

Le diamètre des multiassociaèdres et des accordéoèdres

Proposition de stage de Master 2 du MPRI

Titre. Le diamètre des multiassociaèdres et des accordéoèdres.

Thématique. Géométrie discrète et combinatoire.

Encadrement. Stage coencadré par :

Vincent Pilaud

CNRS & LIX, École Polytechnique

✉ LIX, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

@ vincent.pilaud@lix.polytechnique.fr

🌐 <http://www.lix.polytechnique.fr/~pilaud/>

Lionel Pournin

LIPN, Université Paris 13

✉ 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

@ lionel@liafa.univ-paris-diderot.fr

🌐 <http://lipn.univ-paris13.fr/~pournin/>

Lieu et déroulement du stage. Le stagiaire aura l'opportunité de travailler avec les deux co-encadrants et d'interagir dans les deux environnements :

- l'équipe Combinatoire du Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique (LIX),
- l'équipe Combinatorics, ALgorithmics, INteractions (CALIN) du Laboratoire d'Informatique de Paris Nord (LIPN) de l'Université Paris 13.

Le bureau du stagiaire sera toutefois situé au LIX.

Présentation et objectifs du stage. L'*associaèdre*¹ est un polytope¹ qui intervient dans de nombreux domaines des mathématiques (topologie algébrique, géométrie combinatoire, etc.), de l'informatique théorique, et de la physique. Ses sommets correspondent aux *triangulations* d'un $(d + 3)$ -gone convexe, et ses arêtes correspondent aux *flips* entre deux triangulations — voir Figure 1 (gauche). Le *diamètre*² de l'associaèdre intervient en particulier dans la conjecture d'optimalité dynamique [STT88], toujours ouverte aujourd'hui. En travaillant sur cette conjecture, D. Sleator, R. Tarjan et W. Thurston ont montré par des arguments de géométrie hyperbolique que le diamètre $\delta(d)$ de l'associaèdre de dimension d est $2d - 4$ lorsque d devient grand. Récemment, le second encadrant a prouvé de manière purement combinatoire que $\delta(d)$ est précisément égal à $2d - 4$ pour tout $d > 9$ [Pou12].

1. Polytope = enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de \mathbb{R}^d .

2. Diamètre d'un polytope = distance maximale entre deux sommets dans son graphe sommet-arêtes.

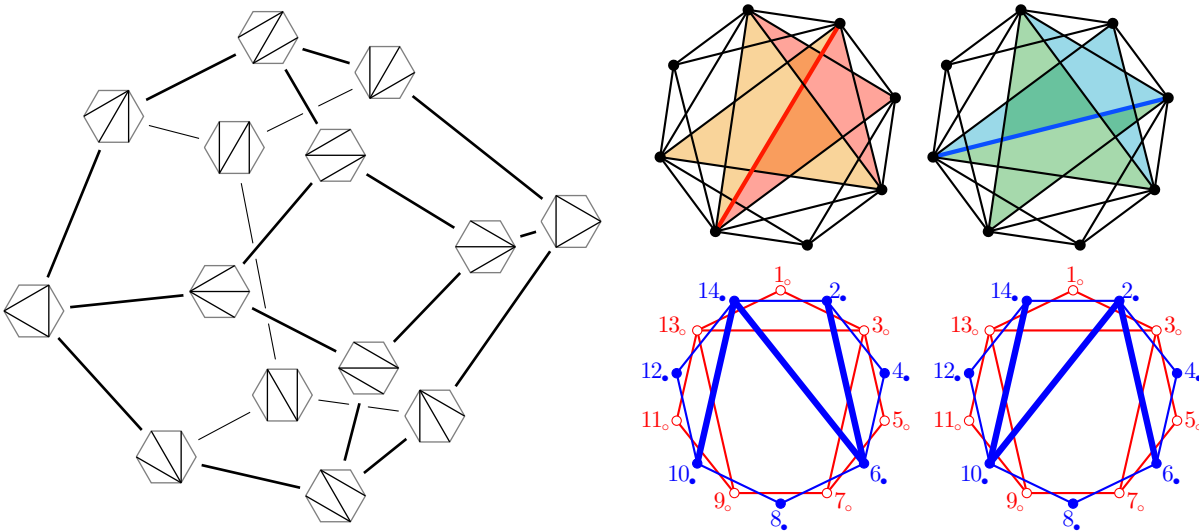


FIGURE 1. L’associaèdre de dimension 3 (gauche), un flip entre deux 2-triangulations de l’octogone (droite haut), et un flip entre deux dissections accordéon (droite bas).

Il existe différentes généralisations de l’associaèdre issues de motivations différentes (polytope secondaire, associaèdres généralisés, etc.). Le sujet de ce stage porte sur le diamètre de deux de ces généralisations :

le **multiassociaèdre**³ [PS09] : Pour un k fixé, les sommets du k -associaèdre correspondent aux k -triangulations d’un $(d/k + 2k + 1)$ -gone convexe, et ses arêtes aux *flips* entre deux k -triangulations [PS09] — voir Figure 1 (droite haut). On note $\delta(k, d)$ le diamètre du k -associaèdre de dimension d . On retrouve donc le diamètre de l’associaèdre classique lorsque $k = 1$.

l’**accordéoèdre** [GM16, MP16] : Étant donné un $2n$ -gone convexe P et une dissection D_o de l’enveloppe convexe des sommets impairs de P , le **complexe d’accordéon** de D_o est le complexe des dissections de l’enveloppe convexe des sommets pairs de P formées par les diagonales paires de P qui croisent un **accordéon** de D_o . Il existe là encore une opération de flip — voir Figure 1 (droite bas). Ce complexe est réalisé géométriquement par l’accordéoèdre de D_o [MP16]. On note $\delta(D_o)$ le diamètre du graphe de cet accordéoèdre. On retrouve donc le diamètre de l’associaèdre classique lorsque D_o est une triangulation.

Les principaux objectifs du stage sont les suivants :

- Se familiariser avec les k -triangulations et les dissections accordéons et avec les opérations de flip qui les relient.
- Comprendre la preuve du diamètre de l’associaèdre [Pou12].

3. Même si l’on n’en connaît pas de réalisation polytopale, on s’intéresse à sa structure combinatoire.

- Étudier les méthodes permettant d’obtenir des bornes supérieures et des bornes inférieures sur la distance (en nombre de flips) entre deux k -triangulations et entre deux dissections accordéons.
- Améliorer les meilleures bornes inférieures connues sur $\delta(k, n)$ et $\delta(D_\circ)$ en utilisant ou en généralisant ces méthodes.

En fonction des intérêts de l’étudiant, d’autres aspects de la combinatoire des multitriangulations et des dissections accordéon pourront être abordés (polytopalité, généralisations aux surfaces, liens avec les algèbres amassées, etc.).

Nous espérons que ce stage donne lieu à une présentation dans une conférence internationale et à une publication scientifique.

Références bibliographiques.

- [GM16] Alexander Garver and Thomas McConville. Oriented flip graphs and noncrossing tree partitions. Preprint, [arXiv:1604.06009](https://arxiv.org/abs/1604.06009), 2016.
- [MP16] Thibault Manneville and Vincent Pilaud. Geometric realizations of the accordion complex of a dissection. In preparation, 2016.
- [Pou12] Lionel Pournin. The diameters of associahedra. Preprint, [arXiv:1207.6296](https://arxiv.org/abs/1207.6296), 2012.
- [PS09] Vincent Pilaud and Francisco Santos. Multitriangulations as complexes of star polygons. *Discrete Comput. Geom.*, 41(2) :284–317, 2009.
- [STT88] Daniel D. Sleator, Robert E. Tarjan, and William P. Thurston. Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(3) :647–681, 1988.

Compétences espérées. Connaissances et intérêt pour la géométrie discrète et combinatoire. Capacité d’abstraction, esprit de synthèse et curiosité scientifique.