Projet de stage Master 2 MPRI
Propriétés de treillis des complexes de sous-mots

Titre du projet de stage.
Propriétés de treillis des complexes de sous-mots

Mots clés.
Treillis de Tamari
Associaèdre
Théorie des treillis
Complexes simpliciaux et polytopes

Encadrement. Stage coencadré par

Florent Hivert
LRI, Université Paris-Sud, Orsay
✉ LRI, Bât 650 Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France
@ florent.hivert@lri.fr
http://www.lri.fr/~hivert/

Vincent Pilaud
CNRS & LIX, École Polytechnique
✉ LIX, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
@ pilaud@lix.polytechnique.fr
http://www.lix.polytechnique.fr/~pilaud/

Résumé. Les complexes de sous-mots sont des objets de la combinatoire algébrique qui généralisent les réseaux de tri correspondants à certains algorithmes de tri classiques. Ils ont des liens profonds en algèbre et géométrie, notamment dans le calcul de Schubert, l'étude des variétés grassmanniennes et la théorie des algèbres amassées. L'objectif de ce stage est d'étudier les propriétés de treillis des graphes d'échanges (en particulier sur la partie acyclique) de ces complexes de sous-mots.

Complexes de sous-mots. Les algorithmes de tri sont certainement les algorithmes les plus utilisés et les plus fondamentaux en informatique (Knuth leur consacre un volume de *The Art of Computer Programming* [Knu73]). Certains de ces algorithmes peuvent être décrits par des **réseaux de tri**, c'est-à-dire des séquences de commutateurs verticaux reliant des niveaux horizontaux. Le tri d'une permutation sur l'un de ces réseaux est alors un arrangement de courbes sur le réseau qui suivent les valeurs de la permutation. Ces courbes se croisent alors au plus une fois, lorsque les deux valeurs correspondantes étaient inversées dans la permutation de départ. La figure 1 en donne une illustration.

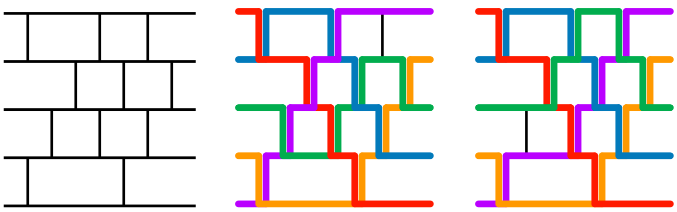

FIGURE 1 – Un réseau de tri (gauche) et deux tris possibles (milieu et droite) reliés par un échange.

Les **complexes de sous-mots** sont des objets de la combinatoire algébrique qui ont été introduits dans les années 2000 par Knutson et Miller [KM04]. Ce sont des généralisations naturelles des réseaux de tris aux groupes de Coxeter finis (des groupes engendrés par des reflexions, qui généralisent le groupe symétrique). Plus précisément, il s'agit de complexes simpliciaux qui encodent les expressions réduites d'un élément d'un groupe de Coxeter W qui forment des sous-mots d'un mot sur les générateurs de W.

Knutson et Miller ont montré que ces complexes sont tous des sphères ou des boules topologiques. En particulier, les facettes de ces complexes sont munis d'une **opération d'échange** qui permet de remplacer une lettre par une autre. Cet échange est illustré sur la figure 1. Le graphe d'échange d'un complexe de sous-mots est naturellement muni d'une orientation et plusieurs travaux se sont intéressés aux propriétés combinatoires et géométriques de ce graphe [PS12, PS15, PS13].

Certains réseaux de tri ont une forme particulière (triangulaire) qui leur confère des propriétés fortes. Les tris sur ces réseaux sont appelés des **arrangements de tuyaux** (**pipe dreams** en anglais). Ces objets ont des connexions profondes en algèbre et géométrie : ils apparaissent dans le calcul des polynômes de Schubert, dans l'étude des variétés grassmanniennes, comme modèles combinatoires dans la théorie des algèbres amassées [FZ02, FZ03, CLS14], etc. Il existe des analogues de ces réseaux de tri pour des groupes de Coxeter et leur étude est très prometteuse.

Associaèdre. Certains réseaux de tris ont des connections particulièrement intéressantes avec un autre object classique de l'algorithmique et de la combinatoire. La **rotation dans les arbres binaires** est une transformation essentielle pour l'équilibrage des arbres permettant d'obtenir des structures de données efficaces. Le graphe des rotations dans les arbres binaires a été largement étudié dans la littérature. Pour donner deux exemples :

- Le graphe orienté des rotations droites forme le **treillis de Tamari** [Tam51, MHPS12]. Voir Figure 2 (gauche). Ce treillis est au coeur de recherches récentes concernant diverses généralisations (treillis Cambriens [Rea06], treillis de Tamari rationnel, treillis ν-Tamari, etc).
- L'**associaèdre** de dimension n est un polytope dont les sommets correspondent aux arbres binaires à $n+1$ noeuds internes et dont les arêtes correspondent aux rotations entre ces arbres. Voir Figure 2 (droite). Cette structure, introduite d'abord combinatoirement [Sta63], a été ensuite réalisée géométriquement par diverses constructions polytopales [Lee89, GKZ08, BFS90, Lod04, HL07, PS12, CSZ15] qui reflètent des connexions profondes avec certaines branches des mathématiques. De nombreuses généralisations de l'associaèdre classiques ont aussi été étudiées (polytopes secondaires [GKZ08, BFS90], associaèdres de graphes [CD06], nestoèdres [Pos09, FS05, Zel06], associaèdres généralisés [HLT11], polytopes de briques [PS12, PS15], permutreehedra [PP18], accordioèdres [MP17], etc).

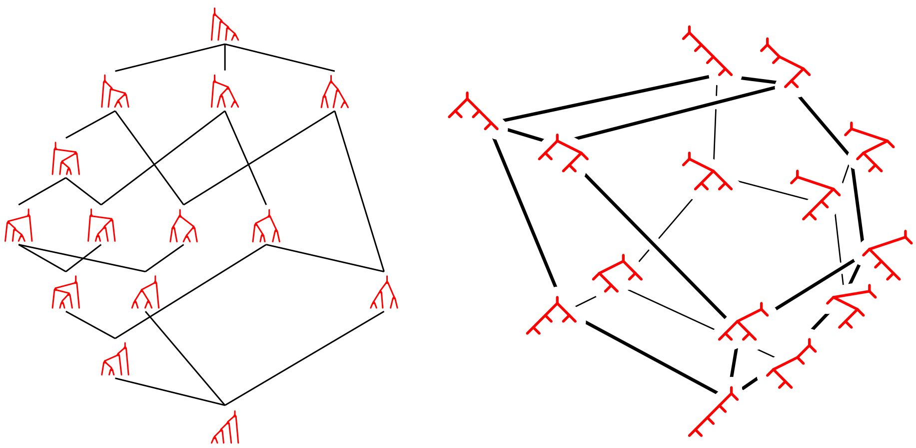

FIGURE 2 – Le treillis de Tamari (gauche) et l'associaèdre (droite) de dimension 3.

De manière assez étonnante, une relation profonde entre l'associaèdre et certains réseaux de tri a été révélée dans [PP12]. Cette relation a été largement exploitée pour obtenir des analogues du treillis de Tamari et de l'associaèdre aux réseaux de tri quelconques [PP12, PS12]. Elle a aussi été étendue dans [CLS14, PS15] en une connection entre les associaèdres généralisés [CFZ02, HLT11] issus des algèbres amassées [FZ02, FZ03] et certains complexes de sous-mots pour n'importe quel groupe de Coxeter. Cette connexion est l'une de nos motivations essentielles pour l'étude des complexes de sous-mots.

Objectifs scientifiques. Un treillis est un ordre partiel dans lequel toute paire d'éléments admet un infimum et un suprémum. L'objectif de ce stage est d'explorer certaines propriétés de treillis du graphe d'échange du complexe de sous-mots. Même si ces graphes d'échange ne sont en général pas des treillis, on s'intéressera aux questions suivantes :

1. Déterminer sous quelles conditions le graphe d'échange d'un complexe de sous-mots ou sa partie acyclique définissent un treillis.
2. Comprendre dans quels cas ces treillis sont des quotients d'intervalles initiaux de l'ordre faible.
3. Lorsque ce sont des treillis, étudier si ils sont semi-distributifs voire congruence-uniformes.
4. Si ces treillis sont semi-distributifs, déterminer leurs infimum-irréductibles et leurs représentation irréductibles par infimum, et en déduire une notion de partitions non-croisées pour les complexes de sous-mots.

Méthode et outils. Notre méthodologie de recherche s'appuie très fortement sur l'**expérimentation informatique** comme outil pour développer l'intuition, vérifier des propriétés et énoncer des conjectures. Un problème typique de recherche en combinatoire algébrique met en oeuvre l'exécution d'algorithmes combinatoires instrumentés, du calcul effectif sur des structures algébriques et la manipulation d'objets géométriques, tout ceci avec des problèmes dont la taille augmente de manière exponentielle. Pour répondre à ces besoins complexes, il est nécessaire de s'intégrer dans un développement d'envergure. On utilisera ainsi le système `Sage` et son extension `Sage-combinat`. Basée sur le langage python qui est largement reconnu dans la communauté scientifique, elle permettra au stagiaire de s'intégrer dans une équipe de développement internationale et active. Les algorithmes obtenus pendant le stage seront intégrés à la bibliothèque. Il pourra ainsi acquérir une grande expérience du développement collaboratif et de l'expérimentation sur machine. D'autre part, le savoir-faire acquis en Python sera certainement valorisable pour la suite de sa carrière.

Compétences requises. On attend du candidat des connaissances de base en combinatoire (théorie des treillis, triangulations et flips, etc), en géométrie (base de la théorie des polytopes, groupes de Coxeter) et un intérêt pour l'algèbre. Des compétences en programmation (algorithmes élémentaires sur des objets combinatoires) seront également bienvenues.

Critères de réussite. Le succès du stage se mesurera aux progrès réalisés dans la compréhension combinatoire, géométrique et algébrique des complexes de sous-mots. On valorisera aussi bien les avancées théoriques que le développement d'outils théoriques et effectifs de manipulation et de compréhension des concepts clés du sujet.

Environnement du stage. Le stage aura lieu au sein de l'équipe GALaC du LRI, et sera coencadrée par Florent Hivert (LRI) et Vincent Pilaud (LIX). Il s'inscrit donc dans une collaboration fructueuse entre les deux encadrants dont le premier étudiant commun Joël Gay a soutenue récemment sa thèse. Ce binôme est le noeud des collaborations développées depuis quelques années entre les équipes de combinatoire du LIX et du LRI (notamment autour de Florent Hivert, Viviane Pons et Vincent Pilaud). L'étudiant profitera en particulier du GT Combi du Plateau de Saclay, qui permettra le contact avec les autres chercheurs en combinatoire énumérative, algébrique et géométrique du plateau de Saclay. Enfin, l'étudiant profitera de l'expertise du LRI sur le logiciel de calcul `Sage` en particulier avec le projet européen H2020 OpenDreamKit `https://opendreamkit.org/`. Ce projet piloté par l'équipe GALaC du LRI regroupe environ 50 personnes d'une quinzaine d'universités européennes et a pour but de fournir une kit d'environnements pour la recherche ouverte et collaborative en mathématique. En outre, les déplacements du stagiaire seront également soutenus par les ANR SC^{3}A et CAPPS.

Bibliographie.

[BFS90] Louis J. Billera, Paul Filliman, and Bernd Sturmfels. Constructions and complexity of secondary polytopes. *Adv. Math.*, 83(2) :155–179, 1990.

[CD06] Michael P. Carr and Satyan L. Devadoss. Coxeter complexes and graph-associahedra. *Topology Appl.*, 153(12) :2155–2168, 2006.

[CFZ02] Frédéric Chapoton, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Polytopal realizations of generalized associahedra. *Canad. Math. Bull.*, 45(4) :537–566, 2002.

[CLS14] Cesar Ceballos, Jean-Philippe Labbé, and Christian Stump. Subword complexes, cluster complexes, and generalized multi-associahedra. *J. Algebraic Combin.*, 39(1) :17–51, 2014.

[CSZ15] Cesar Ceballos, Francisco Santos, and Günter M. Ziegler. Many non-equivalent realizations of the associahedron. *Combinatorica*, 35(5) :513–551, 2015.

[FS05] Eva Maria Feichtner and Bernd Sturmfels. Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans. *Port. Math. (N.S.)*, 62(4) :437–468, 2005.

[FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2002.

[FZ03] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1) :63–121, 2003.

[GKZ08] Israel Gelfand, Mikhail Kapranov, and Andrei Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Reprint of the 1994 edition.

[HL07] Christophe Hohlweg and Carsten Lange. Realizations of the associahedron and cyclohedron. *Discrete Comput. Geom.*, 37(4) :517–543, 2007.

[HLT11] Christophe Hohlweg, Carsten Lange, and Hugh Thomas. Permutahedra and generalized associahedra. *Adv. Math.*, 226(1) :608–640, 2011.

[KM04] Allen Knutson and Ezra Miller. Subword complexes in Coxeter groups. *Adv. Math.*, 184(1) :161–176, 2004.

[Knu73] Donald E. Knuth. *The art of computer programming. Volume 3*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1973. Sorting and searching, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing.

[Lee89] Carl W. Lee. The associahedron and triangulations of the n-gon. *European J. Combin.*, 10(6) :551–560, 1989.

[Lod04] Jean-Louis Loday. Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3) :267–278, 2004.

[MHPS12] Folkert Müller-Hoissen, Jean Marcel Pallo, and Jim Stasheff, editors. *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures. Tamari Memorial Festschrift*, volume 299 of *Progress in Mathematics*. Springer, New York, 2012.

[MP17] Thibault Manneville and Vincent Pilaud. Geometric realizations of the accordion complex of a dissection. Preprint, `arXiv:1703.09953`. To appear in *Discrete & Comput. Geom.*, 2017.

[Pos09] Alexander Postnikov. Permutohedra, associahedra, and beyond. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6) :1026–1106, 2009.

[PP12] Vincent Pilaud and Michel Pocchiola. Multitriangulations, pseudotriangulations and primitive sorting networks. *Discrete Comput. Geom.*, 48(1) :142–191, 2012.

[PP18] Vincent Pilaud and Viviane Pons. Permutrees. *Algebraic Combinatorics*, 1(2) :173–224, 2018.

[PS12] Vincent Pilaud and Francisco Santos. The brick polytope of a sorting network. *European J. Combin.*, 33(4) :632–662, 2012.

[PS13] Vincent Pilaud and Christian Stump. EL-labelings and canonical spanning trees for subword complexes. In *Discrete Geometry and Optimization*, Fields Institute Communications Series, pages 213–248. Springer, 2013.

[PS15] Vincent Pilaud and Christian Stump. Brick polytopes of spherical subword complexes and generalized associahedra. *Adv. Math.*, 276 :1–61, 2015.

[Rea06] Nathan Reading. Cambrian lattices. *Adv. Math.*, 205(2) :313–353, 2006.

[Sta63] Jim Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108(2) :293–312, 1963.

[Tam51] Dov Tamari. *Monoides préordonnés et chaînes de Malcev*. PhD thesis, Université Paris Sorbonne, 1951.

[Zel06] Andrei Zelevinsky. Nested complexes and their polyhedral realizations. *Pure Appl. Math. Q.*, 2(3) :655–671, 2006.