

# Pavages périodiques

Vincent Pilaud

2006

## 1 Introduction

Qu'il s'agisse du carrelage d'un mur ou des dessins de M.C. ESCHER (fig. 1), il est relativement courant et intuitif d'appeler *pavage périodique* tout ensemble de pavés  $\mathcal{P}$  qui présente deux propriétés essentielles :

1. propriété topologique : l'ensemble  $\mathcal{P}$  doit recouvrir le plan sans chevauchement,
2. propriété géométrique : l'ensemble  $\mathcal{P}$  doit être périodique.

Commençons par formaliser cette définition en séparant clairement l'aspect topologique et l'aspect géométrique :

**Définition 1** (Pavage). Soit  $E$  un espace topologique. On appelle *pavage* tout ensemble  $\mathcal{P}$  de compacts de  $E$  tel que

- (i)  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = E$  (recouvrement de  $E$ ),
- (ii) pour tout  $P, Q \in \mathcal{P}$ ,  $\overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{Q} = \emptyset$  (sans chevauchement des pavés),
- (iii) pour tout  $K \subset E$  compact,  $\{P \in \mathcal{P} \mid P \cap K \neq \emptyset\}$  est fini (recouvrement localement fini).

**Définition 2** (Périodicité). Soit  $\mathcal{P}$  un pavage de  $E$ . On appelle *groupe de symétrie du pavage*  $\mathcal{P}$  le groupe  $\Gamma_{\mathcal{P}}$  des transformations de  $E$  qui conservent  $\mathcal{P}$  (ie. toute transformation  $g$  de  $E$  telle que pour tout  $P \in \mathcal{P}$ ,  $g(P) \in \mathcal{P}$ ).

On dit que le pavage  $\mathcal{P}$  est

- (i) *périodique* lorsqu'il existe une partie finie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{P}$  qui engendre  $\mathcal{P}$ , ie. telle que pour tout  $P \in \mathcal{P}$ , il existe  $g \in \Gamma_{\mathcal{P}}$  tel que  $g(P) \in \mathcal{F}$ ,
- (ii) *non-périodique* dans le cas contraire,
- (iii) *apériodique* lorsque  $\Gamma_{\mathcal{P}} = \{Id\}$ .

**Définition 3** (Groupe cristallographique). Soit  $E$  un espace topologique et  $\mathcal{T}_E$  le groupe des transformations de  $E$ . On appelle *groupe cristallographique de  $E$*  tout sous-groupe de  $\mathcal{T}_E$  qui est le groupe de symétrie d'un pavage de  $E$ .

On s'intéresse ici aux pavages de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Dans un premier temps (§ 2), on discute de la distinction entre non-périodicité et apériodicité d'un pavage, et on construit l'exemple du pavage apériodique de Penrose (§ 2.2). On étudie ensuite (§ 3) les pavages périodiques du plan : on montre d'abord (§ 3.1) qu'il n'existe que 5 groupes cristallographiques directs du plan, puis on propose un algorithme de tracé de pavages (§ 3.2). Dans la dernière partie (§ 4), on démontre les théorèmes de Bieberbach qui généralisent la situation du plan à une dimension quelconque.



FIG. 1 – Pavages de M.C. ESCHER

## 2 Pavages non-périodiques et apériodiques

### 2.1 Pavages non-périodiques

Il est assez clair qu'un pavage non-périodique n'est pas nécessairement apériodique. Voici deux exemples (similaires) de pavages qui ne sont ni périodiques, ni apériodiques :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $D_n$  la droite d'équation  $x = n$  et  $\Delta_n$  la droite d'équation  $y = \frac{1}{n}$  (avec  $\Delta_0$  d'équation  $y = 0$ ). On considère le pavage  $\mathcal{P}$  constitué de l'ensemble des rectangles délimités par la famille de droites  $\mathcal{F} = \{D_n, \Delta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , ie. des adhérences des composantes connexes du complémentaire de  $\mathcal{F}$ . Ce pavage est représenté sur la figure 2.

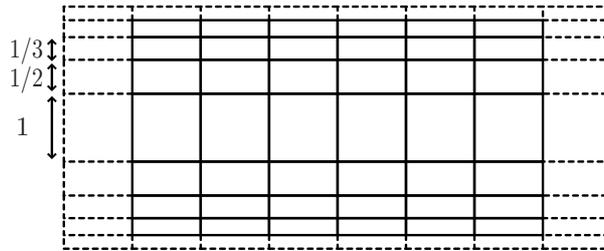


FIG. 2 – Pavage non-périodique en dimension 2

Ce pavage est clairement non-périodique puisque son groupe de symétrie ne contient pas deux translations linéairement indépendantes (et ceci contredirait le premier théorème de Bieberbach que nous allons montrer dans la suite), et il n'est pas apériodique puisque le groupe  $\mathbb{Z}$  s'injecte dans son groupe de symétrie.

2. On considère un angle  $\theta$  tel que  $\frac{\theta}{\pi}$  soit irrationnel, et un losange  $L$  dont l'un des angles est  $\theta$ . On construit un prisme  $P$  dont la base est un triangle équilatéral et dont les faces sont des losanges isométriques à  $L$ . On recolle deux tels prismes le long d'une de leurs faces rhombiques (ie. en forme de losange), de sorte que leurs directions soient opposées (fig. 3). On obtient ainsi la brique de base de notre pavage.

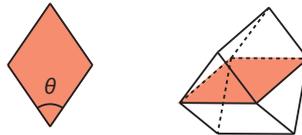


FIG. 3 – Brique de base

À partir d'un pavage du plan avec le losange  $L$  obtenu en translatant  $L$  parallèlement à ses côtés, on obtient une sorte de tôle ondulée dont les deux directions (dessus et dessous) sont différentes (elles diffèrent d'un angle  $\theta$ ). On superpose les couches ainsi construites de manière à faire coïncider les ondulations du dessus d'une couche avec les ondulations du dessous de la couche supérieure (fig. 4). Pour les mêmes raisons que l'exemple précédent, on obtient un pavage non-périodique mais pas pour autant apériodique.

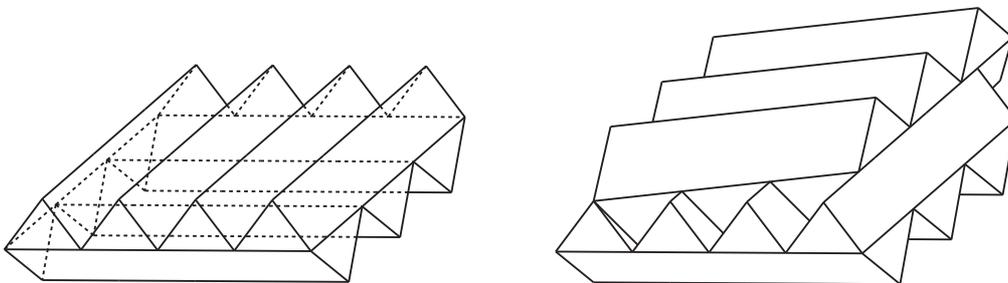


FIG. 4 – Pavage non-périodique en dimension 3

## 2.2 Pavage de Penrose

On va maintenant présenter un pavage apériodique dont la construction est due à Penrose. On note  $\varphi$  le nombre d'or (ie. la racine positive du polynôme  $X^2 - X - 1$ ). On considère les deux *tuiles de Penrose* suivantes (fig. 5) :

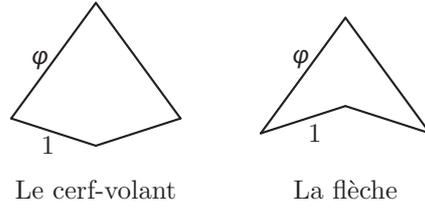


FIG. 5 – Tuiles de Penrose

Pour chaque tuile, on définit une transformation donnée par la figure suivante (fig. 6) :

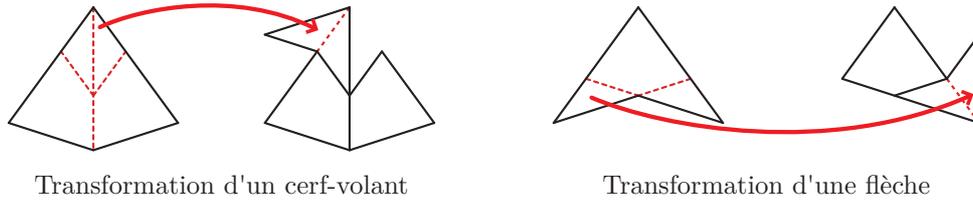


FIG. 6 – Transformation de Penrose

On construit alors le pavage de Penrose de la manière suivante : on part d'une configuration de 5 cerfs-volants placés circulairement autour d'un point, et on itère quatre fois le processus précédent (fig. 7) :

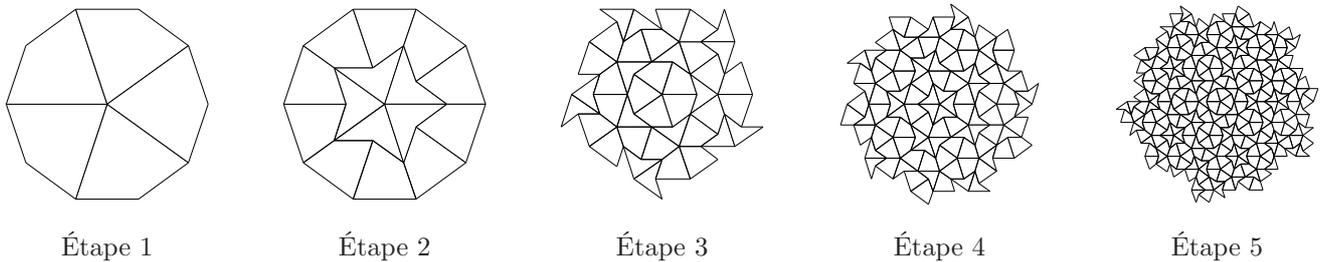


FIG. 7 – Itération de Penrose

Au centre de la dernière configuration, on obtient l'image par une homothétie de la configuration de départ. Par conséquent, on peut recommencer le procédé une infinité de fois avec une figure de plus en plus large et paver ainsi tout le plan. On obtient le *pavage de Penrose* (fig. 8).

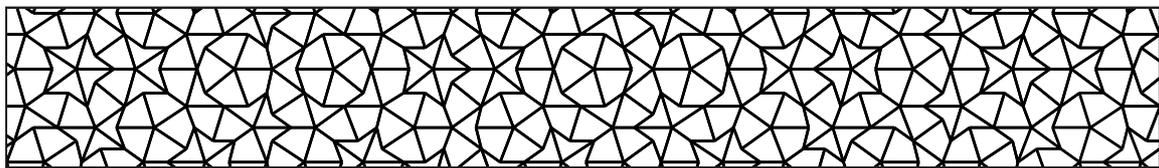


FIG. 8 – Pavage de Penrose

Ce pavage est *apériodique*. En effet, supposons d'abord que le groupe de symétrie  $G$  du pavage de Penrose  $\mathcal{P}$  contienne une translation  $\tau$ . Alors cette translation est aussi une transformation du pavage  $\mathcal{P}_{-1}$  de l'étape précédente dans la construction. Or les pavés de  $\mathcal{P}_{-1}$  sont de plus grande taille que ceux de  $\mathcal{P}$ . En remontant ainsi un nombre suffisant de fois dans la construction, on obtient un entier  $n$  tel que les pavés de  $\mathcal{P}_{-n}$  soient plus grands que la norme du vecteur  $t$  de la translation  $\tau$ . Celle-ci doit être une transformation de  $\mathcal{P}_{-n}$ , ce qui est absurde. Par conséquent, le groupe de symétrie du pavage de Penrose ne contient pas de translation. On montre par des arguments similaires qu'il ne contient pas de rotation. On en déduit qu'il est trivial.

### 3 Groupes cristallographiques du plan

#### 3.1 Classification des groupes cristallographiques d'isométries directes

On s'intéresse ici aux groupes cristallographiques d'isométries directes du plan. Nous allons utiliser la définition suivante (un peu simplifiée mais équivalente à celle de l'introduction) :

**Définition 4.** Un groupe cristallographique direct du plan est un sous-groupe  $G$  de  $\text{Is}^+(\mathbb{R}^2)$  tel qu'il existe une partie  $P$  de  $\mathbb{R}^2$  compacte, connexe, d'intérieur non vide telle que

$$(i) \mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} g(P), \quad \text{et} \quad (ii) \forall g, h \in G, g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \emptyset \Rightarrow g(P) = h(P).$$

Il est clair qu'il existe un nombre infini de pavages du plan : il suffit par exemple de considérer un pavage par des carrés et de faire varier la taille des carrés. Par cette méthode, on obtient aussi un nombre infini de groupes cristallographiques directs du plan. Cependant, tous ces groupes sont isomorphes (en fait, ils sont même conjugués dans  $\text{Aff}^+(\mathbb{R}^2)$ ). Ce qui nous intéresse, c'est de décrire les classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques directs du plan. Le théorème suivant donne cette description. Pour le montrer, on commence par décrire le groupe des translations d'un groupe cristallographique, puis on étudie la partie correspondant aux rotations.

**Théorème 1.** Il existe exactement 5 classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques directs de  $\mathbb{R}^2$ .

QUELQUES NOTATIONS ET LEMMES UTILES. Étant donnée une isométrie  $g \in \text{Is}^+(\mathbb{R}^2)$ , on note  $\text{rot } g \in O(2)$  sa composante de rotation et  $\text{trans } g \in \mathbb{R}^2$  sa composante de translation de sorte que l'on peut écrire pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = (\text{rot } g).x + (\text{trans } g)$ .

Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Is}^+(\mathbb{R}^2)$ , on note  $\text{rot } G = \{\text{rot } g \mid g \in G\} \subset O(2)$  son groupe de rotations, et  $\text{trans } G = \{\text{trans } g \mid g \in G, \text{rot } g = \text{Id}\} \subset \mathbb{R}^2$  son groupe de translations.

Si  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $G \subset \text{Is}^+(\mathbb{R}^2)$ , on note  $G_a$  l'ensemble des rotations de centre  $a$  qui appartiennent à  $G$ .

Nous aurons besoin dans la preuve de deux petits lemmes concernant des groupes d'isométrie du plan.

**Lemme 1.** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe un point  $a \in \mathbb{R}^2$  tel que toute isométrie laisse fixe  $K$  laisse fixe  $a$ .

En effet, il existe une unique boule de rayon minimal contenant le compact  $K$ . Le centre de cette boule est donc fixe par toute isométrie stabilisant  $K$ .

**Lemme 2.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Is}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\text{rot } G$  est d'ordre fini  $n$ . Alors il existe  $a \in \mathbb{R}^2$  avec  $\text{card}(G_a) = n$ .

En effet, si  $\text{rot } G$  est un groupe fini de rotations, donc il est cyclique. Soit  $a$  le centre d'une rotation de  $G$  dont la composante de rotation est un générateur de  $\text{rot } G$ . Alors  $G_a$  est cardinal  $n$ .

L'ACTION DE  $G$  EST DISCRÈTE.

**Proposition 1.** Soit  $G$  un groupe cristallographique direct du plan. Alors

- (i) Tout compact  $K$  ne rencontre qu'un nombre fini de pavés  $g(P)$  ( $g \in G$ ).
- (ii) Le stabilisateur d'un pavé est fini
- (iii) Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  et tout point  $a \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $\{g \in G \mid g(a) \in K\}$  est fini.

Les pavés  $g(P)$  étant d'intérieur non vide, tout compact  $K$  ne peut en rencontrer qu'un nombre fini. D'où (i).

Pour montrer le point (ii), considérons un pavé  $Q$  et notons  $G_Q$  son stabilisateur. D'après le lemme 1, il existe un point  $a \in \mathbb{R}^2$  tel que  $G_Q \subset G_a$ . Soit  $b \in \mathbb{R}^2$  situé dans un pavé  $R$  qui ne contient pas  $a$ . Alors l'orbite  $G_a(R)$  du pavé  $R$  par le groupe  $G_a$  n'est formé que d'un nombre fini  $m$  de pavés (par le point (i)). De plus, la seule isométrie directe qui stabilise les points  $a$  et  $b$  est l'identité. On en déduit que le cardinal de  $G_a$  est majoré par  $m$ , et donc que  $G_Q$  est fini.

Soit  $K$  un compact et  $a \in \mathbb{R}^2$ . On note  $Q$  un pavé contenant  $g_1(Q), \dots, g_\ell(Q)$  les pavés qui rencontrent  $K$  (qui sont en nombre fini par (i)). Soit  $g$  tel que  $g(a) \in K$ . Alors il existe  $k \in \{1, \dots, \ell\}$  tel que  $g(Q) = g_k(Q)$ . On en déduit que  $g$  appartient à  $\{g_k G_Q \mid 1 \leq k \leq \ell\}$ , qui est fini par (ii).

SOUS-GROUPE DES TRANSLATIONS.

**Proposition 2.** *Le groupe des translations d'un groupe cristallographique direct du plan est un réseau.*

Soit  $G$  un groupe cristallographique direct du plan.

Supposons d'abord que  $\text{trans } G = \{0\}$ . Alors  $G$  est constitué uniquement de rotations et ces rotations ont toutes le même centre (car le commutateur de deux rotations de centres distincts est une translation non triiviale). On ne peut donc pas recouvrir tout le plan avec les images d'un pavé compact (les images d'un compact sont contenues dans un disque).

Supposons maintenant que  $\text{trans } G$  contienne un vecteur non triivial  $x$  mais pas de base. Alors les éléments de  $G$  sont des symétries centrales (car la conjugaison de la translation de vecteur  $x$  par une rotation  $g$  est la translation de vecteur  $g(x)$ ) et les centres de ces symétries centrales sont alignés sur une droite dirigée par  $x$  (car la conjugaison de deux symétries centrales est une translation dont le vecteur est dirigé par la droite reliant les deux centres). Les images d'un compact  $P$  du plan restent donc dans une bande du plan. On ne peut donc pas recouvrir tout le plan.

Par conséquent,  $\text{trans } G$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^2$  qui contient au moins deux vecteurs linéairements indépendants : c'est un réseau du plan.

CARDINAL DU GROUPE DES ROTATIONS.

**Proposition 3.** *L'ensemble  $\mathcal{R} = \{a \in \mathbb{R}^2 \mid G_a \neq \{\text{Id}_{\mathbb{R}^2}\}\}$  des centres de rotations d'éléments de  $G$  est localement fini.*

Montrons d'abord que  $\text{rot } G$  est fini  $n$ . Dans le cas contraire, il existe des rotations d'ordre arbitrairement grand dans  $G$ . Soit  $K$  une maille du réseau des translations de  $G$ . En composant par des translations de  $\text{trans } G$ , on obtient des rotations d'ordre arbitrairement grand et de centre dans  $K$ . Ceci contredit le point (iii) de la proposition 1.

Le lemme 2 assure alors l'existence d'un point  $a \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\text{card}(G_a) = n$ , ie.  $\text{rot } G = \text{rot } G_a$ . Soit  $b \in \mathcal{R}$  un centre de rotation de  $G$  et  $s \in G_b$ . Par construction de  $a$ , il existe  $r \in G_a$  tel que  $\text{rot } s = \text{rot } r$ . En composant  $s$  et  $r^{-1}$ , on obtient une translation, dont on peut calculer le vecteur ainsi :

$$sr^{-1}(a) = s(a) = s(b - (b - a)) = b - (\text{rot } s)(b - a) = a + (b - a) - (\text{rot } s)(b - a).$$

On a donc  $(b - a) - (\text{rot } s)(b - a) \in \text{trans } G$ .

Or  $(\text{rot } s)^n = \text{Id}$  et  $\text{rot } s - \text{Id} \in \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ . En posant  $P = X^{n-1} + \dots + X + 1$ , on a donc  $P(\text{rot } s) = 0$ , ou en écrivant  $\text{rot } s = (\text{rot } s - \text{Id}) + \text{Id}$ ,  $P(\text{rot } s - \text{Id}) + n\text{Id} = 0$ . Comme  $\text{trans } G$  est stable par  $\text{rot } s$  (conjugaison), on obtient  $n(b - a) = -P(\text{rot } s - \text{Id})(b - a) \in \text{trans } G$ . On en déduit que  $\mathcal{R} \subset a + (\text{trans } G)/n$  est discret.

**Proposition 4.** *Le cardinal du groupe  $\text{rot } G$  des rotations de  $G$  est contenu dans  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ .*

Supposons que  $\text{card}(\text{rot } G) \notin \{1, 2\}$ . Soit  $a \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\text{card}(G_a) = \text{card}(\text{rot } G)$  (lemme 2).  $\mathcal{R}$  étant localement fini (proposition 3), on peut choisir  $b \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\text{card}(G_b) \geq 3$  et  $d(a, b)$  est minimale. Notons  $r$  (resp.  $s$ ) la plus petite rotation de  $G_a$  (resp.  $G_b$ ). Soit  $c$  le centre de  $sr = t$ . L'ordre de  $G_c$  est exactement l'ordre de  $t$ , sinon on contredit la définition de  $b$  (distance minimale avec  $a$ ). Par conséquent, la somme des angles dans le triangle  $abc$  valant  $\pi$ , les trois ordres  $u$ ,  $v$  et  $w$  de  $G_a$ ,  $G_b$  et  $G_c$  sont liés par

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1.$$

On obtient donc, à permutation près,  $u = v = w = 3$  ou  $u = v = 4, w = 2$  ou  $u = 6, v = 3, w = 2$ . On en déduit que  $\text{card}(\text{rot } G) = \text{card}(G_a) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

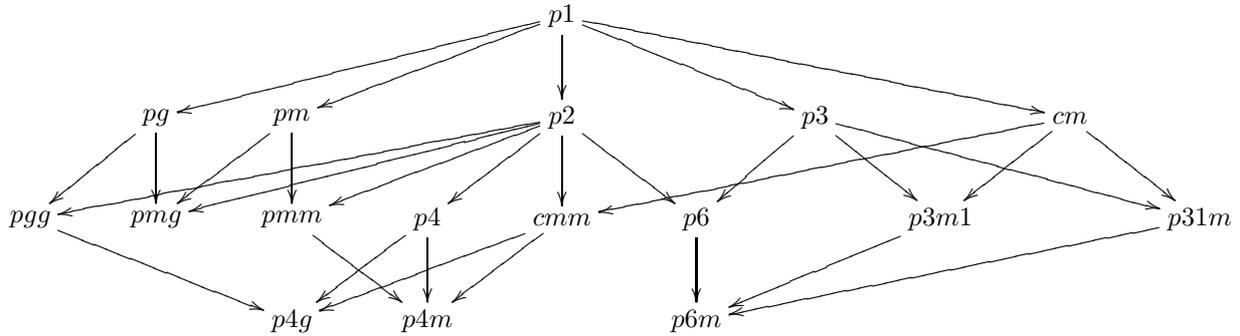
ISOMORPHISME. On sait donc que pour tout groupe cristallographique direct du plan,

- (i) son groupe de translations est un réseau,
- (ii) son groupe de rotations est un groupe cyclique à 1, 2, 3, 4 ou 6 éléments.

Tout groupe cristallographique direct du plan est donc isomorphe à un produit semi-direct  $(\mathbb{Z}^2) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , avec  $p \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . D'où le théorème : on n'obtient qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques directs du plan.

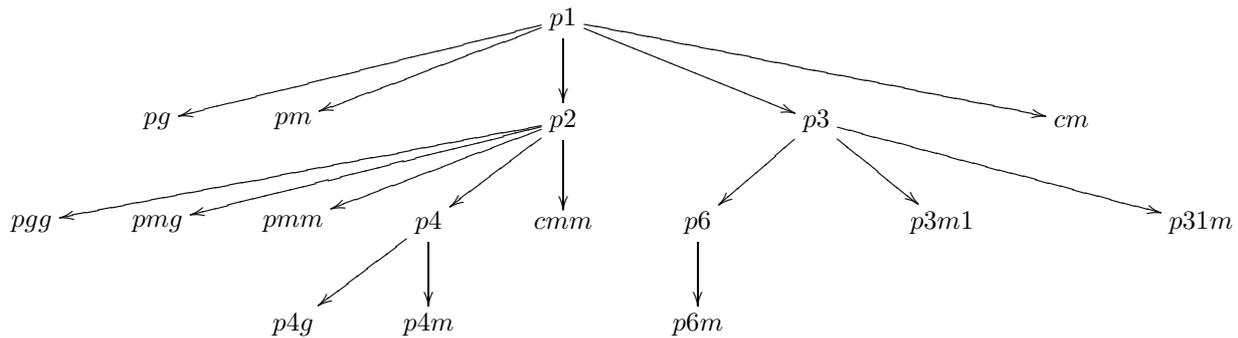
### 3.2 Tracer un pavage

ARBORESCENCE FONDAMENTALE. Une étude plus poussée des symétries permet de donner un résultat similaire sur les classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques du plan (cette fois, directs et indirects). On obtient un classement exhaustif des classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques en dimension 2 que nous présentons sous la forme du graphe



où  $A \longrightarrow B$  signifie que  $A$  et  $B$  ont le même réseau et que  $A$  est un sous-groupe maximal non trivial de  $B$ , et où les noms des groupes (par exemple  $p6$ ) donnent des informations sur la structure de leur réseau et sur les isométries qui les engendrent : les chiffres donnent la structure du réseau (par exemple  $p6$  signifie que le réseau est hexagonal) et les autres lettres correspondent aux symétries ( $m$  signifie monosymétrique et  $mm$  bisymétrique) et aux glissements ( $g$  signifie glissant et  $gg$  biglissant). Ce graphe est appelé *graphe des sous-groupes*.

On extrait du graphe des sous-groupes un arbre de racine  $p1$  (le choix de cet arbre est arbitraire) :



appelé *arborescence fondamentale*.

L'ALGORITHME. L'idée de l'algorithme est d'utiliser récursivement l'arborescence fondamentale pour ramener le pavage à un pavage dont le groupe de symétrie est  $p1$ . Plus précisément,

- si  $G = p1$ , on sait tracer le pavage : il suffit de translater le domaine fondamental  $\Delta$  suivant une base du réseau des translations. Autrement dit, si  $(t_1, t_2)$  est une base du réseau des translations de  $G$ ,

$$\mathcal{P} = G \cdot \Delta = \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} t_1^n t_2^m (\Delta).$$

- sinon, on traite le groupe  $G$  comme la composition de son antécédent dans l'arborescence fondamentale par une isométrie  $\omega$  bien choisie. Autrement dit, pour une isométrie bien choisie  $\omega$ ,

$$\mathcal{P} = G \cdot \Delta = G / \langle \omega \rangle \cdot (\langle \omega \rangle \cdot \Delta).$$

Donnons un tableau récapitulant les 17 groupes, leurs réseaux, la transformation à effectuer pour remonter dans l'arborescence fondamentale et le groupe vers lequel on remonte :

groupe	réseau possible	transformation à effectuer	nouveau groupe
$p1$		translations suivant les vecteurs du réseau	
$p2$		rotation d'angle $\pi$	$p1$
$p3$		deux rotations d'angle $2\pi/3$	$p1$
$p4$		rotation d'angle $\pi/2$	$p2$
$p6$		rotation d'angle $\pi/3$	$p3$
$cm$		symétrie d'axe $u + v$	$p1$
$pm$		symétrie d'axe $v$	$p1$
$pg$		symétrie glissée d'axe $v$ de vecteur $v/2$	$p1$
$cmm$		symétrie d'axe $u + v$	$p2$
$pmm$		symétrie d'axe $v$	$p2$
$pgg$		symétrie glissée d'axe $v$ de vecteur $v/2$	$p2$
$pgg$		symétrie glissée d'axe $v$ de vecteur $(u + v)/2$	$p2$
$p31m$		symétrie d'axe $u + v$	$p3$
$p3m1$		symétrie d'axe $v$	$p3$
$p4m$		symétrie d'axe $v$	$p4$
$p4g$		symétrie glissée d'axe $v - u$ de vecteur $(u + v)/2$	$p4$
$p6m$		symétrie d'axe $v$	$p6$

EXEMPLE DU FONCTIONNEMENT DE L'ALGORITHME SUR  $p4g$ . Pour tracer un pavage dont le groupe de symétrie est  $p4g$ , on applique au domaine fondamental une symétrie orthogonale d'axe  $d$  (fig. 9, étape 2) et on doit alors traiter la figure obtenue comme le domaine fondamental d'un pavage dont le groupe de symétrie est  $p4$ . On applique alors au domaine une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  (fig. 9, étape 3) et on doit traiter la figure comme le domaine fondamental d'un pavage dont le groupe de symétrie est  $p2$ , et ainsi de suite (fig. 9) jusqu'à arriver à un domaine fondamental d'un pavage dont le groupe de symétrie est  $p1$ , que l'on sait tracer (fig. 9, étape 5).

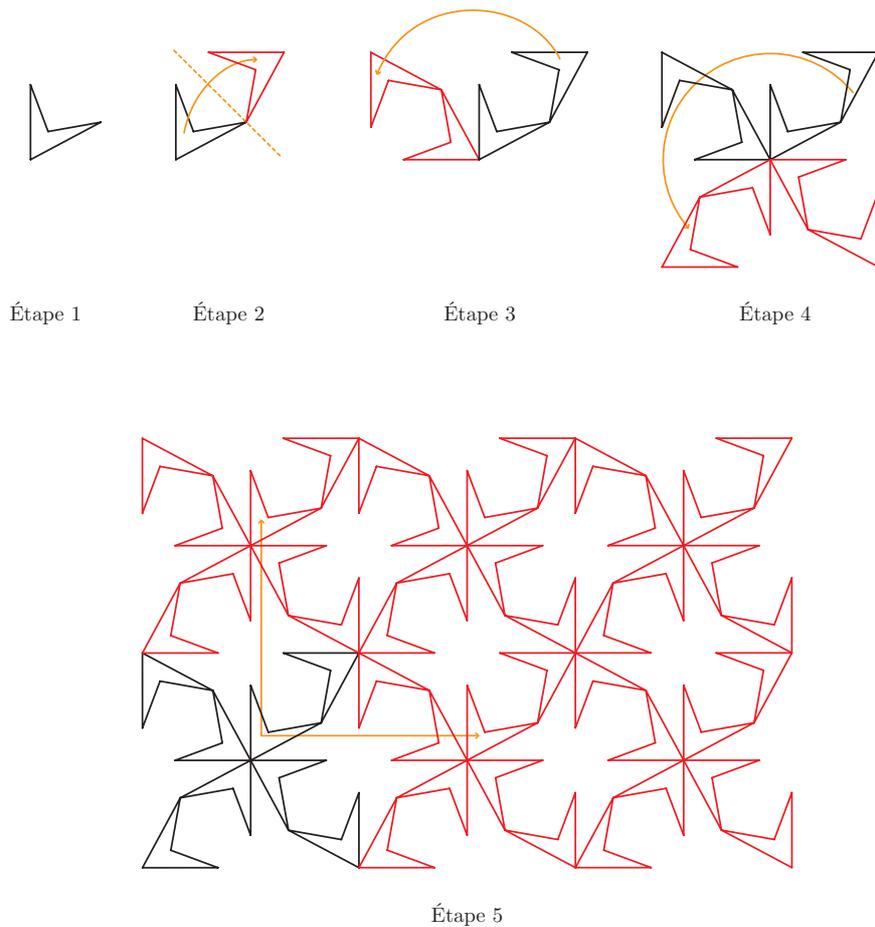


FIG. 9 – Exemple du fonctionnement de l'algorithme

## 4 Les théorèmes de Bieberbach

On s'intéresse maintenant aux groupes cristallographiques de  $\mathbb{R}^n$ . Il s'avère que la situation du plan se généralise en dimension supérieure : le groupe des translations d'un groupe cristallographique reste un réseau et il n'existe toujours qu'un nombre restreint de classes d'isomorphisme (et même de conjugaison dans  $\text{aff}(\mathbb{R}^n)$ ) de groupes cristallographiques. Ces résultats ont été démontrés par Bieberbach en 1910 en réponse au 18-ème problème de Hilbert :

**Théorème 2** (Premier théorème de Bieberbach). *Tout groupe cristallographique de  $\mathbb{R}^n$  contient  $n$  translations linéairement indépendantes.*

**Théorème 3** (Deuxième théorème de Bieberbach). *Pour tout  $n$  fixé, il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 4** (Troisième théorème de Bieberbach). *Si  $G$  et  $G'$  sont deux groupes cristallographiques conjugués, alors il existe une application affine  $\Phi$  telle que  $G' = \Phi G \Phi^{-1}$ .*

Dans la suite, nous montrons les deux premiers théorèmes.

### 4.1 Isométries

#### 4.1.1 Notations

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  usuel, on note  $|x|$  la *norme* d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\sphericalangle(x, y)$  l'*angle* entre deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

On rappelle qu'on exprime une isométrie  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  sous la forme  $x \mapsto \alpha x = Ax + a$  où  $A \in O(n)$  est appelée *composante de rotation* de  $\alpha$  et notée  $\text{rot } \alpha$ , et  $a \in \mathbb{R}^n$  est appelée *composante de translation* de  $\alpha$  et notée  $\text{trans } \alpha$ .

Un *groupe cristallographique d'isométries* de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-groupe  $G$  de  $\text{Is}(\mathbb{R}^n)$

- (i) *discret* :  $\forall t > 0, \{\alpha \in G \mid |\text{trans } \alpha| \leq t\}$  est fini,
- (ii) *cocompact* :  $\exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in G$  tel que  $|\text{trans } \alpha - x| \leq d$ .

#### 4.1.2 Rotations

Pour  $A \in O(n)$ , on pose

$$m(A) = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|Ax - x|}{|x|} \right\}.$$

Alors l'ensemble

$$E_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |Ax - x| = m(A)|x|\}$$

est un sous-espace vectoriel non trivial de  $\mathbb{R}^n$  invariant par  $A$ . En effet, il est clair que  $E_A$  est non trivial. Il est invariant par  $A$  car  $A \in O(n)$ . Il reste donc à montrer que c'est un sous-espace vectoriel. Or si  $x, y \in E_A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

- (i) on a  $|A(\lambda x) - (\lambda x)| = |\lambda||Ax - x| = m(A)|\lambda x|$ , donc  $\lambda x \in E_A$ ,
- (ii) par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2m^2(A)(|x|^2 + |y|^2) &= 2(|Ax - x|^2 + |Ay - y|^2) \\ &= |A(x+y) - (x+y)|^2 + |A(x-y) - (x-y)|^2 \\ &\leq m^2(A)(|x+y|^2 + |x-y|^2) = 2m^2(A)(|x|^2 + |y|^2) \end{aligned}$$

donc  $|A(x+y) - (x+y)|^2 + |A(x-y) - (x-y)|^2 = m^2(A)(|x+y|^2 + |x-y|^2)$ , d'où  $|A(x+y) - (x+y)| = m(A)|x+y|$  et  $x+y \in E_A$ .

Comme  $A \in O(n)$ , le supplémentaire orthogonal  $E_A^\perp$  de  $E_A$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  invariant par  $A$ . On pose

$$m^\perp(A) = \max_{x \in E_A^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|Ax - x|}{|x|} \right\}$$

si  $E_A^\perp \neq \{0\}$  et 0 sinon. Il est clair que  $m^\perp(A) \leq m(A)$  et que  $m^\perp(A) < m(A)$  si  $A \neq I_n$ . Par ailleurs, pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note

$$x = x^{E_A} + x^{\perp A},$$

avec  $x^{E_A} \in E_A$  et  $x^{\perp A} \in E_A^\perp$ , la décomposition orthogonale de  $x$  sur  $E_A \oplus^\perp E_A^\perp$ . On remarque alors que :

$$|Ax^{E_A} - x^{E_A}| = m(A)|x^{E_A}| \quad \text{et} \quad |Ax^{\perp A} - x^{\perp A}| \leq m^\perp(A)|x^{\perp A}|.$$

### 4.1.3 Commutateurs

Soient  $x \mapsto \alpha x = Ax + a$  et  $x \mapsto \beta x = Bx + b$  deux isométries de  $\mathbb{R}^n$ . Pour le commutateur  $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} \text{rot } [\alpha, \beta] &= [A, B], \\ \text{trans } [\alpha, \beta] &= (A - I_n)b + (I_n - [A, B])b + A(I_n - B)A^{-1}a. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $A, B \in O(n)$ , on a la majoration suivante :

$$m([A, B]) \leq 2m(A)m(B).$$

En effet, puisque  $[A, B] - I_n = ABA^{-1}B^{-1} - I_n = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1}$  on a :

$$\begin{aligned} |[A, B]x - x| &\leq |(A - I_n)(B - I_n)A^{-1}B^{-1}x| + |(B - I_n)(A - I_n)A^{-1}B^{-1}x| \\ &\leq m(A)|(B - I_n)A^{-1}B^{-1}x| + m(B)|(A - I_n)A^{-1}B^{-1}x| \\ &\leq m(A)m(B)|A^{-1}B^{-1}x| + m(B)m(A)|A^{-1}B^{-1}x| \\ &= 2m(A)m(B)|x| \end{aligned}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . D'où le résultat.

## 4.2 Preuve du premier théorème

Soit  $G$  un groupe cristallographique d'isométries de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 3.** *Pour tout vecteur unitaire  $u$  et tout  $\varepsilon, \delta > 0$ , il existe un élément  $\beta : x \mapsto \beta x = Bx + b$  de  $G$  tel que*

$$b \neq 0, \quad \angle(u, b) \leq \delta \quad \text{et} \quad m(B) \leq \varepsilon.$$

Soit  $d \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in G$  tel que  $|\text{trans } \alpha - x| \leq d$  (propriété de cocompacité d'un groupe cristallographique). Soit  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite satisfaisant  $|b_k - ku| \leq d$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (avec  $\beta_k : x \mapsto \beta_k x = B_k x + b_k$ ). Cette suite vérifie :

$$|b_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{et} \quad \angle(u, b_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par compacité de  $O(n)$ , on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la suite  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge. Ainsi, il existe deux entiers  $i < j$  tels que

$$m(B_j B_i^{-1}) \leq \varepsilon, \quad \angle(u, b_j) \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad |b_i| \leq \frac{\delta}{4}|b_j|.$$

L'isométrie  $\beta_j \beta_i^{-1} : x \mapsto \beta_j \beta_i^{-1} x = B_j B_i^{-1} x + b_j - B_j B_i^{-1} b_i$  satisfait alors les propriétés requises.

**Lemme 4.** *Un élément  $\alpha : x \mapsto \alpha x = Ax + a$  de  $G$  qui vérifie  $m(A) \leq \frac{1}{2}$  est une translation.*

Raisonnons par l'absurde. Considérons l'élément  $\alpha$  de  $G$  tel que  $0 < m(A) \leq \frac{1}{2}$  et dont  $|a|$  est minimum (un tel élément existe car  $G$  est discret). Le lemme 3 appliqué à un vecteur unitaire  $u \in E_A$  et aux constantes  $\delta = \frac{\pi}{4}$  et  $\varepsilon = \frac{1}{8}(m(A) - m^\perp(A))$  nous fournit un élément  $\beta$  de  $G$  tel que

$$b \neq 0, \quad |b^{\perp A}| \leq |b^{E_A}| \quad \text{et} \quad m(B) \leq \frac{1}{8}(m(A) - m^\perp(A))$$

et dont on peut choisir  $|b|$  minimum ( $G$  discret).

Le commutateur  $\gamma = [\alpha, \beta] : x \mapsto \gamma x = Cx + c$  vérifie :

$$m(C) = m([A, B]) \leq 2m(A)m(B) \leq m(B),$$

$$\text{et } c = (A - I_n)b^{\perp A} + (A - I_n)b^{E_A} + r \quad \text{où } r = (I_n - [A, B])b + A(I_n - B)A^{-1}a.$$

Si  $\beta$  est une translation, alors  $r = 0$ . Dans le cas contraire,  $|b| \geq |a|$  par définition de  $\alpha$ . Par conséquent,

$$|r| \leq (m([A, B]) + m(B))|b| \leq 2m(B)|b| \leq 4m(B)|b^{E_A}|.$$

Dans les deux cas, on a donc l'inégalité

$$|r| \leq \frac{1}{2}(m(A) - m^\perp(A))|b^{E_A}|.$$

On a alors :

$$|c^{\perp A}| = |(A - I_n)b^{\perp A} + r^{\perp A}| \leq m^{\perp}(A)|b^{\perp A}| + \frac{1}{2}(m(A) - m^{\perp}(A))|b^{EA}| \leq \frac{1}{2}(m(A) + m^{\perp}(A))|b^{EA}|$$

$$|c^{EA}| = |(A - I_n)b^{EA} + r^{EA}| \geq m(A)|b^{EA}| - \frac{1}{2}(m(A) - m^{\perp}(A))|b^{EA}| \geq \frac{1}{2}(m(A) + m^{\perp}(A))|b^{EA}|,$$

et par ailleurs  $|c| \leq m(A)|b| + |r| \leq \frac{3}{4}|b| < |b|$ . On obtient donc ainsi un élément  $\gamma$  de  $G$  qui vérifie

$$c \neq 0, \quad |c^{\perp A}| \leq |c^{EA}| \quad \text{et} \quad m(C) \leq \frac{1}{8}(m(A) - m^{\perp}(A)),$$

et  $|c| < |b|$  ce qui contredit la définition de  $\beta$ .

On peut alors simplement conclure la démonstration du premier théorème de Bieberbach : le lemme 3 nous fournit  $n$  éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $G$  tels que

1. leurs composantes de translation  $c_1, \dots, c_n$  sont linéairement indépendantes,
2. leurs composantes de rotation vérifient  $m(C_k) \leq \frac{1}{2}$  ( $\forall k \leq n$ ).

Le lemme 4 affirme que ces éléments sont en fait des translations. On a donc bien exhibé  $n$  translations linéairement indépendantes.

### 4.3 Réseaux de $\mathbb{R}^n$

**Lemme 5.** Soit  $R$  un réseau de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\forall x \neq y \in R, |x - y| \geq 1$ . Soit  $N(\rho) = \text{card}\{x \in R \mid |x| \leq \rho\}$ . Alors

$$N(\rho) \leq (2\rho + 1)^n.$$

En effet, les boules de rayon  $\frac{1}{2}$  centrées sur les  $N(\rho)$  éléments de  $R$  de norme inférieure à  $\rho$  sont disjointes et toutes contenues dans la boule de rayon  $\rho + \frac{1}{2}$  centrée en 0. On obtient donc l'inégalité de volumes :

$$N(\rho) \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\rho + \frac{1}{2}\right)^n,$$

d'où l'on déduit le résultat.

**Lemme 6.** Soit  $R$  un réseau de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\forall x \neq y \in R, |x - y| \geq 1$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par  $k$  vecteurs  $w_1, \dots, w_k \in R$ . Si un point  $w$  du réseau  $R$  n'est pas contenu dans  $V$ , alors la longueur de sa composante sur  $V^{\perp}$  vérifie :

$$|w^{\perp}| \geq \frac{1}{(3 + |w_1| + \dots + |w_k|)^n}.$$

Soit  $N$  la partie entière de  $(3 + |w_1| + \dots + |w_n|)^n$ . Raisonnons par l'absurde : supposons que  $0 < |w^{\perp}| < \frac{1}{N}$ . Alors la distance des éléments  $0, w, 2w, \dots, Nw$  au sous-espace  $V$  est inférieure ou égale à 1. En ajoutant à chacun de ces éléments une combinaison linéaire  $c_j$  de  $w_1, \dots, w_k$  telle que  $|(jw)^{\perp} + c_j| < \frac{1}{2}(|w_1| + \dots + |w_n|)$ , on obtient  $N + 1$  points de  $R$  à une distance de l'origine inférieure ou égale à  $1 + \frac{1}{2}(|w_1| + \dots + |w_n|)$ , ce qui contredit le lemme précédent. Par conséquent, si  $w$  n'est pas contenu dans  $V$  (ie si  $0 < |w^{\perp}|$ ), alors  $|w^{\perp}| \geq \frac{1}{N} \geq \frac{1}{(3 + |w_1| + \dots + |w_k|)^n}$ .

## 4.4 Preuve du deuxième théorème

### 4.4.1 Groupes cristallographiques normaux

**Définition 5.** Un groupe cristallographique  $G$  d'isométries de  $\mathbb{R}^n$  est dit **normal** si son groupe de translations  $\text{trans } G$  vérifie :

1.  $\forall x \neq y \in \text{trans } G, |x - y| \geq 1$ ,
2.  $\text{trans } G$  contient  $n$  vecteurs unitaires linéairement indépendants.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que tout groupe cristallographique est isomorphe à un groupe cristallographique normal, puis qu'il n'existe qu'un nombre fini de groupes cristallographiques normaux à isomorphisme près. On obtiendra ainsi le deuxième théorème de Bieberbach.

#### 4.4.2 Réduction du problème aux groupes cristallographiques normaux

**Lemme 7.** *Si  $\alpha : x \mapsto Ax + a \in G$  et si  $w \in \text{trans } G$ , alors  $Aw \in \text{trans } G$ .*

Soit  $\omega : x \mapsto x + w \in G$ . Alors  $\alpha\omega\alpha^{-1} : x \mapsto x + Aw \in G$ , donc  $Aw \in \text{trans } G$ .

**Lemme 8.** *Tout groupe cristallographique est isomorphe à un groupe cristallographique normal.*

Soit  $G$  un groupe cristallographique. Quitte à changer l'échelle, on peut supposer que le vecteur  $v \in (\text{trans } G) \setminus \{0\}$  de norme minimale est unitaire. Raisonnons maintenant par induction : supposons que le réseau  $\text{trans } G$  contient  $k < n$  vecteurs unitaires linéairement indépendants  $w_1, \dots, w_k$  et vérifie la condition  $\forall x \neq y \in \text{trans } G, |x - y| \geq 1$ , et trouvons un groupe cristallographique  $G'$  isomorphe à  $G$  qui contient  $k + 1$  vecteurs unitaires linéairement indépendants et qui vérifie la même condition. Deux cas se présentent :

- (i) S'il existe une isométrie  $\alpha : x \mapsto Ax + a \in G$  et un entier  $i \leq k$  tels que  $A(w_i) \notin V = \text{vect}(w_1, \dots, w_k)$ , alors par le lemme précédent,  $A(w_i) \in \text{trans } G$  est le  $(k + 1)$ -ème élément recherché.
- (ii) Dans le cas contraire,  $V$  et  $V^\perp$  sont stables par les composantes de rotation des éléments du groupe  $G$ . Par conséquent, pour un réel  $\mu > 0$  fixé, l'application  $\Phi_\mu$  définie par

$$\Phi_\mu(x^V + x^\perp) = x^V + \mu x^\perp$$

commute avec les composantes de rotation des éléments du groupe  $G$ . Ainsi, pour tout  $\gamma : x \mapsto Cx + c \in G$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on peut écrire

$$\Phi_\mu \gamma \Phi_\mu^{-1} x = \Phi_\mu C \Phi_\mu^{-1} x + \Phi_\mu c = Cx + \Phi_\mu c,$$

d'où l'on déduit que le groupe  $G_\mu = \Phi_\mu G \Phi_\mu^{-1}$  agit par isométries et vérifie  $\text{trans } G_\mu = \Phi_\mu(\text{trans } G)$ . Le lemme 6 sur les réseaux affirme donc qu'il existe une constante  $\bar{\mu}$  telle que pour tout  $\mu < \bar{\mu}$ , le réseau  $\text{trans } G_\mu$  ne satisfait plus la condition  $\forall x \neq y \in \text{trans } G_\mu, |x - y| \geq 1$ . Par conséquent, il existe un  $\tilde{\mu} > 0$  minimum tel que le réseau  $\text{trans } G_{\tilde{\mu}}$  satisfasse cette condition. Il est alors clair que le vecteur de  $(\text{trans } G_{\tilde{\mu}}) \setminus V$  de norme minimale doit être unitaire (dans le cas contraire, on peut prendre  $\tilde{\mu}$  plus petit ce qui contredit sa définition). Par conséquent, le groupe  $G_{\tilde{\mu}}$  satisfait les conditions requises.

#### 4.4.3 Finitude de l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques normaux

Soit  $G$  un groupe cristallographique normal de  $\mathbb{R}^n$  et  $w_1, \dots, w_n \in \text{trans } G$  des vecteurs unitaires linéairement indépendants. Le sous-réseau  $S = \{m_1 w_1 + \dots + m_n w_n \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $\text{trans } G$ . Pour chaque classe à droite de  $G$  par  $S$ , on considère un représentant  $g \in G$  tel que

$$|\text{trans } g| \leq \frac{1}{2}(|w_1| + \dots + |w_n|) = \frac{n}{2}.$$

Par discrétude du groupe  $G$ , il n'existe qu'un nombre fini de tels représentants, que l'on note  $g_1, \dots, g_N$ . Tout élément  $\alpha$  de  $G$  peut alors s'écrire de manière unique sous la forme

$$\alpha = g_v + (m_1 w_1 + \dots + m_n w_n),$$

avec  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  et  $1 \leq v \leq N$ . Le groupe  $G$  est alors complètement déterminé par les entiers  $m_k^{i,j}$ ,  $v^{i,j}$  et  $N$  qui apparaissent dans la table (que l'on note par la suite  $T(G)$ ) :

$$g_i g_j^{-1} = g_{v^{i,j}} + (m_1^{i,j} w_1 + \dots + m_n^{i,j} w_n).$$

Nous venons de montrer le lemme suivant.

**Lemme 9.** *Tout groupe cristallographique normal  $G$  est complètement déterminé par la table  $T(G)$ .*

**Lemme 10.** *Les valeurs absolues des nombres  $N, m_k^{i,j}$  et  $v^{i,j}$  ( $1 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq N$ ) sont majorées par une constante ne dépendant que de  $n$ . Autrement dit, pour un  $n$  fixé, il n'existe qu'un nombre fini de tables possibles.*

Commençons par les  $m_k^{i,j}$ . Par construction, les éléments  $g_i, g_j$  et  $g_{v^{i,j}}$  ont une norme de composante de translation inférieure ou égale à  $\frac{n}{2}$ , donc l'élément  $m_1^{i,j} w_1 + \dots + m_n^{i,j} w_n = g_i g_j^{-1} g_{v^{i,j}}^{-1}$  a une norme de composante de translation inférieure ou égale à  $\frac{3n}{2}$ . En particulier si on pose  $V = \text{vect}(w_1, \dots, w_{k-1}, w_{k+1}, \dots, w_n)$  et si  $w_k^\perp$  est la composante de  $w_k$  sur le complémentaire orthogonal de  $V$ , on obtient

$$|m_k^{i,j} w_k^\perp| \leq \frac{3n}{2}.$$

Or, par le lemme 6, on a aussi

$$|w_k^\perp| \geq \frac{1}{(3 + |w_1| + \dots + |w_{k-1}| + |w_{k+1}| + \dots + |w_n|)^n} = \frac{1}{(n+2)^n},$$

donc on obtient la majoration

$$\forall 1 \leq k \leq n, \forall n+1 \leq i, j \leq N, \quad |m_k^{i,j}| \leq \frac{3n}{2}(n+2)^n.$$

Majorons à présent  $N$ . Pour toute isométrie  $\alpha : x \mapsto Ax + a \in G$ , la composante de rotation  $A$  est entièrement déterminée par les images  $A(w_1), \dots, A(w_n)$  (puisque les vecteurs  $w_1, \dots, w_n$  sont linéairement indépendants). Ces images sont des vecteurs unitaires (car les vecteurs  $w_1, \dots, w_n$  sont unitaires) de trans  $G$  (par le lemme 7), ce qui ne laisse que  $3^n$  choix possibles (par le lemme 5. Ainsi, il y a au plus  $(3^n)^n$  choix possibles pour les composantes de rotation des éléments du groupe  $G$ . De la même façon, pour  $1 \leq i, j \leq N$ , la norme de la composante de translation de  $g_i g_j^{-1}$  est inférieure ou égale à  $n$  (par construction). Le lemme 5 nous assure à nouveau qu'il n'y a que  $(2n+1)^n$  choix possibles. On en déduit finalement la majoration

$$N \leq n + (3^n)^n (2n+1)^n.$$

Puisque  $\forall 1 \leq i, j \leq N, v^{i,j} \leq N$ , nous avons terminé nos majorations, et ainsi prouvé le deuxième théorème de Bieberbach.

## 5 Questions et remarques

### 5.1 Questions

On pourra traiter les problèmes suivants :

1. sur les pavages non-périodiques et aperiodiques :
  - (a) montrer que les deux constructions de la partie 2 fournissent bien des pavages.
  - (b) montrer que ces pavages ne sont pas périodiques.
  - (c) donner un exemple de pavage ni périodique, ni aperiodique, dont le groupe de symétrie est fini.
  - (d) écrire une procédure Maple traçant le pavage de Penrose.
2. sur les pavages périodiques du plan :
  - (a) montrer qu'il existe une unique boule de rayon minimal contenant un compact du plan. Compléter la preuve du lemme 1.
  - (b) montrer que le commutateur de deux rotations de centres distincts est une translation non triviale.
  - (c) donner les détails de la preuve de la proposition 4.
  - (d) écrire une procédure Maple prenant en entrée un dessin et le nom d'un groupe cristallographique et traçant l'orbite de  $D$  sous l'action de  $G$  (on utilisera l'arborescence fondamentale et le tableau récapitulatif donnés au paragraphe 3.2).

### 5.2 Remarques et références

Je ne connais pas de référence claire développant toutes les idées contenues dans ce texte, en particulier en ce qui concerne la démonstration des deux premiers théorèmes de Bieberbach en dimension quelconque. En revanche, l'étude des groupes cristallographiques directs du plan est entièrement traitée aussi bien dans le livre de *Géométrie* (tome 3) de M. BERGER que dans *Mathématiques générales pour l'Aggrégation* de P. TAUVEL. Il me semble que cette étude constitue un bon sujet pour les leçons d'agrégation suivantes :

- ISOMÉTRIES D'UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DE DIMENSION FINIE  
On étudie des groupes d'isométries du plan. On utilise de manière cruciale des résultats importants sur les isométries (décomposition des isométries affines en composantes de rotation et de translation, composition de rotations, conjugaison/commutateur d'isométries,...).
- UTILISATION DES GROUPES EN GÉOMÉTRIE  
Groupes cristallographiques, groupes de rotations et réseaux apparaissent naturellement dans l'étude des pavages.
- GROUPE OPÉRANT SUR UN ENSEMBLE  
Exemple de groupe discret opérant sur le plan.

– SOUS-GROUPES DISCRETS DE  $\mathbb{R}^n$ , RÉSEAUX

On montre que le groupe des translations d'un groupe cristallographique est un réseau (le pavage  $p1$  est un excellent exemple d'utilisation de réseau du plan). Cette propriété est fondamentale pour l'étude des groupes cristallographiques du plan.

– SOUS-GROUPES FINIS DE  $O(2)$  ET  $O(3)$

On étudie le groupe des rotations d'un groupe cristallographique direct du plan. Il se trouve que c'est nécessairement un sous-groupe fini de  $O^+(2)$ , donc un groupe cyclique. De façon similaire, il est indispensable de décrire les sous-groupes finis de  $O(3)$  pour étudier les pavages périodiques de l'espace.

Par ailleurs, l'étude des pavages peut être mentionnée comme illustration dans les sujets suivants :

– ANGLES : DÉFINITION ET UTILISATION EN GÉOMÉTRIE

On utilise les angles pour connaître les groupes de rotation possibles pour un groupe cristallographique direct du plan.

– APPLICATIONS AFFINES

Les groupes cristallographiques isomorphes sont en fait conjugués dans le groupe des applications affines.

– APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES À LA GÉOMÉTRIE

Les deux procédures Maple permettant de tracer un pavage de Penrose et un pavage périodique du plan s'écrivent aisément en utilisant les complexes, et les descriptions algébriques des isométries du plan.