2^{2g}\prod_j \alpha_j!\prod_j \beta_j!} \sum_{g_1+g_2=g} S_{g_1}(\lambda)S_{g_2}(\mu).$$

où $g = \frac{1}{2}(n-1-\ell-m)$, $\lambda = 1^{\alpha_1}\dots n^{\alpha_n}$ et $\mu = 1^{\beta_1}\dots n^{\beta_n}$, $\ell(\lambda)=\ell$ et $\ell(\mu)=m$.

Dans le cas $g=0$, cette formule est due à F. Bédard et A. Goupil [6].

Définition 7.8 *Les fonctions symétriques élémentaires $(e_\lambda)_{\lambda\vdash n}$ sont définies par $e_\lambda = e_{\lambda_1}\cdots e_{\lambda_\ell}$ où $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$, $e_0 = 1$ et*

$$e_k = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_k} x_{j_1}\cdots x_{j_k}.$$

Le polynôme symétrique $e_\lambda(x_1,\dots,x_m,0,0,\dots)$ est noté $e_\lambda(x_1,\dots,x_m)$.

Notation 7.9 *L'application $x_i^k \mapsto (x_i)_k = x_i(x_i-1)\cdots(x_i-k+1)$ s'étend multiplicativement aux monômes en variables distinctes, puis linéairement aux polynômes. L'image d'un polynôme $p(x_1,\dots,x_m)$ par l'application obtenue est notée $\hat{p}(x_1,\dots,x_m)$.*

Exemple. Ainsi pour $\lambda = 1^2 3$,

$$\begin{aligned} e_{1^2 3}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 (x_1 x_2 x_3), \\ &= x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3 + 2x_1^2 x_2^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\hat{e}_{1^2 3}(x_1, x_2, x_3) = \\ &\quad x_1(x_1-1)(x_1-2)x_2 x_3 + x_1 x_2 (x_2-1)(x_2-2)x_3 + x_1 x_2 x_3 (x_3-1)(x_3-2) \\ &\quad +2x_1(x_1-1)x_2(x_2-1)x_3 + 2x_1(x_1-1)x_2 x_3(x_3-1) + 2x_1 x_2 (x_2-1) x_3 (x_3-1). \end{aligned}$$

$\diamond$

Notation 7.10 *Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ une partition de n alors $2\lambda + 1$ désigne la partition $(2\lambda_1 + 1, \ldots, 2\lambda_\ell + 1)$ de $2n + \ell$. La partition $2\lambda + 1$ ne contient ainsi que des parts impaires de longueur supérieure à 3.*

Exemple. Pour $\lambda = 1$, $2\lambda + 1 = 3$; pour $\lambda = 1^2 2 3^2 5$, $2\lambda + 1 = 3^2 5 7^2 11$. $\diamond$

Définition 7.11 *La famille de polynômes symétriques $(P_g(x_1, \ldots, x_m))_{g \geqslant 0}$ est définie pour tout m par*

$$P_0(x_1, \ldots, x_m) = 1$$

et pour $g \geq 1$,

$$P_g(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{\gamma \vdash g \\ \gamma = 1^{\alpha_1} \ldots g^{\alpha_g}}} \frac{\hat{e}_{2\gamma+1}(x_1, \ldots, x_m)}{\prod_k \alpha_k!},$$

Le polynôme $P_g(x_1, \ldots, x_m)$ est de degré $3g$ pour tous $m \geq 3$ et $g \geq 0$. Pour $m = 2$, il est nul sauf si $g = 0$.

Le résultat suivant, obtenu en collaboration avec Dominique Poulalhon, étend le théorème 7.7 au cas de m factorisations.

Théorème 7.12 *Les factorisations de $\omega = (1, \ldots, n)$ de distribution $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$, avec $\lambda_i \vdash n$, $\lambda_i = 1^{\alpha_{i,1}} \ldots n^{\alpha_{i,n}}$, $\ell(\lambda_i) = \ell_i$ et $r_i + \ell_i = n$ pour tout $i \in [1, m]$, sont dénombrées par la formule suivante :*

$$c_\Lambda^n = \frac{n^{m-1}}{2^{2g} \prod_{i,j} \alpha_{i,j}!} \sum_{g_0 + \cdots + g_m = g} P_{g_0}((r_i - 2g_i)_{i \in [1,m]}) \prod_{i=1}^m S_{g_i}(\lambda_i),$$

où $g = g(\Lambda; \omega) = \frac{1}{2}(1 - n + \sum_{i=1}^m r_i)$

Les premières valeurs de P_g et S_g sont :

$$\begin{aligned}
P_0(x_1,\ldots,x_m) &= 1,\\
P_1(x_1,\ldots,x_m) &= \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le m} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3},\\
P_2(x_1,\ldots,x_m) &= \hat{e}_5(x_1,\ldots,x_m) + \frac{\hat{e}_{3^2}(x_1,\ldots,x_m)}{2},\\
S_0 &= (\ell-1)!,\\
S_1 &= \frac{(\ell+1)!}{3}\sum_{p=1}^{\ell}\binom{x_p-1}{2},\\
S_2 &= (\ell+3)!\left[\frac{1}{5}\sum_{p=1}^{\ell}\binom{x_p-1}{4} + \frac{1}{9}\sum_{p<q}\binom{x_p-1}{2}\binom{x_q-1}{2}\right].
\end{aligned}$$

Pour $g=0$, nous retrouvons le résultat de Goulden et Jackson [72] pour les cactus, pour $g\geqslant 1$ le résultat est nouveau :

$$g=0 \quad : \quad n^{m-1}\prod_i \frac{(\ell_i-1)!}{\prod_j \alpha_{i,j}!},$$

$$g=1 \quad : \quad \frac{n^{m-1}}{4}\left(\prod_i \frac{(\ell_i-1)!}{\prod_j \alpha_{i,j}!}\right)\left[\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}(n-\ell_i)(n-\ell_j)(n-\ell_k) + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m}\ell_i(\ell_i+1)\sum_{p=1}^{\ell_i}\binom{\lambda_{i,p}-1}{2}\right].$$

Nous énonçons encore divers corollaires de notre théorème principal.

Corollaire 7.13 *Le nombre de factorisations de $\omega=(1,\ldots,n)$ en produit de $n-1+2g$ transpositions est le produit de n^{n-1+2g} par un polynôme de degré $3g$ en n :*

$$c^n_{T^{n-1+2g}} = \frac{n^{n-1+2g}}{2^{2g}}\sum_{\ell=0}^{g}\alpha_{g,\ell}\binom{n-1+2g}{2g+\ell},$$

où $\alpha_{g,\ell}$ est le nombre de partitions non ordonnées de l'ensemble $\{1,\ldots,2g+\ell\}$ en ℓ parties, chaque partie étant de cardinal impair et supérieur ou égal à 3. Ce nombre est donné par :

$$\alpha_{g,\ell} = \sum_{\substack{\lambda\vdash g,\ \ell(\lambda)=\ell,\\ \lambda=1^{\alpha_1}\ldots g^{\alpha_g}}} \frac{1}{\prod_k \alpha_k!}\binom{2g+\ell}{2\lambda_1+1,\ldots,2\lambda_\ell+1}.$$

En particulier ce résultat généralise le cas des factorisations du grand cycle $(1,\ldots,n)$ en produit de $n-1$ transpositions (*i.e.* pour $g=0$). Les nombres $c^n_{T^{n-1+2g}}$ ont été obtenus par I.P. Goulden [69] sous forme sommations alternées de n termes. Au contraire notre sommation porte sur des termes positifs, en nombre[1] ne dépendant que de g. Voici les premières valeurs :

$$\begin{aligned}
g=0 &\quad : \quad n^{n-1},\\
g=1 &\quad : \quad \frac{n^{n+1}}{4}\binom{n+1}{3},\\
g=2 &\quad : \quad \frac{n^{n+3}}{16}\left[\binom{n+3}{5} + 10\binom{n+3}{6}\right].
\end{aligned}$$

[1]le nombre de termes est exponentiel en g si on utilise l'expression explicite des coefficients $\alpha_{g,\ell}$ cependant il est plus efficace d'utiliser la formule des caractères pour calculer les g premières valeurs (avec n petit cette formule est effective). Il suffit alors de résoudre un système d'équations linéaires d'ordre g pour obtenir les g coefficients $c_{g,\ell}$.

Pour n tendant vers l'infini à genre fixé, on obtient :

Corollaire 7.14 *Le nombre de factorisations de $\omega = (1, \dots, n)$ en produit de $n-1+2g$ transpositions est équivalent, lorsque n tend vers l'infini à g fixé, à :*

$$\frac{n^{n-1+2g}}{2^{2g}} c_{g,g} \binom{n-1+2g}{3g} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1+5g}}{g!\, 24^g}.$$

Nous donnons encore des conséquences de notre résultat pour les nombres de g-arbres (cartes à une face de genre g) à la section 7.5. Ces résultats sont des formules explicites, qui complètent les récurrences obtenues par N. Adrianov [1] et les expressions qui se déduisent de travaux de D.M. Jackson et Visentin [97] (sous forme de coefficients à extraire d'une série donnée par une sommation alternée). Nos résultats étendent ceux de Walsh et Lehman [150] qui eux-même permettent de retrouver ceux de D.M. Jackson [90], de J. Harer et D. Zagier [86] ou de D. Zagier [154]. Par exemple on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 7.15 *Soit g un entier positif fixé. Alors quand n tend vers l'infini, le nombre de g-arbres bipartis à n arêtes est équivalent à*

$$\frac{n^{3(g-\frac{1}{2})}4^n}{\sqrt{\pi} g! 48^g}.$$

D'autres corollaires peuvent être obtenus directement à l'aide d'une expression combinatoire développée durant la preuve :

Théorème 7.16 *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 7.12,*

$$c_\Lambda^n = \frac{n^{m-1}}{2^{2g} z_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_m}} \sum_{\mathcal{G}} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})},$$

où la somme porte sur une famille de graphes qui dépendent de Λ et où $\mathrm{cyc}(\mathcal{G})$ désigne le nombre cyclomatique du graphe $\mathcal{G}$.

À la section 7.4, nous montrons que ce théorème permet de retrouver et d'étendre différents résultats sur les factorisations de permutations en produit de cycles maximaux, donnés dans E.A. Bertram et V.K Wei [22], G. Boccara [24], G. Jones [83], D.W. Walkup [149] ou R.P. Stanley [130].

7.2 Factorisations et caractères

La théorie générale des représentations des groupes offre des outils d'une puissance surprenante pour le problème qui nous intéresse. Nous utiliserons la règle de Murnaghan-Nakayama (Proposition 7.23) et la formule de Frobenius (Proposition 7.20). Ces deux résultats sont classiques et nous n'en donnons pas de preuve. La règle de Murnaghan-Nakayama pour l'évaluation des caractères du groupe symétrique est démontrée par exemple dans le livre de B. Sagan [125] ou encore dans le premier chapitre de celui de I. Macdonald [110], et quelques relectures détaillées de ces deux références me semblent incontournables avant de tenter de donner une présentation raisonnée de ce résultat. Quant à la formule de Frobenius pour les groupes finis, s'il est relativement aisé de comprendre qu'elle repose sur le fait que les caractères irréductibles d'un groupe fini forment une base d'idempotents orthogonaux du centre de l'algèbre de ce groupe (en effet sous cette phrase terriblement pompeuse et impressionnante se cachent des notions assez simples), la preuve complète de ce dernier résultat reste encore pour moi délicate. Elle est donnée dans le livre de Curtis et Reiner [44] ou dans celui de J.-P. Serre [129, p.68], (mais pas dans [128] pourtant référence classique sur les représentations des groupes). Nous admettons ici ces deux résultats.

Définition 7.17 *Une* fonction de classe *ϕ d'un groupe fini G est une application du groupe G dans $\mathbb{C}$ tel que ϕ soit constant sur les classes de conjugaison de G. L'addition dans $\mathbb{C}$ permet de munir immédiatement l'ensemble des fonctions de classe d'une structure d'espace vectoriel.*

Proposition 7.18 *Il existe une famille $\mathcal{X}$ de fonctions de classe, les* caractères irréductibles *du groupe G vérifiant :*

- *Les caractères irréductibles sont indexés par les classes de conjugaison du groupe G.*
- *La famille $\mathcal{X}$ forme une base de l'espace des fonctions de classe.*
- *Les caractères irréductibles satisfont à des relations d'orthogonalité.*

En particulier, dans le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, les caractères sont indexés par des partitions de n. De plus, dans ce cas, les évaluations des caractères irréductibles sont des entiers relatifs.

Notation 7.19 *L'évaluation du caractère irréductible de $\mathfrak{S}_n$ indexé par la classe de conjugaison C_λ pour λ une partition de n sur la classe indexée par la partition μ de n est notée χ^λ_μ.*

La première propriété importante des caractères irréductibles que nous admettrons et utiliserons est la formule de Frobenius (cf. [129, p.68]) :

Proposition 7.20 (Formule de Frobenius.) *Soit G un groupe fini et $C_1, \dots, C_m$ des classes de conjugaison de G. Alors le nombre de solutions de l'équation $x_1 \dots x_m = 1$ dans G avec $x_i \in C_i$ pour tout i est*

$$\frac{|C_1| \cdots |C_m|}{|G|} \sum_{\chi} \frac{\chi(C_1) \cdots \chi(C_m)}{(\chi(1))^{m-2}},$$

où la somme porte sur l'ensemble des caractères irréductibles du groupe G.

Nous appliquons immédiatement ce résultat au cas du groupe symétrique :

Proposition 7.21 *Soit $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ une distribution de poids n et μ une partition de n. Alors,*

$$c^\mu_\Lambda = \frac{(n!)^{m-1}}{z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_m}} \sum_{\nu \vdash n} \frac{\chi^\nu_{\lambda_1} \cdots \chi^\nu_{\lambda_m}}{(\chi^\nu_{1^n})^{m-1}} \chi^\nu_\mu.$$

Démonstration. Remarquons que $c^\mu_\Lambda = c_{[\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu]}/|C_\mu|$, que $|C_\lambda| = n!/z_\lambda$ et que $|\mathfrak{S}_n| = n!$. □

Ce résultat est important car il ramène le calcul des constantes c_Λ au calcul d'évaluations de caractères irréductibles. Ce calcul n'est pas aisé et nous utiliserons pour le faire la règle dite de Murnaghan-Nakayama (voir section 7.3.1).

7.3 Preuve du théorème principal

Afin de faciliter la lecture de la preuve nous en donnons ici un rapide aperçu : l'idée générale est de transformer l'expression donnée en fonction des caractères (proposition 7.21) en l'expression du théorème 7.12 à l'aide de différentes interprétations combinatoires d'une partie de la formule.

Chacun des points suivants correspond à une section de la preuve et en fournit un résumé :

1. Nous donnons la règle de Murnagahan-Nakayama pour l'évaluation des caractères du groupe symétrique sous sa forme combinatoire et nous en déduisons une interprétation de certaines évaluations particulières en termes de *diagrammes presque bicolores* (Définition 7.26 et Proposition 7.29).
2. Grâce à un lemme de mélange nous donnons une seconde interprétation des évaluations de caractères en termes cette fois de *diagrammes bicolores* (Proposition 7.31).
3. À l'aide de l'interprétation des évaluations de caractères, nous développons la formule de Frobenius comme sommation des poids de *graphes étoilés coloriés* (Définition 7.34 et Proposition 7.37).
4. Nous montrons que les colorations d'un graphe étoilé dépendent essentiellement de ses composantes connexes. Nous évaluons la somme alternée des contributions de toutes les colorations d'un même graphe à l'aide d'une involution changeant leur signe. Les contributions restantes sont exprimées en fonction des nombres cyclomatiques des graphes intervenants (Théorème 7.43).
5. Nous donnons une nouvelle interprétation de la contribution d'un graphe en introduisant les d'*orientations paires et impaires* (Théorème 7.46).
6. En appliquant le théorème 7.46 aux graphes pondérés du théorème 7.43 nous ramenons le problème au calcul du cardinal d'un ensemble de graphes orientés (Proposition 7.50) que nous évaluons enfin pour obtenir le résultat final.

Comme cette preuve s'appuie au départ sur les caractères, elle n'est pas constructive. Cependant le recours aux interprétations combinatoires y reste fondamental.

7.3.1 Factorisations du grand cycle, sommation alternée

L'évaluation des caractères du groupe symétrique n'est pas toujours aisée. Nous utilisons pour ce faire la règle de Murnaghan-Nakayama. Afin d'énoncer cette règle sous une forme combinatoire, il est nécessaire d'introduire les tableaux de rubans.

Définition 7.22 *Soit λ et μ deux partitions de n avec $\mu = (\mu_1, \dots \mu_k)$. Un* tableau de rubans *de type (λ, μ) est un remplissage des cases du diagramme de Ferrers λ par des entiers positifs tel que :*

- *Il y a décroissance large dans les lignes et les colonnes.*
- *Le nombre de cases portant la valeur i est μ_i.*
- *Pour tout i, l'ensemble des cases portant la valeur i forme un ruban, i.e. ces cases peuvent être parcourues en une seule fois en partant de la plus en bas à droite et en employant uniquement des pas Nord (N) et Ouest (O).*

La hauteur $h(w)$ d'un ruban w est le nombre de ses pas N. Le poids $p(T)$ d'un tableau de rubans T de type (λ, μ) est la somme des hauteurs des rubans de T :

$$p(T) = \sum_{k=1}^{\ell(\mu)} h(w_k).$$

Exemple. Un tableau de rubans de type $((6,5,4,4),(7,4,4,2,2))$ et les rubans associés

$$\begin{array}{|c|c|c|c|cc} \hline 4 & 2 & 1 & 1 \\ \cline{1-4} 4 & 2 & 2 & 1 \\ \cline{1-5} 5 & 3 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline 5 & 3 & 3 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} w_1 & = & ONONNO & h(w_1) = 3, \\ w_2 & = & NON & h(w_2) = 2, \\ w_3 & = & OON & h(w_3) = 1, \\ w_4 & = & N & h(w_4) = 1, \\ w_5 & = & N & h(w_5) = 1. \end{array}$$

Le poids du tableau T est donc $p(T) = 8$. ◇

Avec ces notations nous pouvons énoncer la règle suivante que nous admettons :

Proposition 7.23 (Règle de Murnaghan-Nakayama.) *Soit λ et μ deux partitions de n. Alors,*

$$\chi^\lambda_\mu = \sum_T (-1)^{p(T)},$$

où la somme porte sur tous les tableaux de rubans de type (λ, μ).

Exemple. Considérons le type $((3,3),(3,1,1,1))$: les trois tableaux de rubans de ce type sont

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \; , \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

de poids respectif 1, -1 et -1, de sorte que $\chi^{(3,3)}_{(3,1,1,1)} = -1$. ◇

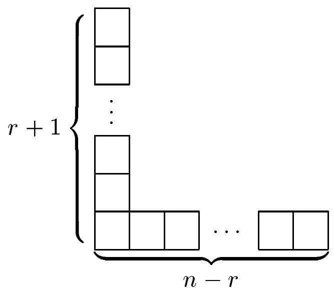
Nous donnons quelques évaluations particulières, qui nous seront utiles dans la suite pour simplifier la formule de Frobenius (Proposition 7.21) dans le cas où μ est un grand cycle.

Proposition 7.24 *L'évaluation d'un caractère sur la classe des grands cycles est :*

$$\chi^\nu_n = \begin{cases} (-1)^r & si\ \nu = 1^r(n-r), \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Le diagramme $\mu = n$ ne possède qu'une part. Les tableaux de rubans de type (ν, n) contiennent donc un unique ruban, ce qui n'est possible que si ν est une équerre. □

Considérons les évaluations des caractères indexés par des diagrammes en équerre, de la forme $1^r(n-r)$:



Proposition 7.25 *Soit $r \in [0, n-1]$. Alors*

$$\chi_{1^n}^{1^r(n-r)} = \binom{n-1}{r}.$$

Démonstration. Les rubans sont ici de simples cases. La case étiquetée n est nécessairement dans un coin et la construction d'un tableau se ramène à la répartition des autres cases entre la partie verticale et la partie horizontale de l'équerre. $\square$

A partir de l'interprétation en terme de tableaux de rubans, nous allons donner une nouvelle interprétation des évaluations quelconques de caractères indexés par des équerres. Pour cela nous introduisons les objets combinatoires suivants :

Définition 7.26 *Un* diagramme bicolore *de forme λ est un diagramme dont les lignes sont coloriées en rouge ou en vert. Plus précisément, les cases contiennent le symbole R (cases rouges), V (cases vertes) de sorte que chaque ligne ne comporte qu'une seule sorte de symbole.*

Un diagramme est seulement presque bicolore*, si ses cases contiennent un symbole R, V ou $\bullet$, de sorte que :*

- *toutes les lignes sauf la dernière ne contiennent que des R ou que des V.*
- *la dernière ligne λ_ℓ est de la forme :* $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline R & R & \cdots & R & \bullet & V & \cdots & V & V \\ \hline\end{array}$.

Notation 7.27 *Soit $\widehat{\lambda}$ un diagramme presque bicolore de forme λ. Son nombre de cases rouges est noté $|\widehat{\lambda}|_R$ et son nombre de lignes entièrement rouges $\ell_R(\widehat{\lambda})$.*

Dans un premier temps nous n'utilisons que les diagrammes presque bicolores. Dans un tel diagramme, comme la dernière part contient toujours le symbole $\bullet$, le nombre total de cases coloriées est $n-1$ et le nombre total de lignes rouges et vertes est $\ell - 1$:

$$\begin{aligned} |\widehat{\lambda}|_R + |\widehat{\lambda}|_V &= |\lambda| - 1, \\ \ell_R(\widehat{\lambda}) + \ell_V(\widehat{\lambda}) &= \ell - 1. \end{aligned}$$

Proposition 7.28 *Soit $r \in [0, n-1]$ et $\lambda \vdash n$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$. Alors les tableaux de rubans de type $(1^r(n-r), \lambda)$ sont en bijection avec les diagrammes presque bicolores de forme λ à r cases rouges.*

Démonstration. Les parts vertes sont les parts qui remplissent la partie horizontale de l'équerre, tandis que les parts rouges remplissent la partie verticale. Dans la dernière part, le symbole $\bullet$ marque la position du coin, les cases à droite du $\bullet$ (en vert) correspondent à la partie horizontale et celles à gauche (en rouge) à la partie verticale de cette part. La seule condition pour qu'un tel diagramme colorié corresponde à un tableau de rubans de forme $1^r(n-r)$ est que le nombre de cases rouges soit r. $\square$

Exemple. Un tableau de rubans T et le diagramme presque bicolore associé $\hat{\lambda}$:

$$T = \begin{array}{|c|cccccccccccc}
\hline
3 \\ \cline{1-1}
3 \\ \cline{1-1}
3 \\ \cline{1-1}
3 \\ \cline{1-1}
4 \\ \cline{1-1}
4 \\ \hline
4 & \multicolumn{1}{|c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline
\end{array} \quad , \qquad \hat{\lambda} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|}
\cline{2-5}
\lambda_4 & R & R & \bullet & V \\ \cline{2-5}
\lambda_3 & R & R & R & R \\ \cline{2-6}
\lambda_2 & V & V & V & V & V \\ \cline{2-7}
\lambda_1 & V & V & V & V & V & V \\ \cline{2-7}
\end{array} \, .$$

◇

De la proposition 7.28 découle immédiatement une expression de $\chi_\lambda^{1^r(n-r)}$:

Proposition 7.29 *Soit $r \in [0, n-1]$ et $\lambda \vdash n$ avec $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$. Alors*

$$\chi_\lambda^{1^r(n-r)} = \sum_{\widehat{\lambda}} (-1)^{r-\ell_R(\widehat{\lambda})},$$

où la somme porte sur les bicolorations à r cases rouges du diagramme λ.

Démonstration. Il suffit de voir que les signes sont bien respectés dans la sommation. Or le poids d'un tableau de rubans est donné par la somme des hauteurs des rubans. Dans une équerre, seuls les rubans de la partie verticale contribuent et leur hauteur est leur nombre de cases moins un. Donc le poids total est le nombre de cases dans la partie verticale moins le nombre de rubans de cette partie soit $r - \ell_R(\widehat{\lambda})$. □

Il serait donc possible d'utiliser ce résultat avec le lemme de Frobenius pour obtenir une expression de c_Λ^n. Ceci ne sera cependant fait qu'au paragraphe 7.3.3 : en effet il est plus commode de commencer par transformer les diagrammes presque bicolores en diagrammes bicolores, ce qui nous occupera durant la prochaine section.

7.3.2 Redressement de diagrammes

Afin d'éliminer la spécificité de la dernière ligne dans les diagrammes presque bicolores, nous allons *redresser* cette ligne.

Définition 7.30 *A toute partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, on associe λ_ℓ partitions, les* redressées *de λ, que l'on note :*

$$\lambda^0 \quad = \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell-1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\lambda_\ell - 1 \text{ fois}}),$$

et pour tout entier $1 \leqslant k < \lambda_\ell$,

$$\lambda^k \quad = \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell-1}, k, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\lambda_\ell - 1 - k \text{ fois}}).$$

Remarquons que si $\lambda_\ell > 1$, $\lambda^0 = \lambda^1$ mais ces deux partitions sont considérées comme deux redressées distinctes de λ. La dernière part d'un diagramme λ^k a été transformée en une équerre *dont la partie horizontale est une ligne de k cases et la partie verticale comporte $\lambda_\ell - k - 1$ lignes de longueur 1.*

On note encore λ^* la partition $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell-1})$. En particulier si $\lambda_\ell = 1$, $\lambda^0 = \lambda^*$.

Avec ces notations nous allons montrer que la proposition 7.29 se réécrit en :

Proposition 7.31 *Soit $r \in [0, n-1]$ et $\lambda \vdash n$ avec $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$. Alors*

$$\chi_\lambda^{1^r(n-r)} = \sum_{k=0}^{\lambda_\ell - 1} 2^{\ell - \ell(\lambda^k) - 1} \sum_{\widehat{\lambda}^k} (-1)^{r - \ell_R(\widehat{\lambda}^*)},$$

la somme interne portant sur les diagrammes bicolores de forme λ^k à r cases rouges.

Notation 7.32 *L'ensemble des mots de longueur p sur $\{R, V\}$ est noté $\{R, V\}^p$ et l'ensemble des mots sur $\{R, V\}$ de longueur $p+q$ contenant p lettres R et q lettres V est noté $\mathfrak{S}(R^pV^q)$, de sorte que $|\{R, V\}^p| = 2^p$ alors que $|\mathfrak{S}(R^pV^q)| = \binom{p+q}{p}$. Enfin $R\{R, V\}^p$ désigne les mots de la forme Ru avec u dans $\{R, V\}^p$.*

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 7.33 (Lemme de mélange) *Soit p et q deux entiers positifs et*

$$\varphi \colon \{R, V\}^{p+q+1} \to \{R, V\}^* \times \{R, V\}^*$$

l'application $u \mapsto (v, w)$ telle que v est le facteur gauche de u de longueur maximale vérifiant

- *$vw = u$,*
- *$|v|_R \leqslant p$ et $|v|_V \leqslant q$.*

Alors φ définit une bijection :

$$\{R, V\}^{p+q+1} \simeq \bigcup_{i=1}^{p} \left(\mathfrak{S}(R^iV^q) \times V\{R, V\}^{p-i}\right) \cup \bigcup_{j=1}^{q} \left(\mathfrak{S}(R^pV^j) \times R\{R, V\}^{q-j}\right).$$

Exemple. Soit $p = 5$, $q = 4$, alors $\varphi(VVRVRVVVRV) = (VVRVRV, VVRV)$, puisque pour allonger le facteur gauche il faudrait lui ajouter un V alors qu'il en contient déjà $q = 4$. De même, $\varphi(RRRVRVVRVV) = (RRRVRVVRV, V)$. ◇

Démonstration de la proposition. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$. D'après la proposition 7.29,

$$\chi_\lambda^{1^r(n-r)} = \sum_{\widehat{\lambda}} (-1)^{r - \ell_R(\widehat{\lambda})},$$

où la sommation porte sur les diagrammes presque bicolores de forme λ ayant r cases rouges. Réécrivons cette sommation en introduisant une sommation sur les mots de $\{R, V\}^{\lambda_\ell}$ que l'on divise par le nombre de tels mots :

$$\chi_\lambda^{1^r(n-r)} = 2^{-\lambda_\ell} \sum_{\substack{\widehat{\lambda} \\ u \in \{R, V\}^{\lambda_\ell}}} (-1)^{r - \ell_R(\widehat{\lambda})},$$

Soit $\widehat{\lambda}$ et u comme dans la sommation. Par définition, la dernière ligne de $\widehat{\lambda}$ est de la forme $R^p \bullet V^q$ avec $p + q + 1 = \lambda_\ell$. Soit $(v, w) = \phi(u)$ l'image de u par le lemme de mélange pour p et q ainsi définis. Posons $k = |w| - 1$ et définissons une coloration du diagramme redressé λ^k :

– La coloration des lignes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell-1}$ de λ induit une bonne coloration de ces même lignes dans λ^k.

– La couleur de la partie horizontale de l'équerre, quand elle existe (*i.e.* si $k \neq 0$), est l'opposé de la couleur de la première lettre de w.

– Le mot v, écrit de bas en haut dans les cases de la partie verticale de l'équerre de λ^k, définit une coloration des lignes de longueur 1 de cette partie (attention, dans λ^1, la partie horizontale de l'équerre est de longueur 1 mais elle est traitée par l'alinéa précédent).

Afin d'avoir une bijection il faut conserver trace de w privé de sa première lettre lorsque $k \neq 0$ ou w si $k = 0$ (mot que l'on note par la suite w'). L'application $\widehat{\lambda} \to (k, \widehat{\lambda}^k, w')$ définit une bijection des colorations presque bonnes de λ sur les triplets formés d'un entier $k \in [0, \lambda_\ell - 1]$, d'une bonne coloration de λ^k et d'un mot de $\{R, V\}^{k+\delta_{k,0}}$ (où $\delta_{k,0}$ désigne le symbole de Kroneker). Le nombre total de cases rouges est conservé, mais pas le nombre de lignes rouges, aussi faut-il prendre soin dans l'expression du poids d'utiliser $\ell_R(\widehat{\lambda}^*)$ et non $\ell_R(\widehat{\lambda}^k)$. On en déduit que

$$\chi_\lambda^{1^r(n-r)} = \sum_{k=0}^{\lambda_\ell - 1} 2^{-\lambda_\ell + k + \delta_{k,0}} \sum_{\widehat{\lambda}^k} (-1)^{r - \ell_R(\widehat{\lambda}^*)},$$

où la sommation interne porte sur les diagrammes bicolores de forme λ^k ayant r cases rouges. Le résultat suit en remarquant que $1 + \ell(\lambda^k) - \ell = \lambda_\ell - k - \delta_{k,0}$. □

Exemple. Prenons $\lambda = (6, 5, 4)$ muni d'une coloration $\hat{\lambda}$ et $u = VVRV$:

$$\hat{\lambda} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline R & \bullet & V & V \\ \cline{1-4} V & V & V & V & V \\ \cline{1-5} R & R & R & R & R & R \\ \hline \end{array}$$

La coloration de la dernière ligne $R \bullet VV$ donne $p = 1$ et $q = 2$. Le lemme de mélange appliqué à $u = VVRV$ donne alors $\phi(u) = (VVR,\ V)$ de sorte que $k = 0$ et $w' = V$. Le diagramme redressé obtenu est de forme λ^0, la coloration de l'équerre est donnée par $v = VVR$ pour la partie verticale, la partie horizontale n'existe pas puisque $k = 0$:

$$\hat{\lambda}^0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline R \\ \cline{1-1} V \\ \cline{1-1} V \\ \cline{1-1} V & V & V & V & V \\ \cline{1-5} R & R & R & R & R & R \\ \hline \end{array}$$

Prenons maintenant $\lambda = (5, 5, 5)$ muni d'une coloration $\hat{\lambda}$ et $u = RRRVR$:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline R & R & \bullet & V & V \\ \hline R & R & R & R & R \\ \hline V & V & V & V & V \\ \hline \end{array}$$

La coloration de la dernière ligne $RR \bullet VV$ donne cette fois $p = 2$ et $q = 2$. Le lemme de mélange donne alors $\phi(u) = (RR,\ RVR)$ de sorte que $k = 2$ et $w' = VR$. Le diagramme redressé obtenu est de forme λ^2, la coloration de l'équerre est donnée par $v = RR$ pour la partie verticale et par V pour la partie horizontale :

$$\hat{\lambda}^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\cline{1-1} R \\ \cline{1-1} R \\ \cline{1-2} V & V \\ \hline R & R & R & R & R \\ \hline V & V & V & V & V \\ \hline \end{array}$$

$\diamond$

7.3.3 Graphes étoilés associés à une famille de partitions

Nous allons utiliser maintenant le résultat de la proposition 7.31 pour expliciter la formule de Frobenius :

$$c_\Lambda^n = \frac{n^{m-1}}{z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_m}} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r [r!(n-1-r)!]^{m-1} \chi_{\lambda_1}^{1^r(n-r)} \cdots \chi_{\lambda_m}^{1^r(n-r)}.$$

Dans cette formule, chaque évaluation d'un caractère fait intervenir une sommation sur des diagrammes bicolores à r cases rouges et $n-1-r$ cases vertes. En développant ces sommations, nous obtenons des configurations formées de m diagrammes bicolores, portant les mêmes nombres r et $n-1-r$ de cases rouges et vertes :

$$\frac{n^{m-1}}{z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_m}} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m \\ 0\leqslant k_i<\lambda_{i,\ell_i}}} \sum_{\hat{\Lambda}^k} \left(\prod_{i=1}^{m} 2^{\ell_i-\ell(\lambda_i^{k_i})-1} (-1)^{r-\ell_R(\hat{\lambda}_i^*)} \right) (-1)^r [r!(n-1-r)!]^{m-1} \tag{1}$$

où la sommation interne porte sur les bicolorations à r cases rouges $\hat{\Lambda}$ des diagrammes $\lambda_1^{k_1}, \dots,$ $\lambda_m^{k_m}$ redressés respectifs des diagrammes de $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$.

Définition 7.34 *Soit $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ une distribution de poids n , avec $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,\ell_i})$ pour tout $i \in [1, m]$.*

Un graphe étoilé *de type Λ est un graphe biparti $\mathcal{G}$ dont les sommets sont soit de type* étoile *soit de type* ligne *et tel que :*

- *Les sommets lignes de $\mathcal{G}$ sont associés aux lignes des diagrammes de Λ : le graphe $\mathcal{G}$ possède $\sum_{i=1}^m \ell_i$ sommets lignes.*
- *Les arêtes sont associées aux cases des diagrammes.*
- *Il y a n sommets étoiles.*
- *Chaque sommet ligne est de degré $\lambda_{i,j}$.*
- *Les étoiles sont toutes de degré m et sont reliées exactement une fois à chaque diagramme.*

Un graphe étoilé est colorié *si ses sommets lignes sont coloriés en rouge ou en vert de sorte que toute étoile est adjacente à des sommets d'une seule couleur. Un graphe étoilé colorié est de type $\widehat{\Lambda}$ si les couleurs des sommets lignes sont données par les couleurs des lignes de $\widehat{\Lambda}$. Notons* $\mathrm{Gr}(\Lambda)$ *l'ensemble des graphes étoilés de type Λ et $\widehat{\mathrm{Gr}}(\Lambda)$ la réunion des ensembles de graphes étoilés coloriés de type $\widehat{\Lambda}$ pour toute bonne coloration $\widehat{\Lambda}$ de Λ.*

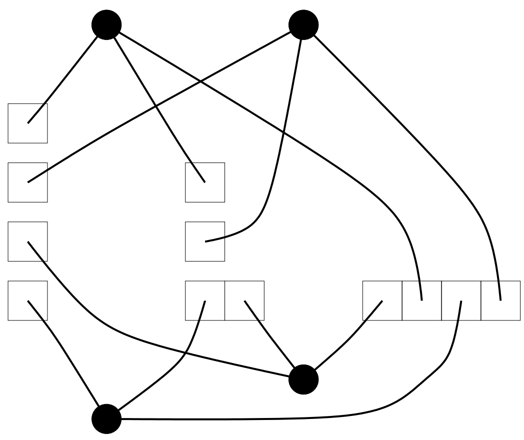


FIG. 7.1: Un graphe étoilé de distribution $\Lambda = [1^4, 1^2 2, 4]$.

Remarque 7.35 *Chaque étoile étant incidente une fois à chaque diagramme et à des cases d'une seule couleur, les colorations d'un graphe étoilé ont toujours le même nombre de cases rouges dans chaque diagramme.*

La figure 7.1 montre un graphe étoilé.

Proposition 7.36 *Soit $\Lambda^k = [\lambda_1^{k_1}, \ldots, \lambda_m^{k_m}]$ une distribution redressée issue d'une distribution Λ de poids n et $\widehat{\Lambda}^k$ une bonne coloration de Λ^k avec r cases rouges dans chaque diagramme. Alors le nombre de graphes étoilés coloriés de type $\widehat{\Lambda}^k$ est $[r!(n-1-r)!]^{m-1}$.*

Démonstration. En effet pour construire un graphe étoilé colorié du type voulu, il faut attacher une étoile à chaque case rouge de $\widehat{\lambda}_1^{k_1}$ puis relier ces r étoiles aux r cases rouges de chacun des $m-1$ autres diagrammes, ce qui peut se faire de $(r!)^{m-1}$ façons. Il en va de même pour les cases vertes. $\square$

Cette proposition nous permet d'interpréter le facteur $[r!(n-1-r)!]^{m-1}$ dans la sommation (1) en termes de graphe étoilé colorié de type $\widehat{\Lambda}^k$. La sommation sur r fait apparaître toutes les colorations possibles et nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 7.37 *Soit Λ une distribution de poids n et $g = g(\Lambda; \omega)$. Alors*

$$c_\Lambda^n = \frac{n^{m-1}}{z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_m} 2^{2g}} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \\ 0 \leqslant k_i < \lambda_{i,\ell_i}}} \sum_{\mathcal{G} \in \widehat{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) - c(\mathcal{G})} (-1)^{(m-1)r(\mathcal{G}) - \sum_i \ell_R(\widehat{\lambda}_i^*)}, \qquad (2)$$

où $\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) = a(\mathcal{G}) - s(\mathcal{G}) + c(\mathcal{G})$ désigne le nombre cyclomatique de $\mathcal{G}$, $a(\mathcal{G})$ son nombre d'arêtes, $s(\mathcal{G})$ son nombre de sommets, $c(\mathcal{G})$ son nombre de composantes connexes et $r(\mathcal{G})$ son nombre d'étoiles rouges.

Démonstration. En utilisant le modèle combinatoire des caractères dans la formule (1), et en interprétant le facteur $[r!(n-1-r)!]^{m-1}$ en terme de graphes, il vient la sommation annoncée à condition de montrer que

$$\prod_{i=1}^{m} 2^{\ell_i-\ell(\lambda_i^{k_i})-1} = 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-c(\mathcal{G})-2g}.$$

Par définition de g, avec $r_i+\ell_i=n$, on obtient $\sum_{i=1}^m(\ell_i-1)=(m-1)n+1-2g-m$. Le nombre de sommets lignes de $\mathcal{G}$ est $\sum_{i=1}^m \ell(\lambda_i^{k_i})$, le nombre d'étoiles est $n-1$ et le nombre d'arêtes est $m(n-1)$, de sorte que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \ell_i-\ell(\lambda_i^{k_i})-1 &= ((m-1)n+1-2g-m)-\sum_{i=1}^m \ell(\lambda_i^{k_i}),\\ &= m(n-1)-\left(n-1+\sum_{i=1}^m \ell(\lambda_i^{k_i})\right)-2g,\\ &= a(\mathcal{G})-s(\mathcal{G})-2g=\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-c(\mathcal{G})-2g,\end{aligned}$$

par définition du nombre cyclomatique du graphe $\mathcal{G}$. □

7.3.4 Composantes connexes, involutions et nombres cyclomatiques

Notation 7.38 *Soit $\mathcal{G}$ un graphe étoilé. Décomposons $\mathcal{G}$ en composantes connexes : $\mathcal{G}=\mathcal{G}^{(1)}+\cdots+\mathcal{G}^{(c(\mathcal{G}))}$. Cette décomposition induit une décomposition des partitions du type de $\mathcal{G}$: pour tout $i\in[1,m]$, $\lambda_i^{k_i}=\lambda_i^{k_i(1)}+\cdots+\lambda_i^{k_i(c(\mathcal{G}))}$.*

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 7.39 *Soit $\mathcal{G}$ un graphe étoilé. Si $\mathcal{G}$ est colorié alors tous les sommets lignes d'une même composante de $\mathcal{G}$ sont de la même couleur. Inversement, tout choix de couleurs des composantes donne un graphe étoilé colorié.*

Les graphes étoilés coloriés sont donc en bijection avec les couples formés d'un graphe étoilé et d'un sous-ensemble de ses composantes (les rouges).

Notation 7.40 *À chaque composante connexe est associé le paramètre*

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathcal{G}^{(k)}) &= (m-1)|\mathcal{G}^{(k)}|-\sum_{i=1}^m \ell(\lambda_i^{*(k)}),\\ &= \mathrm{cyc}(\mathcal{G}^{(k)})-1+e(\mathcal{G}^{(k)}),\end{aligned}$$

où $|\mathcal{G}^{(k)}|$ désigne le nombre d'étoiles de la composante et $e(\mathcal{G}^{(k)})$ le nombre de ses sommets lignes qui appartiennent à une équerre redressée.

Avec cette notation et d'après la proposition 7.39, la somme interne de la sommation (2) s'écrit :

$$\sum_{\widehat{\mathcal{G}}\in\widehat{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-c(\mathcal{G})}(-1)^{(m-1)|\widehat{\lambda}_1^{k_1}|_R-\sum_i \ell_R(\widehat{\lambda}_i^*)} = \sum_{\mathcal{G}\in\mathrm{Gr}(\Lambda^k)} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-c(\mathcal{G})}\sum_{I\subset[1,c(\mathcal{G})]}(-1)^{\sum_{c\in I}\varepsilon(\mathcal{G}^{(c)})}. \tag{3}$$

Nous calculons cette sommation alternée à l'aide d'une involution changeant les signes :

Lemme 7.41 *Soit* $\mathcal{G} \in \mathrm{Gr}(\Lambda^\ell)$*, alors*

$$\sum_{I \subset [1, c(\mathcal{G})]} (-1)^{\sum_{c \in I} \varepsilon(\mathcal{G}^{(c)})} = \begin{cases} 0 & si\ \exists c \mid \varepsilon(\mathcal{G}^{(c)}) \equiv 1 \mod 2, \\ 2^{c(\mathcal{G})} & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{G} \in \mathrm{Gr}(\lambda^\ell)$. Si pour tout $c \in [1, c(\mathcal{G})]$, $\varepsilon(\mathcal{G}^{(c)})$ est pair, toutes les contributions sont positives et le nombre de termes de la somme est $2^{c(\mathcal{G})}$.

Sinon, soit c_0 le plus petit indice tel que $\varepsilon(\mathcal{G}^{(c_0)}) \equiv 1 \mod 2$. Considérons l'involution ϑ sur les parties de $[1, c(\mathcal{G})]$ définie par :

$$\vartheta(I) = \begin{cases} I \setminus \{c_0\} & \text{si } c_0 \in I, \\ I \cup \{c_0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'involution ϑ est une involution sans point fixe et $(-1)^{\sum_{c \in \vartheta(I)} \varepsilon(\mathcal{G}^{(c)})} = -(-1)^{\sum_{c \in I} \varepsilon(\mathcal{G}^{(c)})}$, de sorte que les contributions s'annulent deux à deux. □

Définition 7.42 *Un graphe* $\mathcal{G}$ *est* totalement pair *si* $\varepsilon(\mathcal{G}^{(c)})$ *est pair pour toutes ses composantes.*

Le poids d'un graphe $\mathcal{G}$ totalement pair dans la sommation (3) est donc $2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) - c(\mathcal{G}) + c(\mathcal{G})}$, c'est-à-dire $2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})}$, d'où le théorème :

Théorème 7.43 *Soit* Λ *une distribution de poids* n *et* $g = g(\Lambda; n)$*, alors*

$$c_\Lambda^n = \frac{n^{m-1}}{z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_m} 2^{2g}} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \\ 0 \leqslant k_i < \lambda_{i, \ell_i}}} \sum_{\mathcal{G} \in \mathrm{Gr}(\Lambda^k)} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})},$$

la sommation portant sur les graphes étoilés de type Λ^k *totalement pairs.*

Nous donnerons des applications directes de ce théorème à la section 7.4.

7.3.5 Orientations paires et impaires d'un graphe

Étant donné un graphe $\mathcal{G}$ et une fonction $\phi \colon S(\mathcal{G}) \to \{0, 1\}$ qui associe une parité à chaque sommet de $\mathcal{G}$, nous définissons l'orientabilité de $\mathcal{G}$ et calculons son nombre d'orientations ϕ-compatibles.

Définition 7.44 *Soit* $\mathcal{G}$ *un graphe et* S *l'ensemble des sommets de* $\mathcal{G}$*. Soit* ϕ *une application de* $S \to \{0, 1\}$*, appelée* fonction de parité*. Le nombre de sommets pairs (d'image* 0*) est le poids de* ϕ*, noté* $p(\phi) = |\phi^{-1}(0)|$*.*

Définition 7.45 *Une* orientation ϕ-compatible *de* $\mathcal{G}$ *est une orientation des arêtes telle que pour tout sommet* $s \in S$*, le degré sortant de* s *est de parité* $\phi(s)$*. Un graphe possédant une telle orientation est dit* ϕ-orientable *(cf. figure 7.2).*

Théorème 7.46 *Un graphe* $\mathcal{G}$ *connexe est* ϕ*-orientable si et seulement si*

$$\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) \equiv p(\phi) + 1 \mod 2.$$

Le nombre d'orientations ϕ*-compatibles d'un graphe connexe* $\mathcal{G}$ *qui est* ϕ*-orientable est*

$$2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})}.$$

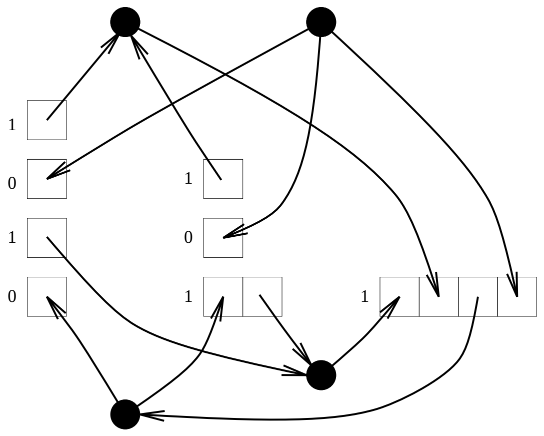


FIG. 7.2: Une fonction de parité et une orientation compatible associées au graphe étoilé de la figure 7.1.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) = 0$, de sorte que $\mathcal{G}$ est un arbre et montrons le résultat par récurrence sur le nombre de sommets. Le résultat est immédiat si le graphe $\mathcal{G}$ n'a qu'un sommet : son degré sortant est nul et $\mathcal{G}$ est orientable seulement si $p(\phi) = 1$ et possède dans ce cas une unique orientation (vide). Sinon $\mathcal{G}$ possède une feuille s_1 liée par une arête à un sommet s_2. Soit $\mathcal{G}'$ le graphe $\mathcal{G} \setminus \{s_1\}$ et ϕ' la fonction de parité sur $\mathcal{G}'$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \phi' : s & \mapsto & \phi(s) \text{ si } s \neq s_2, \\ s_2 & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \phi(s_2) + 1 & \text{si } \phi(s_1) = 0, \\ \phi(s_2) & \text{si } \phi(s_1) = 1. \end{array} \right. \end{array}$$

Alors $\mathcal{G}$ est ϕ-orientable si et seulement si $\mathcal{G}'$ est ϕ'-orientable et toute ϕ-orientation de $\mathcal{G}$ s'obtient de façon unique à partir d'une ϕ'-orientation de $\mathcal{G}'$. Par hypothèse de récurrence $\mathcal{G}'$ est ϕ'-orientable si et seulement si $p(\phi') \equiv 1 \mod 2$ et donc $\mathcal{G}$ est ϕ-orientable si et seulement si $p(\phi) = p(\phi') + 1 \pm 1 \equiv 1 \mod 2$. De plus dans ce cas, $\mathcal{G}$ possède une unique orientation ϕ-compatible, ce qui termine la démonstration dans le cas des arbres.

Nous montrons le résultat par récurrence sur $\mathrm{cyc}(\mathcal{G})$. Le cas $\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) = 0$ étant traité, supposons maintenant que $\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) > 0$. Alors $\mathcal{G}$ contient un cycle simple $(s_1, \ldots, s_k)$ avec $k \geqslant 1$. Considérons une arête $s_1 s_2$ de ce cycle et soit $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \{s_1 s_2\}$. Les éventuelles orientations de $\mathcal{G}$ sont de deux sortes, suivant que l'arête $s_1 s_2$ soit orientée $\vec{s_1 s_2}$ ou $\vec{s_2 s_1}$. Considérons les orientations ϕ-compatibles de $\mathcal{G}$ vérifiant $\vec{s_1 s_2}$ et appelons ϕ' la fonction de parité sur $\mathcal{G}'$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \phi' : s & \mapsto & \phi(s) \text{ si } s \neq s_1, \\ s_1 & \mapsto & \phi(s_1) + 1. \end{array}$$

Alors les restrictions à $\mathcal{G}'$ de ces orientations de $\mathcal{G}$ sont exactement les orientations ϕ'-compatibles de $\mathcal{G}'$. Comme $\mathrm{cyc}(\mathcal{G}') = \mathrm{cyc}(\mathcal{G}) - 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique. On en déduit que $p(\phi') \not\equiv \mathrm{cyc}(\mathcal{G}') \mod 2$ et que le nombre d'orientations ϕ'-compatibles de $\mathcal{G}'$ est $2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G}')}$. Les orientations ϕ-compatibles de $\mathcal{G}$ vérifiant $s_1\vec{s}_2$ existent donc si et seulement si $p(\phi) = p(\phi') \pm 1 \equiv \mathrm{cyc}(\mathcal{G}') = \mathrm{cyc}(\mathcal{G}) - 1 \not\equiv \mathrm{cyc}(\mathcal{G}) \mod 2$ et dans ce cas elles sont au nombre de $2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G}')} = 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-1}$.

Le même raisonnement s'applique aux orientations ϕ-compatibles de $\mathcal{G}$ vérifiant $s_2\vec{s}_1$ et le nombre total d'orientations ϕ-compatibles de $\mathcal{G}$ lorsqu'elles existent est donc $2 \cdot 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-1}$, ce qui termine la démonstration. □

7.3.6 Fin de l'énumération

Nous souhaitons appliquer le résultat sur les orientations de graphes aux graphes étoilés du théorème 7.43. Pour cela, il nous faut définir pour chaque graphe $\mathcal{G}$ une fonction de parité ϕ telle que les graphes sur lesquels porte la sommation soit ϕ-orientables.

Définition 7.47 *Soit Λ une distribution complète, Λ^k une distribution redressée de Λ et soit $\mathcal{G}$ un graphe étoilé de $\mathrm{Gr}(\Lambda^k)$. La fonction de parité ϕ sur $\mathcal{G}$ est définie par :*

- *$\phi(s) = 1$ si s est un sommet étoile de $\mathcal{G}$.*
- *$\phi(s) = 1$ si s est un sommet ligne de $\Lambda^* = [\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*]$.*
- *$\phi(s) = 0$ sinon. (c'est-à-dire si s est un sommet ligne faisant partie des équerres redressées.)*

Notons $\phi^{(c)}$ la restriction de ϕ à la c-ième composante de $\mathcal{G}$.

Proposition 7.48 *Un graphe $\mathcal{G}$ est totalement pair si et seulement s'il est ϕ-orientable.*

Démonstration. Un graphe $\mathcal{G}$ est totalement pair si et seulement si chacune de ses composantes vérifie $\varepsilon(\mathcal{G}^{(c)}) \equiv 0 \mod 2$. D'un autre coté, $\mathcal{G}$ est ϕ-orientable si toutes ses composantes le sont, c'est à dire si $\mathrm{cyc}(\mathcal{G}^{(c)}) \not\equiv p(\phi^{(c)})$. Le poids de la fonction de parité $\phi^{(c)}$ est par définition de ϕ le nombre de ligne des équerres redressées qui appartiennent à la composante connexe, noté $e(\mathcal{G}^{(c)})$ précédemment. Or par définition $\varepsilon(\mathcal{G}^{(c)}) = \mathrm{cyc}(\mathcal{G}^{(c)}) + 1 - e(\mathcal{G}^{(c)})$, d'où le résultat. □

Nous en déduisons que la sommation du théorème 7.43 porte sur les graphes ϕ-orientables. De plus dans la sommation le terme $2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})}$ compte le nombre d'orientations ϕ-compatibles du graphe $\mathcal{G}$ d'après le théorème 7.46.

Notation 7.49 *Notons $\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)$ l'ensemble des graphes de $\mathrm{Gr}(\Lambda^k)$ munis d'une orientation ϕ-compatible.*

Proposition 7.50 *Soit Λ une distribution de poids n et Λ^k une distribution redressée. Alors*

$$\sum_{\mathcal{G} \in \mathrm{Gr}(\Lambda^k)} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})} = \mathrm{card}(\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)).$$

Posons $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$, $\Lambda^k = [\lambda_1^{k_1}, \dots, \lambda_m^{k_m}]$, et pour tout $i \in [1, m]$, $\ell_i = \ell(\lambda_i)$ et $r_i + \ell_i = n$. Il ne reste donc plus, pour terminer, qu'à compter les graphes orientés de $\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)$. Nous allons partitionner l'ensemble $\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)$ selon divers critères :

- La partition $\hat{\mu}$ des degrés sortants des étoiles.
- L'application ψ qui à chaque sommet ligne (i, j) associe son degré sortant.

Nous considérons $\hat{\mu}$ comme une partition car les étoiles ne sont pas distingables à priori, alors que les sommets lignes au contraire sont étiquetés.

Proposition 7.51 *Les valeurs possibles de μ et ψ vérifient :*

- $|\hat{\mu}| + |\psi| = m(n-1)$ *où $|\psi|$ désigne la somme des degrés sortants des sommets lignes.*
- $\hat{\mu} = 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \dots m^{\mu_m}$ *ne contient que des parts impaires. Posons $\mu = 1^{\mu_3} 2^{\mu_5} \dots k^{\mu_{2k+1}} \dots$ et $g_0 = |\mu|$ de sorte que $|\hat{\mu}| = 2g_0 + \ell(\mu) + \mu_1$. Les étoiles de degré sortant supérieur à 3 seront appelées* étoiles complexes, *les étoiles de degré 1,* étoiles simples.

L'algorithme suivant permet de construire tous les graphes orientés de $\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)$ et chaque graphe est obtenu une seule fois :

1. Choisir $(g_0, g_1, \dots, g_m)$ des entiers positifs tels que $g_0 + \ldots + g_m = g$. L'entier g_0 détermine le nombre $(2g_0 + n - 1)$ d'arêtes sortantes issues d'étoiles. Chaque entier g_i détermine le nombre $(2g_i + \ell_i - 1)$ d'arêtes sortantes issues de sommets ligne de i.
2. Choisir $\mu \vdash g_0$. La partition $\hat{\mu} = 2\mu + 1$ détermine les degrés sortants des étoiles complexes.
3. Choisir ϕ, c'est-à-dire pour chaque partition λ_i, répartir les $2g_i + \ell_i - 1$ cases sortantes entre les lignes, de sorte que les lignes de λ^* aient un degré sortant impair tandis que les lignes de l'équerre redressée aient un degré sortant pair (et donc nul sauf peut-être pour la partie horizontale de l'équerre). Notons $2p_{i,j} + 1$ le degré sortant (impair) des lignes $1 \leqslant j < \ell_i$ de i et $2p_{i,\ell_i}$ le degré sortant de la partie horizontale de l'équerre.
4. Choisir dans chaque ligne la position des cases (arêtes) sortantes. Dans les lignes impaires, il y a $\binom{\lambda_{i,j}}{2p_{i,j}+1}$ possibilités et dans l'équerre, $\binom{k_i}{2p_{i,\ell_i}}$ possibilités.
5. Choisir les cases d'arrivée des arêtes sortantes issues des étoiles complexes parmi les cases entrantes des différents diagrammes, en remarquant que les cases de chaque diagramme sont ordonnées par leur coordonnées : le nombre de cases entrantes de chaque diagramme est $r_i - 2g_i$. Pour une étoile complexe de degré sortant i, il faut choisir i diagrammes distincts parmi les m possibles : ce choix est codé par un monôme, pris parmi les monômes du polynôme symétrique élémentaire $e_i(x_1, \dots, x_m)$. Les étoiles complexes de même degré sortant étant interchangeables, la configuration complète est codée par un monôme du produit $e_{2\mu+1} / \prod \mu_k!$. Si le diagramme i est choisi p fois, il faut alors choisir p cases parmi les $r_i - g_i$, ce qui se fait de $(r_i - 2g_i)_p = (r_i - 2g_i)(r_i - 2g_i - 1) \dots (r_i - 2g_1 - p + 1)$ façons. Comme p est le degré de la variable x_i dans le monôme codant la configuration, le nombre total de possibilités est donné par $\hat{e}_{2\mu+1}((r_i - 2g_i))$ où $\hat{e}_\mu$ est l'image de la fonction symétrique élémentaire e_μ par le changement de base $x_i^k \mapsto (x_i)_k = x_i(x_i - 1) \cdots (x_i - k + 1)$.
6. Fixer des étoiles simples aux cases entrantes restantes dans les diagrammes. Les étoiles simples étant indistingables, il n'y a pas de choix à faire.
7. Relier les $2g_i + \ell_i - 1$ cases sortantes de la partition λ_i aux étoiles en remarquant que chaque étoile dois être liée par exactement une arête à chaque partition et que toutes les étoiles étant déjà liées à un diagramme, elles sont aussi ordonnées. Il y a donc $(2g_i + \ell_i - 1)!$ possibilités.

Ainsi le nombre total de possibilités est

$$\sum_{g_0+\ldots+g_m=g} \sum_{\mu\vdash g_0} \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{\substack{p_{i,1}+\ldots+p_{i,\ell_i}\\ =g_i}} \binom{k_i}{2p_{i,\ell_i}} \prod_{j=1}^{\ell_i-1} \binom{\lambda_j}{2p_{i,j}+1} \right) \cdot \frac{\hat{e}_{2\mu+1}((r_i-2g_i))}{\prod_k \mu_k!} \prod_{i=1}^{m} (2g_i+\ell_i-1)!.$$

En réordonnant on obtient :

$$\mathrm{card}(\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)) = \sum_{g_0+\ldots+g_m=g} \left(\sum_{\mu\vdash g_0} \frac{\hat{e}_{2\mu+1}((r_i-2g_i))}{\prod_k \mu_k!} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} \left((2g_i+\ell_i-1)! \sum_{p_1+\ldots+p_{\ell_i}=g_i} \binom{k_i}{2p_{\ell_i}} \prod_{j=1}^{\ell_i-1} \binom{\lambda_j}{2p_{i,j}+1} \right).$$

Rappelons que d'après la proposition 7.50 et le théorème 7.43

$$c_\Lambda^n = \frac{n^{m-1}}{z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_m} 2^{2g}} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\\ 0\leqslant k_i<\lambda_{i,\ell_i}}} \mathrm{card}(\vec{\mathrm{Gr}}(\Lambda^k)).$$

Il faut donc encore sommer sur les k_i. Remarquons que

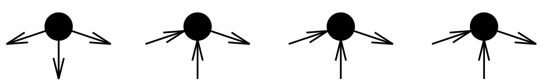
$$\sum_{k_i=0}^{\lambda_{i,\ell_i}-1} \binom{k_i}{2p} = \binom{\lambda_{i,\ell_i}}{2p+1},$$

De sorte que la formule se simplifie un peu pour donner l'expression finale du coefficient c_Λ^n :

$$\frac{n^{m-1}}{z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_m} 2^{2g}} \sum_{\substack{g_0+\cdots+g_m\\ =g}} \left(\sum_{\mu\vdash g_0} \frac{\hat{e}_{2\mu+1}((r_i-2g_i))}{\prod_k \mu_k!} \right) \prod_{i=1}^{m} \left((2g_i+\ell_i-1)! \sum_{\substack{p_1+\ldots+p_{\ell_i}\\ =g_i}} \prod_{j=1}^{\ell_i} \binom{\lambda_{i,j}}{2p_j+1} \right).$$

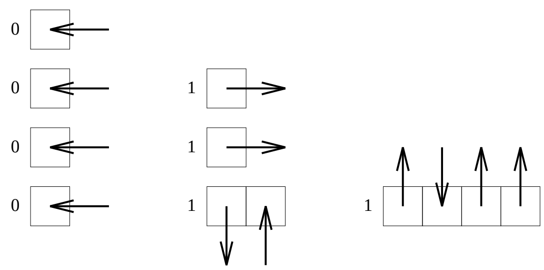
Exemple. Nous illustrons pour terminer l'algorithme de construction par un exemple : prenons $n=5$, $\Lambda=[5,1^3 2,14]$, et $k=(0,0,0)$, de sorte que $\Lambda^k=[1^4,1^2 2,4]$, et $g=(1-5+4+1+3)/2=2$.

1. Choix des g_i : $g_0=1$, $g_1=0$, $g_2=0$ et $g_3=1$.
2. Choix de μ : $\mu=1$ est la seule possibilité. $2\mu+1=3$: une seule étoile complexe de degré sortant 3 :

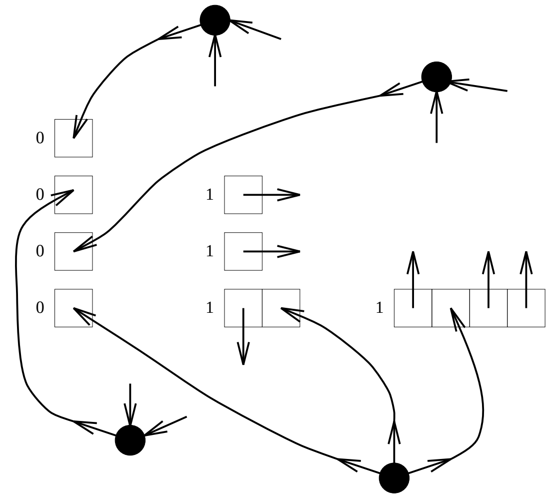


3. Choix des $p_{i,j}$: pour $i=1$ pas de partie horizontale de l'équerre donc rien à choisir. Pour $i=2$, $g_2=0$ donc les $p_{2,j}$ sont tous nuls. Enfin pour $i=3$, $g_3=1$ donc $p_{3,1}=1$.

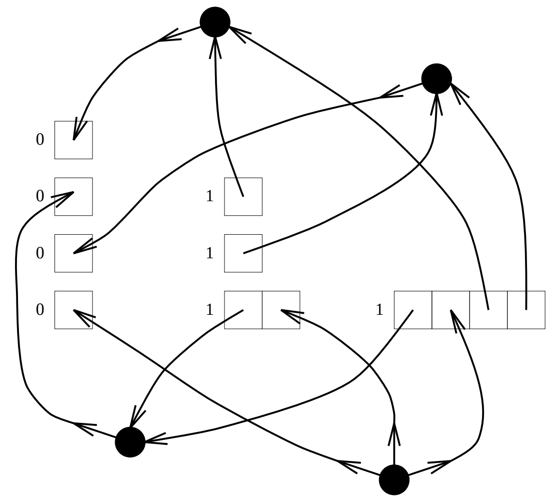
4. Répartitions des $2p_{i,j}+1$ arêtes sortantes dans les lignes impaires et des $2p_{i,j}$ arêtes sortantes dans les lignes paires. Ici les deux seuls choix sont pour la ligne $(2,1)$ où $2p_{2,1}+1=1$ alors que $\lambda^k_{2,1}=2$ et pour la lignes $(3,1)$ où $2p_{3,1}+1=3$ et $\lambda^k_{3,1}=4$:



5. Choix des cases d'arrivée de l'étoile complexe.
6. Fixation des étoiles simples aux cases entrantes libres.



7. Choix des arêtes restantes.



◇

7.4 Configurations essentielles

Le théorème 7.43 permet de donner des résultats d'un autre type, basés directement sur l'étude des différents graphes qui peuvent apparaître dans la sommation.

Par exemple, supposons que l'une des partitions soit $1(n-1)$. Alors la seule partition redressée de cette partition est $n-1$, qui n'a qu'une part. Comme toutes les étoiles sont incidentes au sommet ligne correspondant, les graphes possèdent une unique composante connexe, forcement paire. De plus leur nombre cyclomatique ne dépend que de Λ^k. Or

$$\mathrm{card}(\mathrm{Gr}(\Lambda^k)) = [(n-1)!]^{m-1}.$$

On en déduit que

$$c^n_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1},1(n-1)]} = \frac{(n!)^{m-1}}{(n-1)z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_{m-1}}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m\\ 0\leqslant k_i<\lambda_{i,\ell_i}}} 2^{\mathrm{cyc}(\mathcal{G})-2g}.$$

Or au cours de la démonstration de la proposition 7.37, on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{cyc}(\mathcal{G}) &= c(\mathcal{G}) + 2g + \sum_{i=1}^{m}(\ell_i - \ell(\lambda_i^{k_i}) - 1)\\ &= 2g + 1 + \sum_i (k_i + \delta_{k_i,0} - \lambda_{\ell_i}).\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\sum_{k_i=0}^{\lambda_{k_i}-1} 2^{k_i+\delta_{k_i,0}} &= \sum_{k_i=1}^{\lambda_{k_i}-1} 2^{k_i} + 2\\ &= 2^{\lambda_{k_i}} - 2 + 2 = 2^{\lambda_{k_i}},\end{aligned}$$

de sorte que

$$c^n_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1},1(n-1)]} = \frac{2(n!)^{m-1}}{(n-1)z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_{m-1}}}$$

Proposition 7.52 *Quelles que soient les partitions $\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1}$ telles que la somme de leur parité soit impaire,*

$$c^n_{[\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1},1(n-1)]} = \frac{2}{n-1}|C_{\lambda_1}|\cdots|C_{\lambda_{m-1}}|.$$

Ce résultat généralise le cas du produit d'un grand cycle et d'un cycle de longueur $n-1$: pour toute partition impaire μ,

$$c^n_{[\mu,1(n-1)]} = \frac{2}{n-1}|C_\mu|,$$

résultat qu'on écrit habituellement sous la forme plus remarquable,

$$c^{\mu}_{[n,1(n-1)]} \quad = \quad 2(n-2)!.$$

En réalité la seule condition que nous ayons utilisée pour établir la proposition 7.52 est la remarque selon laquelle tous les graphes possibles sont connexes.

Définition 7.53 *Les partitions $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$* forcent la connexité*, si pour tous $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+p}$ tels que la somme des parités des $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+p}$ soit égale à la parité de n, les graphes de $\mathrm{Gr}(\Lambda^k)$ sont connexes quelques soient les (k_i).*

Exemple. De la discussion précédente suit que la partition $1(n-1)$ force la connexité. Il en va de même pour le couple $(1pq, 1rs)$ avec $r \notin \{p,q\}$ ou pour le couple $(1p^q, 1q^p)$ avec p et q premiers entre eux. De manière plus générale le couple $(1\lambda, 1\mu)$ force la connexité s'il est impossible de partitionner les parts de λ en $\lambda' \cup \lambda''$ et celles de μ en $\mu' \cup \mu''$ de sorte que $|\lambda'| = |\mu'|$. ◇

Proposition 7.54 *Si les partitions $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ forcent la connexité alors,*

$$c^n_{[\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_{k+p}]} = \begin{cases} \dfrac{2}{n!}\displaystyle\prod_{i=1}^{k+p} |C_{\lambda_i}|, \\ \quad ou \\ 0 \end{cases}$$

quelques soient les partitions $\lambda_{k+1} \ldots \lambda_{k+p}$.

De manière plus générale, lorsque la connexité n'est pas garantie, il est quand même possible d'étudier les différents types de graphes qui peuvent apparaître (les configurations essentielles) et de les compter en fonction de leur nombre de composantes connexes. On trouve ainsi une version géométrique de la démarche esquissée et abandonnée dans le manuscrit de G. Jones [83], démarche qui remonte en fait à E.A. Bertram et V.K. Wei [22]. Cependant cette méthode devient vite fastidieuse sauf si on se restreint au cas ou les partitions possèdent toujours une part de longueur 1 (pour éviter l'apparition de diagrammes redressés). Par exemple pour $m = 2$ et $\mu = 1^k(n-k)$ on obtient la généralisation suivante des résultats de E.A. Bertram et V.K. Wei [22], G. Boccara [24] et G. Jones [83] :

Théorème 7.55 *Soit $n > k+1$ et $\lambda \vdash n$ avec $\lambda = 1^{\alpha_1} \ldots n^{\alpha_n}$, alors si $\alpha_1 \neq 0$ et λ à la même parité que k,*

$$c^{\lambda}_{[n,1^k(n-k)]} = \frac{2(n-k-1)!}{k!} \sum_{h=0}^{k-1} (k-1)_h (n-\alpha_1-h)_{k-1-h} \left(\sum_{\substack{\nu \vdash h \\ \nu = 2^{\gamma_1} \ldots h^{\gamma_h}}} (-1)^{\ell(\nu)} \prod_{i=2}^{h} \binom{\alpha_i}{\gamma_i} \right).$$

En particulier la valeur ne dépend que de n, de la parité de λ et des parts de longueur strictement inférieure à k de λ.

Ces résultats restent vrais, mais bien plus pénibles à démontrer, pour λ quelconque de même parité que k (i.e. même si λ n'a pas de part de longueur 1).

Les expressions pour $k = 1, 2, 3, 4$ figurent dans E.A. Bertram et V.K. Wei [22], pour $k \geq 5$ le résultat est nouveau. Pour $k = 1, 2$ des preuves constructives ont été données respectivement par A. Machì [112] et L. Cangelmi et P. Cellini [35] (voir aussi la section 6.3). Pour $\lambda = 1^{\alpha_1} \ldots n^{\alpha_n}$ ayant la même parité que k,

$$\begin{aligned}
c^{\lambda}_{[n,1(n-1)]} &= 2(n-2)!,\\
c^{\lambda}_{[n,2(n-2)]} &= (n-3)!(n-\alpha_1),\\
c^{\lambda}_{[n,3(n-3)]} &= \frac{(n-4)!}{3}[(n-\alpha_1)(n-\alpha_1-1)-2\alpha_2],\\
c^{\lambda}_{[n,4(n-4)]} &= \frac{(n-5)!}{4\cdot 3}[(n-\alpha_1)_3-6(n-\alpha_1-2)\alpha_2-6\alpha_3],\\
c^{\lambda}_{[n,5(n-5)]} &= \frac{(n-6)!}{5\cdot 4\cdot 3}[(n-\alpha_1)_4+12\alpha_2(\alpha_2-1)\\
&\qquad -12(n-\alpha_1-2)(n-\alpha_1-3)\alpha_2-24(n-\alpha_1-3)\alpha_3-24\alpha_4],
\end{aligned}$$

7.5 Applications aux cartes

L'objectif de cette section est d'établir des formules explicites pour les nombres de cartes et hypercartes à une seule face ou g-arbres en fonction du genre et du nombre d'arêtes, en sommant sur les différentes distributions possibles.

Nous considérons donc le cas $m = 2$, $\Lambda = [\lambda, \mu]$ avec λ et μ deux partitions de n. Alors $c^n_{[\lambda,\mu]}$ compte le nombre de g-arbres enracinés de distribution des degrés respective λ pour les sommets blancs et μ pour les sommets noirs où $g = g(\lambda, \mu)$ est donné par $\ell(\lambda) + \ell(\mu) = n + 1 - 2g$.

Observons que si on fixe une partition λ de n et le genre g, la sommation sur toutes les partitions μ telle que $\ell(\mu) = n + 1 - 2g - \ell(\lambda)$ alors le coefficient

$$\mathrm{Bi}(\lambda, m, n) = \sum_{\substack{\mu\vdash n\\ \ell(\mu)=m}} c^n_{[\lambda,\mu]}. \tag{4}$$

compte le nombre de g-arbres enracinés dont la distribution des sommets blancs est donnée par λ, sans restriction sur les sommets noirs. De même si on somme sur toutes les partitions λ de sorte que $\ell(\lambda) + \ell(mu) = n + 1 - 2g$, le coefficient

$$\mathrm{Bi}(\ell, m, n) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)=\ell}} \mathrm{Bi}(\lambda, m, n) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n,\, \ell(\lambda)=\ell\\ \mu\vdash n,\, \ell(\mu)=m}} c^n_{[\lambda,\mu]} \tag{5}$$

compte le nombre $\mathrm{Bi}(\ell, m, n)$ de g-arbres à ℓ sommets blancs et m sommets noirs. Enfin si on somme sur ℓ et m tels que $\ell + m = n + 1 - 2g$, on obtient

$$\mathrm{Bi}(n, g) = \sum_{\substack{\ell\geqslant 1,\, m\geqslant 1\\ \ell+m=n+1-2g}} \mathrm{Bi}(\ell, m, n) \tag{6}$$

qui est le nombre $\mathrm{Bi}(n, g)$ de g-arbres bicolores enracinés à n sommets.

Les g-arbres bicolores ont été étudié en particulier par N. Adrianov [1] qui obtient des récurrences pour les nombres $\mathrm{Bi}(n,g)$ et $\mathrm{Bi}(\ell,m,g)$. Dans [96], D.M. Jackson et T. Visentin obtiennent des expressions pour les cartes et hypercartes de genre g avec un nombre donné de faces. Ces expressions permettent d'exprimer $\mathrm{Bi}(n,g)$ et $\mathrm{Bi}(\ell,m,g)$ sous la forme d'un coefficient à extraire d'une série donnée par une sommation alternée de n termes.

Nous utilisons notre théorème 7.7 pour donner des expressions explicites sous la forme de sommations de termes positifs. Ces expressions sont obtenues à l'aide du lemme 7.56 qui apparaît dans [150] et de manipulations calculatoires relativement longues mais dont la difficulté est essentiellement due à la lourdeur des notations.

Lemme 7.56 ([150]) *Soit n et m deux entiers strictement positifs et g un entier positif, ainsi que $\eta \vdash g$, tels que $m+2g \leqslant n$. Alors*

$$\sum_{\substack{\mu\vdash n\\ \ell(\mu)=m}} \frac{1}{z_\mu} \sum_{\substack{q\models g\\ \ell(q)=m\\ \lambda(q)=\eta}} \prod_{k=1}^{m} \binom{\mu_k}{2q_k+1} = \frac{1}{m!}\binom{n-1}{m+2g-1} \prod_{k=1}^{\ell(\eta)} \frac{1}{2\eta_k+1} \sum_{\substack{q\models g\\ \ell(q)=m\\ \lambda(q)=\eta}} 1.$$

Démonstration. Nous démontrons le résultat suivant, un peu plus général, et dont découle immédiatement le lemme.

Soit n, z, r, ℓ des entiers positifs avec $r+z \leq \ell+z \leq n$ et $\eta = 1^{\gamma_1}2^{\gamma_2}\ldots z^{\gamma_z} \vdash z$ où $\ell(\eta)=r$. Alors

$$\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)=\ell}} \frac{1}{\prod_i \alpha_i!} \sum_{\substack{p\models z\\ \ell(p)=\ell\\ \lambda(p)=\eta}} \prod_j \binom{\lambda_j-1}{p_j} = \frac{\binom{n-1}{\ell+z-1}}{\prod_i \gamma_i!(\ell-r)!}, \tag{7}$$

où $\lambda(p)$ désigne la partition obtenue en réordonnant la composition p et où $\lambda = 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n} \vdash n$.

Considérons l'expression

$$\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)=\ell}} \binom{\ell}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell} \sum_{\substack{p\models z\\ \ell(p)=\ell\\ \lambda(p)=\eta}} \prod_j \binom{\lambda_j-1}{p_j} \tag{8}$$

obtenue en multipliant le membre gauche de l'équation 7 par $\ell!$. Le coefficient multinomial $\binom{\ell}{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell}$ est le nombre de compositions de n de partition associée λ. On peut donc transformer l'expression (8) en

$$\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \ell(\lambda)=\ell}} \sum_{\substack{q\models n\\ \ell(q)=\ell\\ \lambda(q)=\lambda}} \sum_{\substack{p\models z\\ \ell(p)=\ell\\ \lambda(p)=\eta}} \prod_j \binom{q_j-1}{p_j} = \sum_{\substack{q\models n\\ \ell(q)=\ell}} \sum_{\substack{p\models z\\ \ell(p)=\ell\\ \lambda(p)=\eta}} \prod_j \binom{q_j-1}{p_j}, \tag{9}$$

puisque pour un $\lambda \vdash n$ donné, le membre droit de (9) est symétrique en $\{q_1,\ldots,q_\ell\}$. Échangeons maintenant les sommations du terme droit de (9) et considérons

$$S = \sum_{\substack{q \models n \\ \ell(q)=\ell}} \prod_j \left(\begin{array}{c} q_j - 1 \\ p_j \end{array} \right) . \tag{10}$$

Comme le nombre de compositions $p \models z$ ayant $\ell(\lambda) - \ell(\eta)$ parts égales à zéro et telles que $\ell(p) = \ell(\lambda) = \ell$ and $\lambda(p) = \eta$ est $\frac{\ell!}{(\ell-r)! \prod_i \gamma_i!}$, il suffit de montrer que

$$S = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \ell + z - 1 \end{array} \right) . \tag{11}$$

Soit W l'ensemble des mots w de longueur n sur l'alphabet $\{x, y\}$ ayant $\ell+z$ lettres x et commençant par un x. Nous avons

$$\mathrm{card}(W) = \binom{n-1}{\ell+z-1}$$

et, comme $(1+p_1) + \ldots + (1+p_\ell) = \ell + z$, les ℓ lettres x de $w \in W$ associées aux 1 peuvent être vue comme w de sorte que nous pouvons factoriser w comme suit :

$$w = xw_1xw_2 \ldots xw_\ell \quad , \tag{12}$$

où w_i contient p_i lettres x pour tout $i = 1 \ldots \ell$. Soit $q_i = |w_i| + 1$, alors le nombre de mots de la forme (12) est aussi $\prod_i \left(\begin{array}{c} q_i - 1 \\ p_i \end{array} \right)$ et toutes les compositions q de n à ℓ parts peuvent être ainsi obtenues. Ceci termine la preuve de la formule (7).

Le lemme 7.56 en découle immédiatement en remarquant que

$$\sum_{\substack{\mu \vdash n \\ \ell(\mu)=m}} \frac{1}{z_\mu} \sum_{\substack{q \models z \\ \ell(q)=m \\ \lambda(q)=\eta}} \prod_{k=1}^{m} \binom{\mu_k}{2q_k+1} = \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ \ell(\mu)=m}} \frac{1}{z_\mu} \sum_{\substack{q' \models 2z \\ \ell(q')=m \\ \lambda(q')=(2\eta_1, \ldots, 2\eta_m)}} \prod_{k=1}^{m} \binom{\mu_k}{q'+1}.$$

□

En appliquant ce lemme et le théorème 7.7, nous obtenons

Théorème 7.57 *Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \vdash n$ et m, g deux entiers positifs tels que $\ell + m = n + 1 - 2g$. Alors,*

$$\mathrm{Bi}(\lambda, m, n) = \frac{n!}{z_\lambda 2^{2g} m!} \sum_{g_1+g_2=g} \left(\sum_{i_1+\cdots+i_\ell=g_1} \prod_k \binom{\lambda_k}{2i_k+1} \right) R_{g_2}(m)$$

où $R_g(x)$ est un polynôme en x de degré g défini par :

$$R_g(x) = \sum_{\substack{\gamma \vdash g \\ \gamma = 1^{c_1} \ldots g^{c_g}}} (x)_{\ell(\gamma)} \frac{1}{\prod_i c_i! (2i+1)^{c_i}}, \tag{13}$$

avec $(x)_k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ la factorielle descendante.

Démonstration. Du théorème 7.7 et du lemme 7.56 on déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bi}(\lambda,m,n) &= \frac{n}{z_\lambda 2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} (r(\lambda)-2z_1)!(n-m-2z_2)! \\
&\qquad \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{\ell(\lambda)}=z_1\\ j_1+\cdots+j_m=z_2}} \left(\prod_k \binom{\lambda_k}{2i_k+1}\right) \sum_{\substack{\mu\\ \ell(\mu)=m}} \frac{1}{z_\mu} \prod_k \binom{\mu_k}{2j_k+1}, \\
&= \frac{n}{z_\lambda 2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} (r(\lambda)-2z_1)!(n-m-2z_2)! \\
&\qquad \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{\ell(\lambda)}=z_1\\ j_1+\cdots+j_m=z_2}} \left(\prod_k \binom{\lambda_k}{2i_k+1}\right) \frac{1}{m!} \binom{n-1}{m+2z_2-1} \prod_k \frac{1}{2j_k+1},
\end{aligned}$$

et, comme $\ell(\mu)+2z_2-1 = r(\lambda)-2z_1$ et $r(\lambda)+r(\mu) = n-1+2z$, on obtient

$$(r(\lambda)-2z_1)!(r(\mu)-2z_2)!\binom{n-1}{\ell(\mu)+2z_2-1} = (n-1)!$$

et

$$\sum_{j_1+\cdots+j_m=z_2} \prod_k \frac{1}{2j_k+1} = P_{z_2}(m)$$

ce qui donne le résultat. □

Si on pose $\mu = 2^{n/2}$, tous les sommets blancs ont degré deux et peuvent donc être vus comme centres d'arêtes reliant les sommets noirs entre eux. Nous obtenons ainsi les g-arbres enracinés usuels (non bicoloriés) déjà énumérés par T.R. Walsh et A.B. Lehman [150]. Appelons donc $\mathrm{Mono}(n,g)$ le nombre de g-arbres à n arêtes et utilisons le théorème 7.57. Nous obtenons :

Corollaire 7.58 ([150]) *Soit n un entier strictement positif et g un entier positif. Alors,*

$$\mathrm{Mono}(n,g) = \mathrm{Bi}((2^n), n+1-2g, 2n) = \frac{(2n)!}{2^{2g} n!(n+1-2g)!} R_g(n+1-2g).$$

De plus à g fixé et pour n tendant vers l'infini,

$$\mathrm{Mono}(n,g) \sim_{n\to\infty} \frac{n^{3(g-\frac{1}{2})}4^n}{\sqrt{\pi}g!12^g}.$$

En utilisant une seconde fois le lemme 7.56 pour sommer sur les λ dans le théorème 7.57 nous obtenons :

Théorème 7.59 *Soit ℓ, m, n, g des entiers positifs tels que $\ell + m = n+1-2g$. Alors,*

$$\mathrm{Bi}(\ell,m,n) = \frac{(n+1)_{2g}}{(n+1)2^{2g}} \binom{n+1-2g}{\ell} \sum_{g_1+g_2=g} \binom{n-1}{\ell+2g_1-1} R_{g_1}(\ell) R_{g_2}(m),$$

Démonstration. En effet

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Bi}(\ell,m,n)\\
&= \frac{n!}{m!2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \Big(\sum_{\substack{j_1+\cdots\\ \cdots+j_m=z_2}} \prod_k \frac{1}{2j_k+1}\Big) \sum_{\substack{i_1+\cdots\\ \cdots+i_\ell=z_1}} \left(\sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda} \prod_k \binom{\lambda_k}{2i_k+1}\right),\\
&= \frac{n!}{m!2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \Big(\sum_{\substack{j_1+\cdots\\ \cdots+j_m=z_2}} \prod_k \frac{1}{2j_k+1}\Big) \sum_{\substack{i_1+\cdots\\ \cdots+i_\ell=z_1}} \frac{1}{\ell!}\binom{n-1}{\ell+2z_1-1} \prod_k \frac{1}{2i_k+1},\\
&= \frac{n!}{\ell!m!2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \binom{n-1}{\ell+2z_1-1} \Big(\sum_{\substack{i_1+\cdots\\ \cdots+i_\ell=z_1}} \prod_k \frac{1}{2i_k+1}\Big)\Big(\sum_{\substack{j_1+\cdots\\ \cdots+j_m=z_2}} \prod_k \frac{1}{2j_k+1}\Big),
\end{aligned}
$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Finalement en sommant sur ℓ et m tels que $\ell+m=n$ nous obtenons :

Théorème 7.60 *Soit n,g deux entiers positifs. Alors,*

$$
\mathrm{Bi}(n,g) = \frac{(n+1)_{2g}}{(n+1)2^{2g}} \sum_{g_1+g_2=g} \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1\leqslant g_1\\ 0\leqslant \ell_2\leqslant g_2}} \gamma_{g_1,\ell_1}\gamma_{g_2,\ell_2}(n+1-2g)_{\ell_1+\ell_2} \binom{2n-2g-\ell_1-\ell_2}{n-2g_1-\ell_1}
$$

où les $\gamma_{g,\ell}$ sont des constantes données par :

$$
\gamma_{g,\ell} = \sum_{\substack{\gamma\vdash g\\ \ell(\gamma)=\ell\\ \gamma=1^{\gamma_1}\ldots g^{\gamma_g}}} \frac{1}{\prod_i \gamma_i!(2i+1)^{\gamma_i}}.
$$

Démonstration. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bi}(n,z) &= \sum_{\substack{\ell+m=n+1-2z\\ \ell\geqslant 1, m\geqslant 1}} \mathrm{Bi}(\ell,m,n),\\
&= \frac{(n+1)_{2z}}{(n+1)2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \sum_{\ell,m} \binom{n+1-2z}{\ell}\binom{n-1}{\ell+2z_1-1}\\
&\qquad \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1\leqslant z_1\\ 0\leqslant \ell_2\leqslant z_2}} \gamma_{z_1,\ell_1}\gamma_{z_2,\ell_2}(\ell)_{\ell_1}(m)_{\ell_2},\\
&= \frac{(n+1)_{2z}}{(n+1)2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1\leqslant z_1\\ 0\leqslant \ell_2\leqslant z_2}} \gamma_{z_1,\ell_1}\gamma_{z_2,\ell_2}\\
&\qquad \sum_{\ell,m} \frac{(n+1-2z)!}{\ell!m!}(\ell)_{\ell_1}(m)_{\ell_2}\binom{n-1}{\ell+2z_1-1},\\
&= \frac{(n+1)_{2z}}{(n+1)2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1\leqslant z_1\\ 0\leqslant \ell_2\leqslant z_2}} \gamma_{z_1,\ell_1}\gamma_{z_2,\ell_2}(n+1-2z)_{\ell_1+\ell_2}\\
&\qquad \sum_{\substack{\ell+m=n+1-2z\\ \ell\geqslant \ell_1, m\geqslant \ell_2}} \binom{n+1-2z-\ell_1-\ell_2}{\ell-\ell_1}\binom{n-1}{\ell+2z_1-1},\\
&= \frac{(n+1)_{2z}}{(n+1)2^{2z}} \sum_{z_1+z_2=z} \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1\leqslant z_1\\ 0\leqslant \ell_2\leqslant z_2}} \gamma_{z_1,\ell_1}\gamma_{z_2,\ell_2}(n+1-2z)_{\ell_1+\ell_2}\binom{2n-2z-\ell_1-\ell_2}{n-2z_1-\ell_1},
\end{aligned}
$$

la dernière égalité découlant de la formule binomiale classique

$$\sum_k \binom{r}{p+k}\binom{s}{q+k} \quad = \quad \binom{r+s}{r-p+q}.$$

$\square$

Corollaire 7.61 *Soit g un entier positif fixé. Alors quand n tend vers l'infini :*

$$\mathrm{Bi}(n,g) \sim_{n\to\infty} \frac{n^{3(g-\frac{1}{2})}4^n}{\sqrt{\pi}g!48^g}.$$

En particulier nous retrouvons le résultat d'Adrianov ([1], Corollaire 5) qui dit que pour g fixé et n tendant vers l'infini,

$$\frac{\mathrm{Bi}(n,g)}{\mathrm{Mono}(n,g)} \sim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^g.$$

Nous donnons maintenant les expressions de $\mathrm{Bi}(n,g)$ et $\mathrm{Bi}(\ell,m,g)$ dans la table suivante, où

$$\begin{aligned}
q_2(x,y) &= 13(x^2+y^2)+5xy(x+y)+86(x+y)+47xy+129,\\
q_3(x,y) &= 502(x^4+y^4)+35x^2y^2(x^2+y^2)+273xy(x^3+y^3)+70x^3y^3\\
&\quad +9978(x^3+y^3)+1260x^2y^2(x+y)+6512xy(x^2+y^2)+71842(x^2+y^2)\\
&\quad +13410x^2y^2+54123xy(x+y)+185554xy+219918(x+y)+238480\,.
\end{aligned}$$

genus	*Bi(ℓ,m,n)*	*Bi(n,g)*
0	$\frac{1}{n}\binom{n}{\ell-1}\binom{n}{m-1}$	$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ nombres de Catalan
1	$\frac{\binom{n+1}{2}}{3!}\binom{n-1}{\ell-1}\binom{n-1}{m-1}$	$\frac{\binom{2n-1}{n-1}\binom{n}{3}}{(2n-1)2}$
2	$\frac{\binom{n+1}{2}q_2(\ell,m)}{6\cdot5!}\binom{n-1}{\ell-1}\binom{n-1}{m-1}$	$\frac{\binom{2n-3}{n-2}\binom{n-1}{4}2(5n^2-7n+6)}{(2n-3)5!}$
3	$\frac{\binom{n+1}{2}q_3(\ell,m)}{36\cdot7!}\binom{n-1}{\ell-1}\binom{n-1}{m-1}$	$\frac{\binom{2n-5}{n-2}\binom{n-2}{5}5(35n^4-182n^3+397n^2-346n+240)}{(2n-5)3(7)!}$

Bibliographie

[1] N. M. Adrianov. An analogue of the Harer-Zagier formula for unicellular two-color maps. *Funct. Anal. Appl.*, 31(3) :149–155, 1998.

[2] L. Alonso, J. L. Rémy, and R. Schott. A linear-time algorithm for the generation of trees. *Algorithmica*, 17(2) :162–182, 1997.

[3] D. Arquès. Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées. *J. Combin. Theory Ser. B*, 39(1) :27–42, 1985.

[4] D. Arquès. Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés. *Discrete Math.*, 58(1) :11–24, 1986.

[5] D. Arquès and J.-F. Béraud. Énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, 31(4) :385–409, 1997.

[6] F. Bédard and A. Goupil. The poset of conjugacy classes and decomposition of products in the symmetric group. *Canad. Math. Bull.*, 35(2) :152–160, 1992.

[7] E. A. Bender. The number of three-dimensional convex polyhedra. *Amer. Math. Monthly*, 94(1) :7–21, 1987.

[8] E. A. Bender. Some unsolved problems in map enumeration. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 3 :51–56, 1991.

[9] E. A. Bender and E. R. Canfield. The asymptotic number of rooted maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(2) :244–257, 1986.

[10] E. A. Bender and E. R. Canfield. Face sizes of 3-polytopes. *J. Combin. Theory Ser. B*, 46(1) :58–65, 1989.

[11] E. A. Bender and E. R. Canfield. Enumeration of degree restricted maps on the sphere. In *Planar graphs (New Brunswick, NJ, 1991)*, volume 9 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 13–16. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[12] E. A. Bender and E. R. Canfield. The number of degree-restricted rooted maps on the sphere. *SIAM J. Discrete Math.*, 7(1) :9–15, 1994.

[13] E. A. Bender, E. R. Canfield, and L. B. Richmond. The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 63(2) :318–329, 1993.

[14] E. A. Bender, E. R. Canfield, and R. W. Robinson. The enumeration of maps on the torus and the projective plane. *Canad. Math. Bull.*, 31(3) :257–271, 1988.

[15] E. A. Bender, Z. Gao, L. B. Richmond, and N. C. Wormald. Asymptotic properties of rooted 3-connected maps on surfaces. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 60(1) :31–41, 1996.

[16] E. A. Bender and L. B. Richmond. The asymptotic enumeration of rooted convex polyhedra. *J. Combin. Theory Ser. B*, 36(3) :276–283, 1984.

[17] E. A. Bender and L. B. Richmond. A survey of the asymptotic behaviour of maps. *J. Combin. Theory Ser. B*, 40(3) :297–329, 1986.

[18] E. A. Bender, L. B. Richmond, and N. C. Wormald. Largest 4-connected components of 3-connected planar triangulations. *Random Structures Algorithms*, 7(4) :273–285, 1995.

[19] E. A. Bender and N. C. Wormald. Almost all convex polyhedra are asymmetric. *Canad. J. Math.*, 37(5) :854–871, 1985.

[20] C. Berge. *Graphs*, volume 6 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Second revised edition of part 1 of the 1973 English version.

[21] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota.

[22] E. A. Bertram and V. K. Wei. Decomposing a permutation into two large cycles : an enumeration. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1(4) :450–461, 1980.

[23] D. Bessis, C. Itzykson, and J. B. Zuber. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. *Adv. in Appl. Math.*, 1(2) :109–157, 1980.

[24] G. Boccara. Nombre de représentations d'une permutation comme produit de deux cycles de longueurs données. *Discrete Math.*, 29(2) :105–134, 1980.

[25] B. Bollobás. *Random graphs.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1985.

[26] M. Bóna, M. Bousquet, G. Labelle, and P. Leroux. Enumeration of m-ary cacti according to their color and degree distributions. Université du Québec à Montréal, preprint, 1998.

[27] M. Bousquet. *Opérations combinatoires sur les espèces de structures et applications.* PhD thesis, Université du Québec à Montréal, 1998. en préparation.

[28] M. Bousquet-Mélou. Communications privées.

[29] M. Bousquet-Mélou and G. Schaeffer. Enumeration of planar constellations. *Adv. in Applied Math.*, 1999. à paraître.

[30] J.-F. Béraud. *Cartes combinatoires (titre provisoire).* PhD thesis, Université de Marne-la-vallée, 1998.

[31] É. Brézin and S. R. Wadia, editors. *The large N expansion in quantum field theory and statistical physics.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1993.

[32] W. G. Brown. Enumeration of quadrangular dissections of the disk. *Canad. J. Math.*, 17 :302–317, 1965.

[33] W. G. Brown. On the enumeration of non-planar maps. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 65 :42, 1966.

[34] W. G. Brown and W. T. Tutte. On the enumeration of rooted non-separable planar maps. *Canad. J. Math.*, 16 :572–577, 1964.

[35] L. Cangelmi and P. Cellini. A representation of even permutations. *European J. Combin.*, 19(4) :419–422, 1998.

[36] L. Chottin. Énumération d'arbres et formules d'inversion de séries formelles. *J. Combin. Theory Ser. B*, 31(1) :23–45, 1981.

[37] R. Cori. Sur la rationalité de certaines séries génératrices. *Discrete Math.*, 3 :315–332, 1972.

[38] R. Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications.* Société Mathématique de France, Paris, 1975. With an English abstract, Astérisque, No. 27.

[39] R. Cori, B. Jacquard, and G. Schaeffer. Description trees for some families of planar maps. In *FPSAC'97*, 1997.

[40] R. Cori and A. Machì. Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey. I, II, III. *Exposition. Math.*, 10(5) :403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[41] R. Cori and J. Richard. Some languages related to planar maps. In *Theory of machines and computations (Proc. Internat. Sympos., Technion, Haifa, 1971)*, pages 115–121, New York, 1971. Academic Press.

[42] R. Cori and J. Richard. Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives. *Discrete Math.*, 2 :115–162, 1972.

[43] R. Cori and B. Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5) :1023–1042, 1981.

[44] C. W. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.

[45] H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez, and P. Rosenstiehl. Bipolar orientations revisited. *Discrete Appl. Math.*, 56(2-3) :157–179, 1995. Special Issue : Fifth Franco-Japanese Days (Kyoto, 1992).

[46] H. de Frayssex, P. Ossona de Mendez, and P. Rosenstiehl. *Pigale, Automatic Graph Drawing.* Atelier de taxiplanie, CAMS, École des Hautes Études en Sciences Sociales. ALCOM-IT, ESPRIT LTR Projet 20244.

[47] J. Dénes. The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 4 :63–71, 1959.

[48] A. Denise. *Méthodes de génération aléatoire d'objets combinatoires de grande taille et problèmes d'énumération.* PhD thesis, Université Bordeaux I, 1994.

[49] A. Denise, M. Vasconcellos, and D. J. A. Welsh. The random planar graph. *Congr. Numer.*, 113 :61–79, 1996. Festschrift for C. St. J. A. Nash-Williams.

[50] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. G. Tollis. Algorithms for drawing graphs : an annotated bibliography. *Comput. Geom.*, 4(5) :235–282, 1994.

[51] M. Drmota. Systems of functional equations. *Random Structures Algorithms*, 10(1-2) :103–124, 1997. Average-case analysis of algorithms (Dagstuhl, 1995).

[52] M. Drmota and M. Soria. Marking in combinatorial constructions : generating functions and limiting distributions. *Theoret. Comput. Sci.*, 144(1-2) :67–99, 1995. Special volume on mathematical analysis of algorithms.

[53] M. Drmota and M. Soria. Images and preimages in random mappings. *SIAM J. Discrete Math.*, 10(2) :246–269, 1997.

[54] I. Dutour and J. M. Fédou. Object grammars and random generation. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.* `http :\\www.compscinet.com.`, 1997.

[55] A. Dvoretzky and Th. Motzkin. The asymptotic density of certain sets of real numbers. *Duke Math. J.*, 14 :315–321, 1947.

[56] M. El Marraki, N. Hanusse, J. Zipperer, and A. Zvonkin. Cacti, braids and complex polynomials. *Sém. Lothar. Combin.*, 37 :Art. B37b, 36 pp. (electronic), 1996.

[57] B. Eynard. *Gravitation quantique bidimensionnelle et matrices aléatoire.* PhD thesis, Université Paris 6, 1995.

[58] C. L. Ezell. Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 243 :123–133, 1978.

[59] P. Flajolet, Z. Gao, A. Odlyzko, and B. Richmond. The distribution of heights of binary trees and other simple trees. *Combin. Probab. Comput.*, 2(2) :145–156, 1993.

[60] P. Flajolet and A. Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Discrete Math.*, 3(2) :216–240, 1990.

[61] P. Flajolet and R. Sedgewick. The average case analysis of algorithms : Complex asymptotics and generating functions. Research Report 2026, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1993.

[62] P. Flajolet and M. Soria. Gaussian limiting distributions for the number of components in combinatorial structures. *J. Combin. Theory Ser. A*, 53(2) :165–182, 1990.

[63] P. Flajolet and M. Soria. The cycle construction. *SIAM J. Discrete Math.*, 4(1) :58–60, 1991.

[64] P. Flajolet, P. Zimmermann, and B. Van Cutsem. A calculus of random generation. In *Algorithms—ESA '93 (Bad Honnef, 1993)*, pages 169–180. Springer, Berlin, 1993.

[65] P. Flajolet, P. Zimmermann, and B. Van Cutsem. A calculus for the random generation of labelled combinatorial structures. *Theoret. Comput. Sci.*, 132(1-2) :1–35, 1994.

[66] Z Gao. The number of rooted 2-connected triangular maps on the projective plane. *J. Combin. Theory Ser. B*, 53(1) :130–142, 1991.

[67] Z. Gao. A pattern for the asymptotic number of rooted maps on surfaces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 64(2) :246–264, 1993.

[68] A. Giorgetti. *Cartes combinatoires (titre provisoire)*. PhD thesis, Université de Marne-la-vallée, 1998.

[69] I. P. Goulden. A differential operator for symmetric functions and the combinatorics of multiplying transpositions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344(1) :421–440, 1994.

[70] I. P. Goulden, J. L. Harer, and D. M. Jackson. The virtual euler characteristic of the moduli spaces of real and complex algebraic curves. manuscript, disponible sur `http ://watdragon.uwaterloo.ca/ dmjackso/`, September 1996.

[71] I. P. Goulden and D. M. Jackson. *Combinatorial enumeration*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics.

[72] I. P. Goulden and D. M. Jackson. The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. *European J. Combin.*, 13(5) :357–365, 1992.

[73] I. P. Goulden and D. M. Jackson. Symmetric functions and Macdonald's result for top connexion coefficients in the symmetric group. *J. Algebra*, 166(2) :364–378, 1994.

[74] I. P. Goulden and D. M. Jackson. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(3) :873–892, 1996.

[75] I. P. Goulden and D. M. Jackson. Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials. *Canad. J. Math.*, 48(3) :569–584, 1996.

[76] I. P. Goulden and D. M. Jackson. Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(1) :51–60, 1997.

[77] I. P. Goulden and D. M. Kulkarni. Multivariable Lagrange inversion, Gessel-Viennot cancellation, and the matrix tree theorem. *J. Combin. Theory Ser. A*, 80(2) :295–308, 1997.

[78] I. P. Goulden and S. Pepper. Labelled trees and factorizations of a cycle into transpositions. *Discrete Math.*, 113(1-3) :263–268, 1993.

[79] A. Goupil and G. Schaeffer. Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *Europ. J. Combinatorics*, 1998. à paraître.

[80] L. Granboulan. *Calcul d'objets géométriques à l'aide de méthodes algébriques et numérique*. PhD thesis, Université Paris 7, 1997.

[81] J. L. Gross and T. W. Tucker. *Topological graph theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1987. A Wiley-Interscience Publication.

[82] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. In L. Schneps and P. Lochak, editors, *Geometric galois actions*, volume 242 of *Lecture Notes in Math.* Cambridge University Press, 1997.

[83] A. M. Hamel, J. Gareth, and C. K. Ronald. Trees, permutations and characters. manuscript, 1996.

[84] N. Hanusse. *Cartes, constellations et groupes : questions algorithmiques.* PhD thesis, Université Bordeaux I, 1997.

[85] F. Harary, G. Prins, and W. T. Tutte. The number of plane trees. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 67=Indag. Math.*, 26 :319–329, 1964.

[86] J. Harer and D. Zagier. The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(3) :457–485, 1986.

[87] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. Dividing a graph into triconnected components. *SIAM J. Comput.*, 2 :135–158, 1973.

[88] A. Hurwitz. über riemann'sche flächen mit gegebenen verzweignungspunkten. *Math. Ann.*, 39 :1–60, 1891.

[89] B. Jackson and N. C. Wormald. Longest cycles in 3-connected planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 54(2) :291–321, 1992.

[90] D. M. Jackson. Counting cycles in permutations by group characters, with an application to a topological problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299(2) :785–801, 1987.

[91] D. M. Jackson. On an integral representation for the genus series for 2-cell embeddings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344(2) :755–772, 1994.

[92] D. M. Jackson. The genus series for maps. *J. Pure Appl. Algebra*, 105(3) :293–297, 1995.

[93] D. M. Jackson. Algebraic and analytic approaches for the genus series for 2-cell embeddings on orientable and nonorientable surfaces. In *Formal power series and algebraic combinatorics (New Brunswick, NJ, 1994)*, volume 24 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 115–132. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[94] D. M. Jackson, M. J. Perry, and T. I. Visentin. Factorisations for partition functions of random Hermitian matrix models. *Comm. Math. Phys.*, 179(1) :25–59, 1996.

[95] D. M. Jackson and L. B. Richmond. The asymptotic behaviour of the number of three-connected triangulations of the disk, with a reflective symmetry in a line. *Combinatorica*, 12(2) :149–153, 1992.

[96] D. M. Jackson and T. I. Visentin. A character-theoretic approach to embeddings of rooted maps in an orientable surface of given genus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322(1) :343–363, 1990.

[97] D. M. Jackson and T. I. Visentin. Character theory and rooted maps in an orientable surface of given genus : face-colored maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322(1) :365–376, 1990.

[98] B. Jacquard. *Cartes et Arbres : énumération, génération et dessins.* PhD thesis, LIX, École Polytechnique, 91126 Palaiseau, France, 1997.

[99] B. Jacquard and G. Schaeffer. A bijective census of nonseparable planar maps. *J. Combin. Theory Ser. A*, 83(1) :1–20, 1998.

[100] A. Jacques. Sur le genre d'une paire de substitutions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 267 :A625–A627, 1968.

[101] S. Janson, D. E. Knuth, T. Łuczak, and B. Pittel. The birth of the giant component. *Random Structures Algorithms*, 4(3) :231–358, 1993. With an introduction by the editors.

[102] G. Jones and D. Singerman. Belyĭ functions, hypermaps and Galois groups. *Bull. London Math. Soc.*, 28(6) :561–590, 1996.

[103] M. Karoński. Random graphs. In *Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 351–380. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[104] *LEDA, Environnement pour la manipulation de graphes.*

[105] A.B. Lehman. A bijective census of rooted planar maps. In *Communication at Ontario Math. Conference*, 1970.

[106] V. A. Liskovets. A census of nonisomorphic planar maps. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*, pages 479–494. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[107] V. A. Liskovets. A pattern of asymptotical vertex valency distributions in planar maps. Technical report, Technische Universität Dresden, septembre 1997.

[108] M. Lothaire. *Combinatorics on words.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1983. A collective work by Dominique Perrin, Jean Berstel, Christian Choffrut, Robert Cori, Dominique Foata, Jean Eric Pin, Guiseppe Pirillo, Christophe Reutenauer, Marcel-P. Schützenberger, Jacques Sakarovitch and Imre Simon, With a foreword by Roger Lyndon, Edited and with a preface by Perrin.

[109] M. Lothaire. *Combinatorics on words.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Roger Lyndon and a preface by Dominique Perrin, Corrected reprint of the 1983 original, with a new preface by Perrin.

[110] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[111] A. Machì. The Riemann-Hurwitz formula for the centralizer of a pair of permutations. *Arch. Math. (Basel)*, 42(3) :280–288, 1984.

[112] A Machì. Sur les représentations des permutations impaires. *European J. Combin.*, 13(4) :273–277, 1992.

[113] M. Marcus. *Cartes, hypercartes et diagrammes de cordes.* PhD thesis, Université Bordeaux I, 1996.

[114] W. S. Massey. *Algebraic topology : an introduction.* Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

[115] A. D. Mednykh. Nonequivalent coverings of riemann surfaces with a prescribed ramification type. *Siberian Math. J.*, 25 :606–625, 1984.

[116] P. Moszkowski. A solution to a problem of Dénes : a bijection between trees and factorizations of cyclic permutations. *European J. Combin.*, 10(1) :13–16, 1989.

[117] R. C. Mullin and P. J. Schellenberg. The enumeration of c-nets via quadrangulations. *J. Combinatorial Theory*, 4 :259–276, 1968.

[118] A. M. Odlyzko. Asymptotic enumeration methods. In *Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 1063–1229. Elsevier, Amsterdam, 1995.

[119] P. Ossona de Mendez. *Orientations bipolaires.* PhD thesis, École des Hautes Études en Sciences Sociales, 1994.

[120] D. Poulalhon. Graphes et décompositions de permutations. Mémoire de DEA, juillet 1997.

[121] G. N. Raney. Functional composition patterns and power series reversion. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94 :441–451, 1960.

[122] J.-L. Rémy. Un procédé itératif de dénombrement d'arbres binaires et son application à leur génération aléatoire. *RAIRO Inform. Théor.*, 19(2) :179–195, 1985.

[123] L. B. Richmond and N. C. Wormald. Almost all quadrangular dissections of the disc are asymmetrical. *Math. Chronicle*, 19 :63–71, 1990.

[124] L. B. Richmond and N. C. Wormald. Almost all maps are asymmetric. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1) :1–7, 1995.

[125] B. E. Sagan. *The symmetric group.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1991. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.

[126] L. Schneps, editor. *The Grothendieck theory of Dessins d'enfants*, volume 200 of *Lecture Notes in Math.* Cambridge University Press, 1994.

[127] R. Sedgewick and P. Flajolet. *An Introduction to the Analysis of Algorithms.* Addison-Wesley Publishing Company, 1996. 512 pages. (ISBN 0-201-40009-X).

[128] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, revised edition, 1978.

[129] J.-P. Serre. *Topics in Galois theory.* Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992. Lecture notes prepared by Henri Damon [Henri Darmon], With a foreword by Darmon and the author.

[130] R. P. Stanley. Factorization of permutations into n-cycles. *Discrete Math.*, 37(2-3) :255–262, 1981.

[131] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.

[132] E. Steinitz. Polyeder und raumeinteilungen. In *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, volume Band 3 (Geometrie) Teil 3AB12, pages 1–139. Leipzig, Berlin : B. G. Teubner., 1922.

[133] V. Strehl. Minimal transitive products of transpositions—the reconstruction of a proof of A. Hurwitz. *Sém. Lothar. Combin.*, 37 :Art. S37c, 12 pp. (electronic), 1996.

[134] W. T. Tutte. Convex representations of graphs. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 10 :304–320, 1960.

[135] W. T. Tutte. A census of Hamiltonian polygons. *Canad. J. Math.*, 14 :402–417, 1962.

[136] W. T. Tutte. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14 :21–38, 1962.

[137] W. T. Tutte. A census of slicings. *Canad. J. Math.*, 14 :708–722, 1962.

[138] W. T. Tutte. A new branch of enumerative graph theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 :500–504, 1962.

[139] W. T. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 :249–271, 1963.

[140] W. T. Tutte. How to draw a graph. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 13 :743–767, 1963.

[141] W. T. Tutte. On the enumeration of planar maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :64–74, 1968.

[142] W. T. Tutte. On the enumeration of four-colored maps. *SIAM J. Appl. Math.*, 17 :454–460, 1969.

[143] W. T. Tutte. Duality and trinity. In *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973 ; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. III*, pages 1459–1472. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10, Amsterdam, 1975. North-Holland.

[144] W. T. Tutte. On the enumeration of convex polyhedra. *J. Combin. Theory Ser. B*, 28(2) :105–126, 1980.

[145] W. T. Tutte. *Graph theory*, volume 21 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1984. With a foreword by C. St. J. A. Nash-Williams.

[146] A. Vasseur. Communication privée.

[147] X. Viennot. Combinatoire énumérative. Cours donnés à l'École Normale Supérieure, 1992.

[148] J. S. Vitter and P. Flajolet. Average-case analysis of algorithms and data structures. In *Handbook of theoretical computer science, Vol. A*, pages 431–524. Elsevier, Amsterdam, 1990.

[149] D. W. Walkup. How many ways can a permutation be factored into two n-cycles ? *Discrete Math.*, 28(3) :315–319, 1979.

[150] T. R. S. Walsh and A. B. Lehman. Counting rooted maps by genus. I. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 13 :192–218, 1972.

[151] H. Whitney. A set of topological invariants for graphs. *Amer. J. Math.*, 55 :231–235, 1933.

[152] H. S. Wilf. *Combinatorial algorithms : an update.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989.

[153] N. C. Wormald. On the frequency of 3-connected subgraphs of planar graphs. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 34(2) :309–317, 1986.

[154] D. Zagier. On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups. *Nieuw Arch. Wisk. (4)*, 13(3) :489–495, 1995.

[155] A. Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration : an accessible introduction. *Math. Comput. Modelling*, 26(8-10) :281–304, 1997. Combinatorics and physics (Marseilles, 1995).

[156] A. Zvonkin. How to draw a group ? *Discrete Math.*, 180(1-3) :403–413, 1998.

Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires

Résumé : Cette thèse présente des algorithmes de génération aléatoire et des résultats d'énumération pour les plongements de graphes ou *cartes*. Une première partie est consacrée aux cartes planaires. La conjugaison d'arbres y est introduite et permet d'expliquer et de généraliser des résultats d'énumération de W.T. Tutte et d'A. Hurwitz. Dans le même temps, des algorithmes de génération aléatoire uniforme sont obtenus pour des familles élémentaires de cartes. Une méthode d'extraction/rejet permet alors d'étendre de manière significative leur domaine d'application et leur efficacité. En particulier sont traités les cas jusqu'ici inaccessibles des polyèdres convexes et des graphes planaires maximaux. L'étude de la complexité de ces algorithmes fait appel à des méthodes analytiques. Comme premier exemple significatif d'application expérimentale des générateurs, une conjecture sur le diamètre des cartes planaires aléatoires est présentée. Dans une seconde partie les plongements dans les surfaces de genres supérieurs sont abordés. Une bijection permet de donner un codage de ces cartes à l'aide de cartes à une face. Le reste de la thèse est consacré à obtenir des résultats d'énumération, qui unifient les résultats connus pour cette famille.
Mots-clés : génération aléatoire, cartes, planarité, polyèdres, triangulations, énumération, arbres, conjugaison, combinatoire bijective, plongements, revêtements, constantes de structure.

Conjugation of trees and random combinatorial maps

Abstract : Random generation algorithms are presented together with enumeration results for combinatorial maps (*i.e.* embeddings of graphs in surfaces). The first part is devoted to planar maps. Conjugation of trees is introduced and used to explain and generalize some results of W.T. Tutte and A. Hurwitz. At the same time, uniform random generation algorithms are obtained for some elementary families of maps. Using a new extraction/rejection method, we are then able to extend these generators to a wide range of planar maps, including convex polyhedra and maximal planar graphs, so far unreachable. In order to prove that they are efficient, a combinatorial scheme is introduced and studied, using a two-variable saddle point analysis. As a first significant example of experimental study using these generators, a conjecture is presented on the diameter of random planar maps. The second part of this thesis deals with embeddings in surfaces of higher genus. A correspondence is given using maps with one face. The rest of this thesis addresses the problem of counting the latter maps according to their vertex degree distribution.
Keywords : random generation, random sampling, maps, planarity, polyhedra, triangulations, enumeration, trees, conjugation, bijective combinatorics, embeddings, coverings, connection coefficients.

Thèse préparée conjointement
au Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique
et au Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique.

LIX
École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex

LaBRI
Université Bordeaux I
33405 Talence Cedex