Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
21 février 2006

Algèbre bilinéaire

1 Formes bilinéaires, formes quadratiques, espaces pré-hilbertiens

Exercice. [Formes σ-sesqui-linéaires reflexives]

Remarque. Cet exercice est évidemment beaucoup trop long et trop compliqué. Je ne donnerai durant la kholle que certaines parties abordables en une heure et raisonnable pour un niveau de maths spé. Je renvoie à d. Perrin., *Cours d'algèbre*, chap.V §1 et §2 pour plus de détails.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2, σ un automorphisme de $\mathbb{K}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On appelle **forme σ-sesqui-linéaire** sur E une application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que

(i) $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire,

(ii) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est **σ-semi-linéaire**, c'est-à-dire additive et telle que $\forall y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x, \lambda y) = \sigma(\lambda) f(x, y)$.

On dit d'une telle forme qu'elle est **réflexive** si $\forall x, y \in E, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(y, x) = 0$.

On connaît divers exemples de formes σ-sesqui-linéaires réflexives :

- si $\sigma = Id_{\mathbb{K}}$, on parle de forme **bilinéaire** ; si de plus $\forall x, y \in E,\ f(x, y) = f(y, x)$ (resp. $f(x, y) = -f(y, x)$), on parle de forme **symétrique** (resp. **antisymétrique**).
- si $\sigma \neq Id_{\mathbb{K}}$, une forme σ-sesqui-linéaire f est dite **hermitienne** si $\forall x, y \in E,\ f(x, y) = \sigma(f(y, x))$.

Le but de l'exercice est d'étudier les formes σ-sesqui-linéaires réflexives et en particulier de montrer que les exemples que l'on vient de donner sont canoniques dans les sens que toute forme σ-sesqui-linéaire est soit bilinéaire symétrique, soit bilinéaire antisymétrique, soit multiple d'une forme hermitienne.

A. Automorphismes de corps

1. Soient $\mathbb{K}$ un corps et σ un automorphisme de $\mathbb{K}$. Montrer que σ stabilise tous les éléments du sous-corps premier de $\mathbb{K}$.

2a. Soit σ un automorphisme de $\mathbb{R}$. Montrer que si $x \geq 0$, alors $\sigma(x) \geq 0$ (on étudiera $\sigma(\sqrt{(}x)))$.
b. En déduire que σ préserve l'ordre de $\mathbb{R}$.
c. En utilisant les questions 1. et 2b., montrer que le seul automorphisme de $\mathbb{R}$ est l'identité.

3a. Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif. On note $\mathbb{F}_p$ (resp. $\mathbb{F}_{p^n}$) l'unique (à isomorphisme près) corps de cardinal p (resp. p^n). Montrer que le sous-corps premier de $\mathbb{F}_{p^n}$ est le corps $\mathbb{F}_p$.
b. Montrer que le **morphisme de Frobénius** défini par $\sigma(x) = x^p$ est un automorphisme de $\mathbb{F}_{p^n}$ qui laisse effectivement stable le sous corps premier $\mathbb{F}_p$.
c. Montrer qu'il existe un élément α de $\mathbb{F}_{p^n}$ tel que $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[\alpha]$ (on rappelle que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique).

d. Montrer qu'un automorphisme σ de $\mathbb{F}_{p^n}$ envoie α sur un conjugué de α (ie. une autre racine du polynôme minimal de α) et que l'image de α détermine complètement l'automorphisme σ. En déduire que le groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_{p^n}$ est cyclique engendré par le morphisme de Frobénius.

4. Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

5a. Quel est le sous-corps premier de $\mathbb{C}$.

b. Donner tous les automorphismes de $\mathbb{C}$ qui préservent $\mathbb{R}$. En déduire tous les automorphismes continus de $\mathbb{C}$.

On retiendra qu'il existe d'autres automorphismes de $\mathbb{C}$ que les seuls automorphismes continus.

B. Les formes symétriques, antisymétriques et hermitiennes sont canoniques

1. Soit f une forme σ-sesqui-linéaire hermitienne non nulle.

a. Montrer que f est surjective.

b. Montrer que σ est une **involution** (ie. $\sigma^2 = Id_{\mathbb{K}}$).

2a. Soit $u : E \to E$ ($n = \dim E \geq 2$) une application τ-semi-linéaire telle que $\forall x \in E$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Montrer que u est une homothétie et en déduire que $\tau = Id_{\mathbb{K}}$.

b. Montrer que ce résultat ne subsiste pas lorsque $\dim E = 1$.

3. On considère une forme σ-sesqui-linéaire réflexive f.

a. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On définit

$$f_x : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & f(y,x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g_x : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \sigma^{-1}(f(x,y)) \end{array} \right.$$

Montrer que f_x et g_x sont deux formes linéaires qui ont le même noyau $H_x = \{y \in E \mid f(y,x) = 0\}$. En déduire l'existence d'un α_x tel que $g_x = \alpha_x f_x$.

b. On définit

$$\hat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ x & \mapsto & f_x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \hat{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ x & \mapsto & g_x \end{array} \right.$$

Montrer que $\hat{f}$ (resp. $\hat{g}$) est σ-semi-linéaire (resp. σ^{-1}-semi-linéaire). En déduire que $u = \hat{f}^{-1} \circ \hat{g} : E \to E$ est σ^{-2}-semi-linéaire.

c. Montrer que u vérifie de plus $\forall x \in E$, $u(x) = \sigma^{-1}(\alpha_x)x$.

4a. En déduire que

(i) σ est une involution.

(ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\hat{g} = \lambda \hat{f}$, ie $f(x,y) = \mu\sigma(f(y,x))$ (avec $\mu = \sigma(\lambda)$).

b. Montrer alors que

(i) soit $\sigma = Id_{\mathbb{K}}$: alors $\mu^2 = 1$ et par suite, f est soit bilinéaire symétrique, soit bilinéaire antisymétrique.

(ii) soit $\sigma^2 = Id_{\mathbb{K}}$ et $\sigma \neq Id_{\mathbb{K}}$: alors il existe $x \in E$ tel que $\alpha = f(x,x) \neq 0$ (on pourra montrer que $f(x,y) + f(y,x) = f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y)$ et raisonner par l'absurde) et $g = \alpha^{-1} f$ est hermitienne.

C. Tout automorphisme involutif non trivial se comporte comme la conjugaison de $\mathbb{C}$

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et σ un automorphisme involutif non trivial de $\mathbb{K}$. On pose $k = \{x \in \mathbb{K} \mid \sigma(x) = x\} = \mathbb{K}^{\langle\sigma\rangle}$.

a. Montrer que k est un sous-corps strict de $\mathbb{K}$.

b. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus k$, $b = a - \sigma(a)$ et $c = -b\sigma(b)$. Montrer que $\sigma(b) = -b$, que $c \in k$ et que $b^2 = c$.

c. Montrer que $\mathbb{K} = \{\lambda + \mu b \mid \lambda, \mu \in k\}$.

d. Donner un exemple de couple (b,c) qui convient lorsque le corps est $\mathbb{C}$ et l'automorphisme est la conjugaison complexe.

Exercice. [Somme directe orthogonale de polynômes]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid d^\circ(P) \leq n\}$. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ l'application

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(-t)dt.$$

1. Montrer que $\langle ., . \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. On note ϕ la forme quadratique associée.

2. On note $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{I}$) l'ensemble des polynômes pairs (resp. impairs) de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{P} \oplus^{\perp} \mathbb{I}$ et que la restriction de la forme quadratique ϕ à $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{I}$) est définie positive (resp. définie négative).

3. En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de ϕ est donnée par $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_i \end{bmatrix}$, où p (resp. i) désigne la dimension de $\mathbb{P}$ (resp. $\mathbb{I}$) que l'on précisera.

Exercice. [Inégalité du parallèlogramme]

Montrer qu'une norme $\|.\|$ sur E est issue d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'inégalité du parallèlogramme, à savoir

$$\forall x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

En déduire un exemple de norme qui n'est pas euclidienne.

Exercice. [L'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$]

Montrer que $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(d^\circ P, d^\circ Q)} p_k q_k$ est un espace préhilbertien qui n'est pas complet (on pourra considérer la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice. [Minimiser une intégrale]

Calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^3 + ax + b)^2 e^{-x^2} dx.$$

Exercice. [Quadrique]

Déterminer l'ensemble des points vérifiant l'équation

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0.$$

Exercice. [Formes quadratiques et continuité]

1. Montrer qu'une forme quadratique réelle sur un espace vectoriel de dimension finie est continue.

2. Montrer qu'une forme quadratique réelle continue définie est soit positive, soit négative.

2 Applications

Exercice. [Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$]

1. Montrer que tout sous-groupe abélien fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable (ie. qu'il existe une base de diagonalisation commune à tous les éléments du sous-groupe). Donner un contre-exemple lorsque le sous-groupe n'est pas fini.

2. Montrer que tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de U_n.

Exercice. [Sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ et application aux polyèdres réguliers]

On se donne un sous-groupe fini G de $SO_3(\mathbb{R})$ non trivial. On considère l'action de G sur la sphère $\mathbb{S}^2$ de l'espace à trois dimensions. On pose

$$\Gamma = \{(x, g) \in \mathbb{S}^2 \times (G \setminus \{\mathrm{Id}\} \mid g(x) = x\}.$$

1a. Montrer que tout élément de G autre que l'identité a exactement deux points fixes sur la sphère. En déduire que

$$\#\Gamma = 2(\#G - 1).$$

b. Soit A une section de l'action de G sur $\mathbb{S}^2$, ie. une partie de $\mathbb{S}^2$ qui rencontre une et une seule fois toutes les orbites. Montrer que

$$\#\Gamma = \#G \sum_{x \in A} 1 - \frac{1}{\#\mathrm{stab}(x)}.$$

c. Montrer que

$$2(1 - \frac{1}{\#G}) = \sum_{k=1}^{r} 1 - \frac{1}{s_k},$$

où les s_k sont les cardinaux des stabilisateurs non triviaux rangés dans l'ordre croissant.

2a. Montrer que $r \in \{2, 3\}$.
b. Si $r = 2$, montrer que $s_1 = s_2 = \#G$.
c. Si $r = 3$ et $s_1 = s_2 = 2$, montrer que $s_3 = \frac{\#G}{2}$.
d. Montrer que les seuls cas restants sont $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ et $s_3 \in \{3, 4, 5\}$.

3. Interpréter tous les cas trouvés comme sous-groupes de transformations de la sphère.

Exercice. [Spectre d'adjacence d'un graphe]

On considère un graphe $G = (V, E)$ fini et on indexe les sommets de G par les entiers de 1 à $n = |V|$. On appelle **matrice d'adjacence** de G la matrice $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ où les coefficients a_{ij} sont définis par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que cette matrice est diagonalisable dans une base orthonormée. On note $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$ ses valeurs propres en prenant en compte les multiplicités.

Le but de ce qui suit est d'étudier les relations entre les propriétés du graphe et celles du spectre de cette matrice.

A. Spectre d'adjacence d'un graphe k-régulier

Soit $G = (V, E)$ un graphe et v un sommet de G. Le **degré** de v est défini par

$$\deg(v) = |\{w \in V \mid \{v; w\} \in E\}.$$

On dit que le graphe G est **k-régulier** si le degré de tout sommet de G est k.

1. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice d'adjacence A de G associé à la valeur propre k.

2. Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, |\mu_i| \leq k$.

3. Montrer que la valeur propre $\mu_1 = k$ est de multiplicité 1 si et seulement si le graphe est connexe. (on pourra compléter ce résultat en montrant que la multiplicité de μ_1 est le nombre de composantes connexes du graphe G).

B. Nombre d'indépendance et nombre chromatique

On appelle **nombre d'indépendance** d'un graphe $G=(V,E)$ le nombre

$$\iota(G)=\max\{|F| \mid F\subset V, \forall x,y\in F, \{x;y\}\notin E\}.$$

On dit que G est k-**coloriable** si il existe une partition de V en au plus k parts qui sépare les extrémités de toute arête de E. On appelle **nombre chromatique** du graphe G l'entier $\chi(G)$ tel que G est $\chi(G)$-coloriable, mais pas $(\chi(G)-1)$-coloriable.

Montrer que pour un graphe fini sans boucle à n sommets, on a l'inégalité

$$n\leq \iota(G)\chi(G)$$

C. Nombre chromatique d'un graphe fini, connexe, k-régulier

On considère un graphe G fini, connexe, k-régulier, avec n sommets. On note $\mu_1>\ldots\geq\mu_n$ son spectre d'adjacence. Le but de l'exercice est de montrer que le nombre chromatique de G vérifie

$$\chi(G)\geq\frac{k}{\max\{|\mu_2|,|\mu_n|\}}.$$

Soit $F\subset V$ une partie indépendante (ie. $\forall x,y\in F, \{x;y\}\notin E$) telle que $|F|=\iota(G)$. On considère la fonction f définie par

$$\forall x\in V,\quad f(x)=\begin{cases} |V\setminus F| \text{ si } x\in F\\ -|F| \text{ si } x\in V\setminus F\end{cases}$$

Montrer que $\|f\|_2^2\leq\iota(G)n^2$.

Montrer que pour tout $x\in F$, $(Af)(x)=-k\iota(G)$ et en déduire que $\|Af\|_2^2\geq k^2\iota(G)^3$.

En remarquant que $\sum_{x\in V}f(x)=0$ (ie. que le vecteur f est orthogonal aux fonctions constantes), montrer que $\|Af\|_2\leq\max\{|\mu_2|,|\mu_n|\}\|f\|_2$.

Déduire des questions précédentes que

$$\iota(G)\leq\frac{n}{k}\max\{|\mu_2|,|\mu_n|\}$$

et conclure à l'aide de la partie B.