Une bijection simple pour les cartes orientables

Michel Marcus* et Gilles Schaeffer†

Résumé. Cori et Vauquelin ont montré que les cartes planaires pointées sont en bijection avec les arbres bien étiquetés. Nous présentons une bijection plus simple et qui s'étend en genre supérieur. De plus cette bijection nous permet de montrer que la distribution des étiquettes des arbres bien étiquetés s'interprète comme distribution des distances à la racine dans les quadrangulations biparties. S'en suit une explication intuitive des prédictions faites par les physiciens Ambjørn et Watabiki dans le cadre de la gravité quantique pure discrétisée, selon lesquelles ces distances sont typiquement de l'ordre de $n^{1/4}$ dans une grande quadrangulation aléatoire à n faces de genre fixé g. Dans le cas planaire, cette interprétation conduit même à une preuve (cf. Chassaing – Schaeffer, 2002).

Introduction

Cet article traite de graphes dessinés sur $\mathcal{S}_g$ la surface compacte orientée sans bord de genre g (le sphère pour $g = 0$, ou le tore à g trous pour $g \geq 1$). Ces objets mathématiques, largement étudiés depuis les travaux de W. Tutte dans les années soixante, apparaissent en tant que modèles discrets de la gravité quantique pure. Nous formulons tout d'abord nos résultats en termes combinatoires, avant d'en donner une relecture dans le langage de la physique. Présentons maintenant les deux acteurs principaux de ce travail.

Les cartes. Une *carte de genre g* est un plongement propre (sans croisement d'arêtes) d'un graphe connexe dans $\mathcal{S}_g$ qui définit des faces simplement connexes. Les boucles ainsi que les arêtes multiples sont autorisées. Une carte est *pointée* si elle possède une *racine*, *i.e.* une face distinguée. (Les énoncés de l'article s'étendent aux cartes enracinées — avec une *arête* racine — via un choix immédiat mais fastidieux de convention d'enracinement pour chaque transformation.) Dans toute la suite, deux cartes sont considérées comme identiques s'il existe un homéomorphisme de la surface de plongement (respectant l'orientation) qui envoie l'une sur l'autre (racine comprise le cas échéant).

Lorsque $g = 0$, la carte est sur la sphère et on parle de *carte planaire*. Dans tous les cas, on dispose de la formule d'Euler, qui lie pour une carte de genre g, les nombres n d'arêtes, f de faces et s de sommets : $f + s = n + 2 - 2g$.

Les arbres. Un *arbre* est une carte planaire à une seule face. Plus généralement on parlera de *g-arbre* pour désigner une carte à une seule face sur $\mathcal{S}_g$. Une carte *bien étiquetée* est une carte dont les sommets portent des étiquettes entières telle que les étiquettes de deux sommets adjacents diffèrent au plus d'une unité et la plus petite étiquette est 1. Nous considérerons particulièrement les g-arbres bien étiquetés.

*LaBRI, Université Bordeaux I, `courriel:marcus@labri.fr`
†LORIA, CNRS, `courriel:Gilles.Schaeffer@loria.fr`

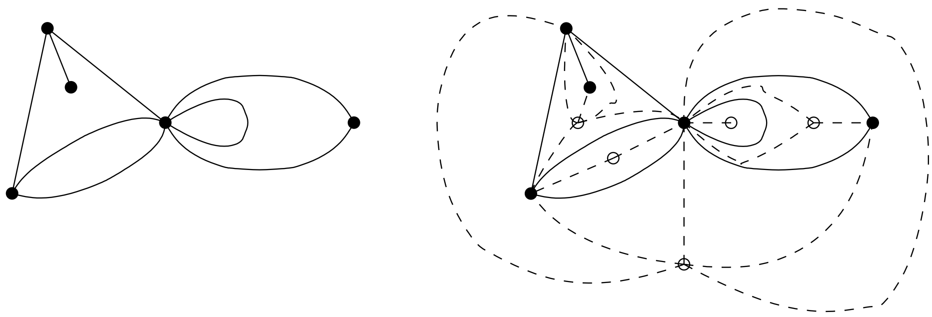

Fig. 1 – Une carte planaire et sa triangulation. La quadrangulation apparaît en pointillés.

L'objet de cet article est de donner une construction élémentaire, non récursive, de la bijection suivante :

Théorème 1 *Il existe une bijection entre les cartes pointées à n arêtes et les arbres bien étiquetés à n arêtes de même genre. Le nombre de sommets de la carte est de plus envoyé sur le nombre d'étiquettes impaires.*

Une première bijection entre cartes planaires et arbres bien étiquetés a été obtenue par Cori et Vauquelin [CV81]. Leur construction fait récursivement appel à une transformation de la face racine, *l'éclatement*, qui a pour effet d'agrandir cette dernière et qui finit donc par produire un arbre. L'étiquette d'un sommet correspond au nombre d'éclatements nécessaires à le faire entrer dans la face racine. Cette bijection a été étendue aux cartes orientées de genre quelconque par Marcus [MV95]. Une caractérisation des arbres bien étiquetés correspondant aux cartes planaires non-séparables a été proposée par Dulucq et Penaud et démontrée par Jacquard et Schaeffer [Ja97].

Une bijection différente de celle-ci a été obtenue par Arquès [Arq86] qui permet de caractériser les arbres associés aux cartes bicoloriées ou hypercartes. Cependant elle ne paraît pas s'étendre aux cartes de genre supérieur ou aux cartes non-séparables.

En cherchant à comprendre le paramètre codé par les étiquettes dans la bijection de Cori et Vauquelin, nous avons été amenés à considérer la quadrangulation associée à une carte : les étiquettes s'interprètent alors simplement comme les distances dans cette quadrangulation et on arrive à une bijection explicite et directe, nécessitant moins de manipulations que l'éclatement. C'est cette bijection qui fait l'objet principal de cet article.

La distribution des distances à un sommet dans les cartes aléatoires fait l'objet d'une abondante littérature en physique mathématique. Une première section présente les conséquences de notre résultat dans ce contexte. La suite de l'article est consacré à notre construction. Nous rappelons tout d'abord une bijection classique entre cartes et quadrangulations biparties. Puis nous donnons quelques propriétés de la distance dans une quadrangulation. Ces résultats préliminaires sont utiles à la description de la bijection dans la troisième partie. Enfin la preuve du théorème est complétée par l'étude de la construction réciproque.

Dans la suite, le genre et la surface de travail sont fixés une fois pour toute et aucune transformation ne conduira à en changer. Ceci permet de se passer des codages en termes de permutation et de garder une vision géométrique peut-être plus parlante pour l'intuition.

Remerciements. Les auteurs remercient chaleureusement Robert Cori pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce projet et les passionnantes discussions qu'il a suscitées.

1 Distance et géométries aléatoires de la gravité quantique

Le livre de J. Ambjørn, B. Durhuus et T. Johnsonn, *Quantum gravity, a statistical field theory approach* [Abj97] présente différentes approches de la gravité quantique à partir de discrétisations de l'espace. On trouvera en particulier dans ce livre des références bibliographiques à de nombreux articles sur le sujet abordé ci-dessous.

En dimension deux — le seul cas jusqu'ici attaquable mathématiquement — un modèle de discrétisation étudié pour la gravité quantique pure est celui de la distribution uniforme sur les cartes de genre et nombre d'arêtes fixés. Différentes variantes de telles *géométries aléatoires discrètes* sont utilisées par les physiciens : ainsi on peut remplacer la distribution uniforme sur les cartes par celle sur les triangulations (toutes faces de degré trois) ou les quadrangulations (toutes les faces de degré quatre). Selon un "principe d'universalité", les propriétés "qualitatives" de ces géométries aléatoires ne dépendent pas significativement des détails locaux du modèle considéré.

Une de ces propriétés universelles largement étudiée est la *dimension de Hausdorff interne* du modèle, dont il est admis qu'elle doit être égale à quatre, indépendamment de la variante exacte considérée. En termes combinatoires, il s'agit dans une carte aléatoire à n sommets ayant un sommet s distingué, d'estimer le nombre $X_n(k)$ de sommets à distance k de s et plus précisément de démontrer la convergence en loi

$$\frac{X_n(\lfloor tn^{1/4} \rfloor)}{n^{1/4}} \xrightarrow{(d)} X(t)$$

vers une variable aléatoire continue $X(t)$ de support $[0, \infty[$. Ce problème a été abordé sous plusieurs angles en physique et au moins deux calculs heuristiques ont été proposés pour les triangulations, qui montrent dans le cas planaire que le seul exposant pour lequel une convergence est possible est $1/4$, et que donc la dimension est quatre (voir [Abj97] et les références s'y trouvant).

Au cours de notre construction nous obtenons le corollaire suivant pour les quadrangulations biparties.

Corollaire 1 *Il existe une bijection entre les quadrangulations biparties à n arêtes ayant un sommet s distingué et les arbres bien étiquetés à n arêtes de même genre. De plus, pour tout $k > 0$, le nombre de sommets à distance k de s dans une quadrangulation est envoyé sur le nombre d'étiquettes k dans l'arbre associé.*

Nous obtenons donc un nouveau modèle, en termes d'arbres bien étiquetés, pour la distribution des distances dans les quadrangulations. Étant donnée la distribution uniforme sur les arbres bien étiquetés à n arêtes, on considère le nombre $\lambda_n(k)$ d'étiquettes égales à k comme une famille de variables aléatoires.

Ce modèle permet de prouver rigoureusement une convergence en distribution pour le cas des quadrangulations planaires [CS02]. Il permet de plus de donner une justification intuitive de la valeur $1/4$ de l'exposant : un arbre bien étiqueté aléatoire est, en première approximation, un arbre planaire aléatoire sur les branches duquel vivent des marches aléatoires positives (les suites d'étiquettes) ; la plupart des sommets d'un arbre planaire aléatoire sont à profondeur $\Theta(\sqrt{n})$, de sorte que les marches sur la plupart des branches sont de longueur $\Theta(\sqrt{n})$; finalement les valeurs prises par une marche aléatoire positive de longueur $\sqrt{n}$ sont typiquement de l'ordre de $n^{1/4}$, d'où l'ordre typique des étiquettes de l'arbre et donc des distances dans les quadrangulations. En genre supérieur, on attend que l'exposant reste $1/4$, la géométrie d'un g-arbre aléatoire étant largement dominée par ses sous-arbres planaires.

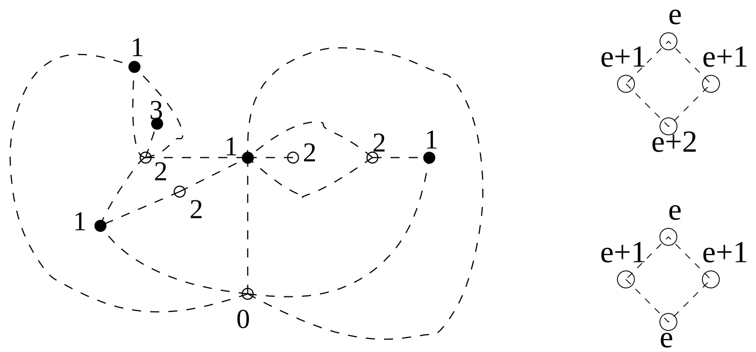

FIG. 2 – Numérotation par la distance et configurations possibles autour d'une face.

2 Préliminaires sur les quadrangulations

2.1 Quadrangulation associée à une carte

Une *triangulation* est une carte dont toutes les faces ont degré trois. Une *quadrangulation* est une carte dont toutes les faces ont degré quatre. Une carte est *bipartie* si ses sommets ont deux couleurs et ses arêtes joignent des sommets de couleurs distinctes. Une quadrangulation planaire est toujours bipartie, mais ce n'est pas nécessairement vrai en genre supérieur.

On considère une carte C de genre g, dont les sommets et les arêtes sont déclarés noirs. Les constructions décrites ci-dessous sont voisines de la carte dérivée de Tutte, introduite dans [Tut63]. La figure 1 illustre ces constructions.

La triangulation $\mathcal{T}(C)$. Dans chaque face de C, disposons un nouveau sommet blanc. Les faces sont simplement connexes et peuvent donc être triangulées à partir de ces sommets blancs. Les arêtes ainsi créées sont *bicolores* (chacune lie un sommet noir à un blanc). La carte obtenue est une triangulation, $\mathcal{T}(C)$, dont chaque triangle possède un côté noir.

La quadrangulation $\mathcal{Q}(C)$. La quadrangulation $\mathcal{Q}(C)$ est obtenue à partir de $\mathcal{T}(C)$ par suppression des arêtes noires. Par construction, chacune des arêtes noires de $\mathcal{T}(C)$ est bordée par deux faces triangulaires distinctes, de sorte que les faces de $\mathcal{Q}(C)$ sont simplement connexes et de degré quatre. Toutes les arêtes de $\mathcal{Q}(C)$ sont bicolores. Si C est pointée, alors on distingue le sommet blanc correspondant dans $\mathcal{Q}(C)$.

Proposition 1 *L'application $\mathcal{Q}$ est une bijection de l'ensemble des cartes à n arêtes, s sommets et f faces sur l'ensemble des quadrangulations biparties sur la même surface à $s+f$ sommets dont s noirs et n faces.*

Démonstration : La bijection réciproque s'obtient en plaçant dans chaque face de la quadrangulation bipartie une arête reliant les deux sommets noirs (éventuellement confondus) qui la bordent. Chaque face est ainsi divisée en deux faces triangulaires. Ces faces triangulaires sont organisées en cycle autour de chaque sommet blanc. Lorqu'on efface les arêtes incidentes à un sommet blanc, les faces triangulaires qui le bordent sont réunies en une face simplement connexe. De plus la carte ainsi obtenue est connexe car tout chemin dans la quadrangulation bipartie peut être converti en un chemin qui contourne chaque sommet blanc par le bord de la face qui le contient. L'image de cette carte par $\mathcal{Q}$ redonne la quadrangulation bipartie. □

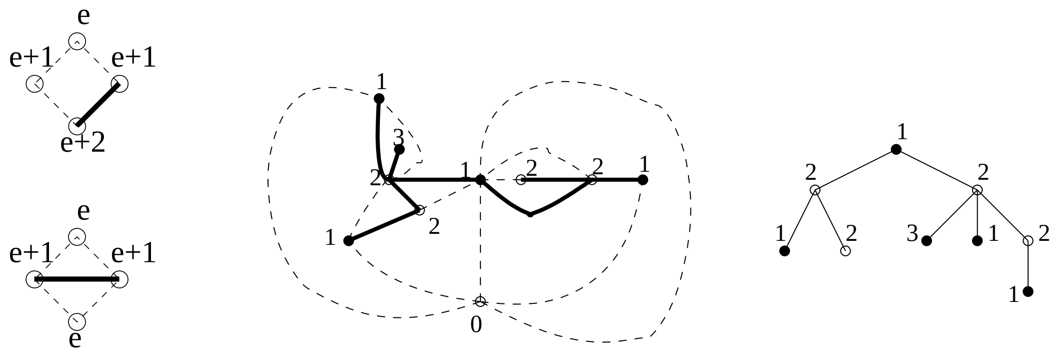

FIG. 3 – Règles de sélection des arêtes marquées et un exemple planaire.

2.2 Propriété de la distance dans une quadrangulation bipartie

On définit une distance dans le graphe sous-jacent à la carte de la façon naturelle : si x et y sont deux sommets de $\mathcal{Q}(C)$, $d(x,y)$ est le minimum du nombre d'arêtes traversées pour aller de x à y dans le graphe. Ainsi, si x et y sont distincts et liés par une arête, $d(x,y)=1$.

Supposons la carte C pointée et notons s_0 le sommet blanc correspondant de $\mathcal{Q}(C)$. On définit un étiquetage ϕ de la carte $\mathcal{Q}(C)$ par $\phi(x)=d(x,s_0)$ pour tout sommet x (cf. figure 2).

L'étiquetage ainsi obtenu vérifie les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 1 *Si x et y sont liés par une arête, $|\phi(x)-\phi(y)|=1$. En effet la quadrangulation étant bipartie, un sommet x est blanc si et seulement si $\phi(x)$ est pair, noir si et seulement si $\phi(x)$ est impair.*

Corollaire 2 *Autour d'une face, quatre sommets sont rencontrés dans l'ordre : un noir x_1, un blanc y_1, un noir x_2 et un blanc y_2. Ces sommets vérifient au moins une des deux égalités $\phi(x_1)=\phi(x_2)$ ou $\phi(y_1)=\phi(y_2)$ (cf. figure 2).*

On qualifie une face de *simple* lorsqu'une seule égalité est vérifiée et de *confluente* sinon. Il convient de remarquer qu'on peut avoir $x_1=x_2$ ou $y_1=y_2$ (et même les deux hors du cas planaire).

3 Construction de l'arbre bien étiqueté

Soit C une carte pointée sur $\mathcal{S}_g$ et $\mathcal{Q}(C)$ sa quadrangulation étiquetée. La carte $\mathcal{Q}'(C)$ est obtenue en divisant toutes les faces confluentes de $\mathcal{Q}(C)$ en deux faces triangulaires par une arête joignant les deux sommets d'étiquettes maximales.

Nous allons montrer que le sous ensemble $\mathcal{A}(C)$ des arêtes de $\mathcal{Q}'(C)$ sélectionnées ci dessous forme avec les sommets qui lui sont incidents une carte sur $\mathcal{S}_g$ (cf. figure 3) :

- Dans chaque face confluente de $\mathcal{Q}(C)$, on sélectionne l'arête ajoutée pour former $\mathcal{Q}'(C)$.
- Pour chaque face simple de $\mathcal{Q}(C)$, une arête est sélectionnée selon la règle suivante : soit f une face simple et s le sommet d'étiquette maximale dans f ; s' est le premier sommet rencontré à partir de s en parcourant la face f par son bord dans le sens direct. On dira dans ce cas que la face f *marque* l'arête reliant s et s'. On remarque ici que l'orientabilité intervient dans l'application de cette règle.

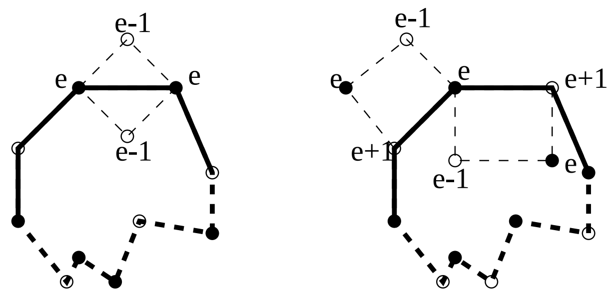

FIG. 4 – Impossibilité des cycles dans le cas planaire.

La figure 3 illustre l'application de ces règles de sélection dans un cas planaire. Le théorème suivant est le résultat principal de notre article et implique naturellement le théorème 1.

Théorème 2 *L'application $\mathcal{A}$ définie par la construction précédente est une bijection de l'ensemble des cartes pointées de genre g à n arêtes et s sommets sur l'ensemble des g-arbres bien étiquetés à n arêtes et s étiquettes impaires.*

Dans cette section nous allons montrer que $\mathcal{A}(C)$, *a priori* défini comme un sous ensemble des arêtes de $\mathcal{Q}'(C)$ et les sommets qui lui sont incidents, est en fait un g-arbre bien étiqueté à n arêtes. La preuve que l'application est inversible fait l'objet de la section suivante.

Proposition 2 *L'application $\mathcal{A}$ envoie une carte C à n arêtes, s sommets et f faces sur un arbre bien étiqueté à n arêtes de même genre, avec s étiquettes impaires et $f-1$ paires.*

Remarquons tout d'abord que le nombre d'arêtes de $\mathcal{A}(C)$ est n et le nombre de sommets $f+s-1$: puisqu'une arête a été sélectionnée pour chacune des n faces de $\mathcal{Q}(C)$, il nous suffit de vérifier qu'une même arête n'a pu être choisie deux fois ; or une arête étiquetée $\{e, e+1\}$ de $\mathcal{Q}(C)$ est bordée par au plus deux faces simples distinctes et ne peut être marquée que par celle de gauche pour son orientation $e+1 \to e$. Il y a donc n arêtes. Enfin tout sommet, sauf le sommet 0 est incident à un sommet d'étiquette inférieure et donc à une arête sélectionnée ; ceci donne le nombre de sommets et la parité des étiquettes est donnée par la propriété 1.

On donne une première démonstration valable uniquement dans le cas planaire, mais très intuitive puis une démonstration générale.

Démonstration de la proposition dans le cas planaire.

La planarité de C et donc de $\mathcal{Q}'(C)$ garantit que chaque composante connexe de $\mathcal{A}(C)$ est planaire. Si on montre que $\mathcal{A}(C)$ est sans cycle, on sera donc en présence d'une forêt d'arbres ; or la formule d'Euler appliquée à C donne $f+s=n+2$ donc, $s'=n+1$, ce qui implique pour une forêt d'arbres qu'elle n'est constituée que d'un arbre.

Supposons donc qu'il y ait un cycle et soit $e \geqslant 0$ la valeur de la plus petite étiquette portée par un sommet de ce cycle. Soit toutes les étiquettes sont égales à e, soit il y a dans le cycle une arête $(e, e+1)$ et une arête $(e+1, e)$. Les règles de marquage des arêtes de $\mathcal{A}(C)$ font en tout cas que dans chacune des deux composantes connexes de $\mathcal{Q}'(C)$ définies par le cycle existe un sommet étiqueté $e-1$, comme on le voit sur la figure 4. Or le sommet étiqueté 0 appartient à l'une de ces deux composantes et tout chemin allant de ce sommet marqué à un sommet de l'autre composante doit passer par un sommet du cycle, dont l'étiquette est supérieure ou égale à e (théorème de Jordan). Il est donc exclu qu'il y ait un sommet étiqueté $e-1$ dans les deux composantes. Il n'y a donc pas de cycle et $\mathcal{A}(C)$ est un arbre. $\square$

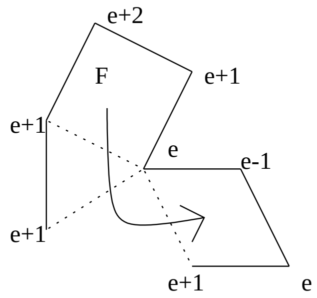

Fig. 5 – Partant de $\mathcal{F}$ d'étiquette minimale e, on atteint une face d'étiquette minimale $e-1$ en ne traversant que des arêtes non marquées.

Démonstration de la proposition dans le cas général.

La méthode utilisée dans le cas planaire ne peut pas fonctionner en genre supérieur où les cartes à une seule face possèdent des cycles. On procède donc différemment, en montrant en deux temps que $\mathcal{A}(C)$ possède une seule face et que celle-ci est simplement connexe, ce qui suffit à conclure.

Lemme 1 *Les faces de $\mathcal{Q}'$ peuvent toutes être atteintes à partir d'une face incidente au sommet marqué* 0 *en traversant uniquement des arêtes non marquées. Il n'y a donc qu'une face délimitée par $\mathcal{A}(C)$.*

Démonstration du lemme 1 : Soit $\mathcal{F}$ une face de $\mathcal{Q}'$ non incidente au sommet 0 et soit x le sommet d'étiquette e minimale parmi les trois ou quatre sommets bordant $\mathcal{F}$. Il suffit de montrer qu'on peut atteindre à partir de $\mathcal{F}$ une face bordée par un sommet d'étiquette $e-1$. Les arêtes adjacentes à x bordant $\mathcal{F}$ joignent des sommets d'étiquettes respectives e et $e+1$; pour simplifier la présentation on dira qu'elles sont de la forme $\{e, e+1\}$ (cf. figure 5). L'arête de gauche ne peut être marquée que par $\mathcal{F}$ et ce n'est pas le cas puisque e est minimale autour de $\mathcal{F}$. On peut donc passer de $\mathcal{F}$ à la face voisine à travers cette arête non marquée en tournant autour de x dans le sens direct. Soit la nouvelle face ainsi atteinte admet toujours x comme sommet d'étiquette minimale et on continue à tourner autour de x, soit on a atteint une face d'étiquette minimale $e-1$. Ce dernier cas finit toujours par se produire car le sommet x est par construction relié à au moins un sommet étiqueté $e-1$. On peut donc toujours atteindre par récurrence une face incidente au sommet 0. De plus aucune des arêtes adjacentes au sommet d'étiquette 0 n'est marquée, donc deux faces de $\mathcal{Q}'$ peuvent toujours être reliées à travers des arêtes non marquées. $\square$

On sait donc que $\mathcal{A}(C)$ ne définit qu'une face, mais on ne sait pas encore si celle-ci est simplement connexe. Dans la suite un cycle de faces successivement accessibles à travers des arêtes non marquées sera appelé une *couronne*. Plus précisément, une couronne de longueur $k \geq 2$ dans $\mathcal{Q}'(C)$ est la donnée de

1. un ensemble $\{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ de k arêtes distinctes non marquées,
2. et un ensemble $\{f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ de k faces distinctes telles que les faces f_j et f_{j+1} sont incidentes le long de l'arête a_j pour tout $0 \leq j \leq k-1$. (Les indices étant considérés modulo k.)

On peut en outre sans perte de généralité choisir a_0 et f_0 (et donc toute l'orientation de la couronne) de la façon suivante : soit e_0 minimale parmi les étiquettes des sommets incidents

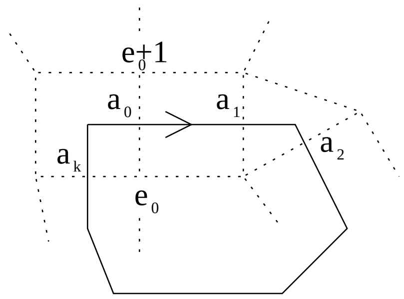

FIG. 6 – Orientation de la couronne.

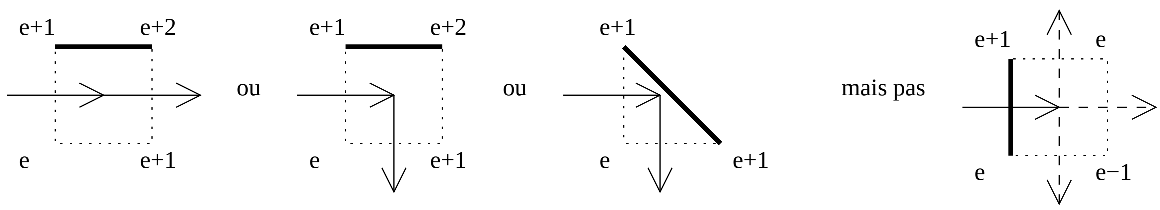

FIG. 7 – Cas de figure possibles et exclus

à la couronne, a_0 est choisie parmi les arêtes de la forme $\{e_0, e_0 + 1\}$. De plus, f_0 est choisie de telle façon qu'en la parcourant par son bord dans le sens direct, lorsqu'on longe a_0, on rencontre en premier le sommet étiqueté e_0. Autrement dit, lorsqu'on traverse a_0 pour passer de f_0 à f_1, on a le sommet e_0 à droite (cf. figure 6). Nous montrons maintenant le lemme suivant :

Lemme 2 *$\mathcal{Q}'$ ne contient qu'une seule couronne, qui est formée des faces bordant le sommet étiqueté* 0.

Démonstration du lemme 2 : Supposons donc qu'il existe une couronne dans $\mathcal{Q}'(C)$; plaçons nous en f_0, et parcourons la couronne en traversant les arêtes $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ dans cet ordre ; nous montrons que les étiquettes rencontrées (celles des sommets adjacents aux arêtes coupées) ne peuvent pas décroître : en effet, étant donnée une arête a_i de la forme $\{e + 1, e\}$, les deux règles de marquages des arêtes impliquent que l'arête a_{i+1} (qui est non marquée) est de la forme $\{e + 1, e\}$ ou $\{e + 2, e + 1\}$ (cf. figure 7).

Par conséquent, les étiquettes rencontrées ne peuvent pas décroître. Or les faces de la couronne forment un cycle et les étiquettes sont donc constantes ; il s'ensuit qu'on fait le tour d'un unique sommet (étiqueté e_0) ; or le seul sommet non-incident à une arête marquée et donc le seul sommet dont on puisse faire le tour est par construction le sommet étiqueté 0. □

Fin de démonstration de la proposition : autour du sommet étiqueté 0, les faces sont incidentes une seule fois à ce sommet et sont organisées en cycle. La suppression des arêtes issues de ce sommet laisse donc une face simplement connexe. Ensuite les autres faces peuvent être ajoutées une à une en effaçant pour chaque nouvelle face exactement une arête. Une fois cette opération terminée on a une face simplement connexe. On en déduit que $\mathcal{A}(C)$ est une carte de genre g ce qui termine la démonstration. □

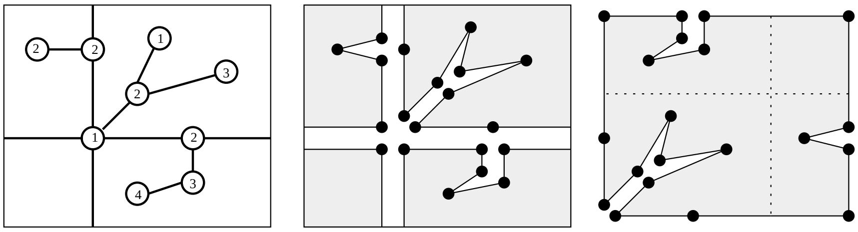

FIG. 8 – Une carte torique et son unique face vue comme polygone.

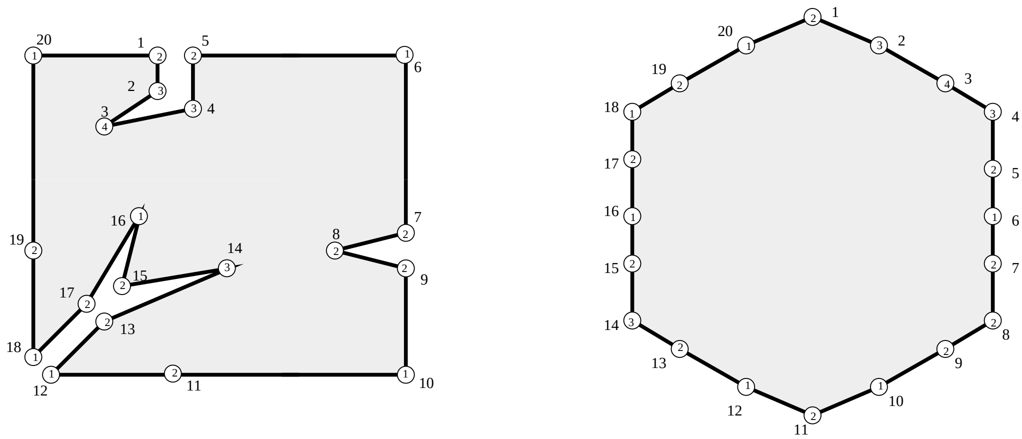

FIG. 9 – La numérotation des sommets du polygone.

4 Construction réciproque

Le but de cette partie est de construire une application $\mathcal{C}$ réciproque de l'application $\mathcal{A}$ obtenue dans la partie précédente.

Soit A une carte bien étiquetée de genre g à n arêtes et une seule face $\mathcal{F}$. La face $\mathcal{F}$ est vue comme un polygone dont les $2n$ côtés sont recollés deux à deux. Numérotons les sommets de 1 à $2n$ dans le sens horaire en terminant par un sommet d'étiquette 1 et appelons e_i l'étiquette du i-ème sommet (de sorte que $e_1 = 2$ ou $e_1 = 1$ et $e_{2n} = 1$). On utilisera uniquement des propriétés relatives à l'ordre des sommets dans les intervalles entre deux sommets étiquetés 1, de sorte que le choix exact du point de départ de la numérotation est indifférent.

La carte $\mathcal{C}(A)$ est définie en trois étapes.

1. On définit d'abord l'application successeur s par

$$s(i) = \begin{cases} \min\{j > i \mid e_j = e_i - 1\} & \text{si } e_i > 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   L'application s est bien définie indépendamment du point de départ de la numérotation.
2. Une carte $\mathcal{R}(A)$ est construite sur S_g en ajoutant un sommet 0 dans la face et en traçant la corde $(i, s(i))$ pour tout i tel que $s(i) \neq i + 1$. La preuve que cette construction est licite découle de la propriété 2 à venir.
3. La suppression des arêtes étiquetées (e, e) de $\mathcal{R}(A)$ donne une quadrangulation bipartie à n faces (propriété 3) qui est l'image par $\mathcal{Q}$ d'une carte à n arêtes. Cette carte est $\mathcal{C}(A)$.

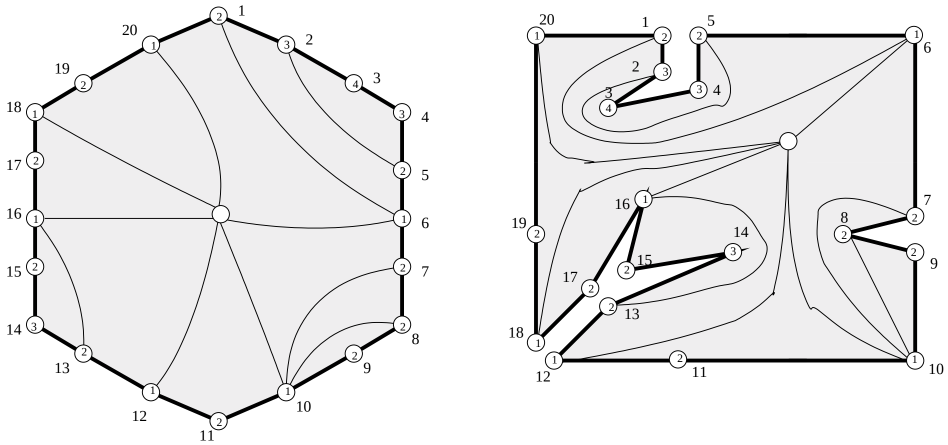

FIG. 10 – Cordes et sommet supplémentaire.

La proposition suivante complète la preuve du théorème 2.

Proposition 3 *L'application $\mathcal{C}$ est la bijection inverse de l'application $\mathcal{A}$.*

Montrons tout d'abord deux propriétés assurant la validité de la construction précédente.

Propriété 2 *Validité de l'étape 2.*
i) le diagramme de cordes obtenu en traçant les cordes $(i, s(i))$ pour $s(i) \neq 0$ est planaire.
ii) dans ce diagramme tous les sommets d'étiquette 1 sont incidents à une même face.

Démonstration : i) supposons que deux cordes $(i, s(i))$ et $(j, s(j))$ se coupent. Quitte à échanger i et j on a $i < j < s(i) < s(j)$. On déduit des 2 premières inégalités et de la définition de s que $e_j > e_{s(i)}$ et des 2 dernières que $e_{s(i)} \geqslant e_j$, ce qui est contradictoire.

ii) Considérons un sommet étiqueté 1 et numéroté i. En longeant le bord du polygone à partir de i dans le sens horaire, on atteint le sommet $i+1$ sans changer de face. Si ce sommet est aussi étiqueté 1, on recommence. Sinon il est étiqueté 2 et il est lié à son successeur $j = s(i+1)$, soit par le bord du polygone si $j = i+2$, soit par une corde. Aucune autre corde n'arrive en $i+1$, on peut donc sans changer de face atteindre j qui est le sommet suivant étiqueté 1 autour du polygone. On atteint ainsi tous les sommets étiquetés 1. $\square$

Propriété 3 *Les faces de $\mathcal{R}(A)$ sont de l'un des deux types décrits figure 11 : elles sont soit triangulaires soit quadrangulaires et sont incidentes à au moins une arête du polygone.*

Démonstration : Soit f une face et j le sommet de numéro maximal de cette face. Si la face est incidente au sommet supplémentaire étiqueté 0, le résultat est immédiat. Sinon, les deux sommets voisins de j dans la face sont numérotés i_1 et i_2 avec $i_1 < i_2 < j$ (cf. figure 11). Ces deux sommets ont pour étiquette $e_j + 1$: en effet l'arête (i_1, j) est une corde donc $j = s(i_1)$. Comme $i_1 < i_2 < j$ ceci implique $e_{i_1} \geqslant e_{i_2} > e_j$ et donc $e_{i_1} = e_{i_2} = e_j + 1$.

Par construction, aucune autre corde ne part de i_1 donc la face est bordée par l'arête $(i_1, i_1 + 1)$ du polygone. Il y a alors 2 cas :

– si $i_1 + 1 = i_2$, la face est triangulaire,

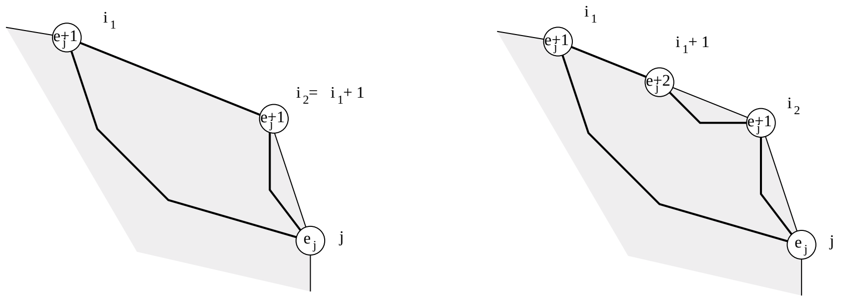

FIG. 11 – Deux cas possibles : triangulaire ou quadragulaire.

– sinon la face est quadrangulaire : en effet le sommet $i_1 + 1$ est étiqueté $e_j + 2$ (sinon la corde $(i_1 + 1, j)$ exclut i_2 de la face) et la corde issue de $i_1 + 1$ va en i_2 (sinon $s(i_1 + 1) \neq i_2$, alors $e_{s(i_1+1)} = e_{i_1+1} - 1 = e_{i_2}$ et la corde $(s(i_1 + 1), j)$ exclut i_2). □

Pour finir de vérifier de la validité de la construction, remarquons que les arêtes joignant deux sommets de même étiquette sont exactement celles qui bordent les faces triangulaires. Leur suppression crée donc bien des faces de degré 4 et donne une quadrangulation bien étiquetée qui correspond d'après la proposition 1 à une unique carte $\mathcal{C}(A)$. De plus les règles de marquage des faces dans la quadrangulation montrent immédiatement que $\mathcal{A}(\mathcal{C}(A)) = A$.

Démonstration de la proposition 3 : Il reste à vérifier qu'inversement $\mathcal{C}(\mathcal{A}(C)) = C$ pour toute carte C. Il suffit de voir que si (i, j) est une arête non marquée de la carte $\mathcal{Q}'(C)$ avec $e_i = e_j - 1$, alors $j = s(i)$. En effet on voit comme cela que les seules cordes possibles sont les $(i, s(i))$. Supposons qu'il puisse exister d'autres cordes et soit (i, j) une telle arête non marquée de $\mathcal{Q}'(C)$ avec $e_i = e_j + 1$ et e_i minimale pour ces hypothèses. La suite $(s(i), s(s(i)), \ldots, s^p(i))$ est bien définie jusqu'à $p = e_j$ (*i.e.* l'étiquette de $s^p(i)$ est 1). De même la suite $(s(j), \ldots, s^{p-1}(j))$. Comme e_i est minimale, toutes les cordes $(s^k(i), s^{k+1}(i))$ et $(s^k(j), s^{k+1}(j))$ appartiennent à la carte, ainsi que les deux arêtes de $s^p(i)$ et de $s^{p-1}(j)$ au sommet supplémentaire étiqueté 0. Or ces arêtes ne peuvent couper l'arête (i, j), ce qui induit une contradiction, le sommet étiqueté 0 ne pouvant être que d'un côté de l'arête. On a donc bien $\mathcal{C}(\mathcal{A}(C)) = C$. □

Références

[Abj97] J. Ambjørn, B. Durhuus and T. Jonsonn. *Quantum gravity, a statistical field theory approach.* Cambridge Monographs on Statistical Physics, 1997.

[Arq86] D. Arquès. Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés. *Discrete Math.*, 58 :11–24, 1986.

[CS02] P. Chassaing and G. Schaeffer. *Random Planar Lattices and Integrated SuperBrownian Excursion.* Prépublication `arXiv:math.CO/0205226`, 44pp, 2002.

[CV81] R. Cori and B. Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5) :1023–1042, 1981.

[Ja97] B. Jacquard. Cartes et Arbres : énumération, génération et dessins. *LIX, École Polytechnique*, 1997, Palaiseau, France.

[MV95] M. Marcus and B. Vauquelin. Un codage des cartes de genre quelconque. In B. Leclerc and J.Y. Thibon, editors, *Séries formelles et combinatoire algébrique, 7ème colloque*, pages 399–416. Université de Marne-la-Vallée, France, June 1995.

[Tut63] W.T. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 :249–271, 1963.